**T.C.**

**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ**

**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERİN KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**


**AHMET ÖZCAN**

**Tez Danışmanı**

**DR. ÖĞR. ÜYESİ AYKUT OR**


**ÇANAKKALE – 2023**

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERİN KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET ÖZCAN

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ AYKUT OR

ÇANAKKALE – 2023

# ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Ahmet ÖZCAN
08/12/2023

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer hocam, Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR'a hayata ve matematiğe ilişkin öğrendiğim ve öğreneceğim her şey için en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşlarım Gökay KARABACAK ve Ahmet ÇAKI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, maddi manevi her konuda beni sonuna kadar destekleyen, çalışmalarım süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen, hayatımın her evresinde bana destek olan ve borçlarını asla ödeyemeceğim sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet Özcan
Çanakkale, Aralık 2023

# ÖZET

## SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Ahmet ÖZCAN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: DR. ÖĞR. ÜYESİ AYKUT OR
08/12/2023, 38

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının ilk bölümünde istatistiksel yakınsaklık, kaba yakınsaklık, kaba istatistiksel yakınsaklık ve sezgisel bulanık normlu uzaylar ile ilgili literatür bilgisine yer verildi. İkinci bölümde çift indisli dizilerde kaba yakınsaklık, kaba istatistiksel yakınsaklık kavramları ile ilgili temel tanım ve teoremler sunuldu. Ayrıca, bu kavramlar sezgisel bulanık normlu uzaylarda çift indisli diziler için sunularak bu uzaylarda da ifade edildi. Tezin özgün değerinin yer verildiği üçüncü bölümde çift indisli dizilerin sezgisel bulanık normlu uzaylarda kaba istatistiksel yakınsaklığı tanımlanarak kaba limit noktaları kümesi ve bu kümenin bazı topolojik özellikleri incelendi. Sonuç ve önerilerin ele alındığı son bölümde gelecek çalışmalar için bir tartışmaya yer verildi.

**Anahtar sözcükler:** Kaba Yakınsaklık, Kaba İstatistiksel Yakınsaklık, Çift İndisli Diziler, Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylar

## ABSTRACT

## ROUGH STATISTICAL CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES IN INTUITIONISTIC FUZZY NORMED SPACES

Ahmet ÖZCAN
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Departmant of Mathematics
Advisor: ASST. PROOF. DR. AYKUT OR
12/08/2023, 38

The first part of this thesis, which consists of four chapters, includes literature about statistical convergence, rough convergence, rough statistical convergence and intuitionistic fuzzy normed spaces. The second chapter presents basic definitions and theorems regarding statistical convergence, rough convergence and rough statistical convergence. Moreover, these concepts were expressed for double sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces. In the third chapter, where the original value of the thesis is included, the rough statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces is defined, and the set of rough statistical limit points and some topological properties of this set are examined. In the last section, where the results and recommendations were discussed, a discussion was included for future studies.

**Keywords:** Rough Convergence, Rough Statistical Convergence, Double Sequences, Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces

## İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $A \sim B$ | *A* ile *B* kümesinin simetrik farkı sonlu |
| $\lvert A \rvert$ | *A* kümesinin kardinalitesi |
| $(X, \lVert . \rVert)$ | Normlu uzay |
| $K^c$ | *K* kümesinin tümleyeni |
| $*$ | t-norm |
| $\circ$ | t-conorm |
| $B(\xi_0, \varepsilon, u)$ | Sezgisel Bulanık Normlu Uzayda Açık Yuvar |

# BİRİNCİ BÖLÜM
# GİRİŞ

Yakınsaklık, Analiz ve Fonksiyonel Analizin temel kavramlarından biridir. Cauchy anlamda yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık doğal sayıların yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. Fast ve Steinhaus (1951) birbirlerinden bağımsız olarak istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladıklarından bu yana bu kavramın uygulamaları ve bazı genelleştirmesi başta Buck (1953), Schoenberg (1959), Salat (1980) ve Fridy (1985) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Pringsheim 1900 yılında çift dizilerin yakınsaklık kavramını, $\xi = (\xi_{jk})$ kompleks veya reel terimli bir çift indisli dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $j,k \geq N$ için $|\xi_{jk} - \xi_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $\xi$ dizisi $\xi_0 \in \mathbb{X}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır (veya P-yakınsaktır) şeklinde tanımlamıştır. Daha sonra, Hardy (1917), Moricz (1991), Moricz ve Rhoades (1988), tarafından çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı, Mursaleen ve Edely (2003) ile Móricz (2003), Özcan ve Or (2022), Özcan vd. (2023) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak çift dizilere genişletilmiştir.

Yakınsak olmadığı halde bazı koşullarda yakınsaklık kavramıyla ilişkilendirilebilecek dizilerin varlığı, çeşitli yakınsaklık türlerinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu yakınsaklık türlerinin en önemlilerinden biri 2001 yılında Phu tarafından sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan ve Cauchy anlamında yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olan kaba yakınsaklıktır. $(\xi_n)$, $\mathbb{X}$ normlu uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olmak üzere verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ iken

$$\|\xi_n - \xi_0\| < \mathtt{r} + \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ noktasına kaba yakınsak kısaca $\mathtt{r}-$yakınsaktır denir. Söz konusu yakınsaklık türünün ilgi çekici olmasının sebebi yakınsak olmayan bir dizinin yakınsak bir yaklaşım dizisi ile ifade edilmesidir.

Bir $\xi_0$ noktasına yakınsak $(\eta_n)$ dizisinin terimleri kesin olarak belirlenemeyebilir. Bunun yerine, her $n$ için $\|\xi_n - \eta_n\| \leq \mathtt{r}$ olacak biçimde, işlemleri kolaylaştıracak ve terimleri bilinen bir $(\xi_n)$ yaklaşım dizisinden yararlanılabilir. Burada $\mathtt{r} > 0$, yaklaşım hatasının bir üst sınırıdır. $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ noktasına Cauchy anlamında yakınsak değil iken

$$\|\xi_n - \xi_0\| \leq \|\xi_n - \eta_n\| + \|\eta_n - \xi_0\| \leq \mathtt{r} + \|\eta_n - \xi_0\|$$

olduğundan kaba yakınsak olduğu ifade edilir (Phu, 2001).

Phu, 2002 yılındaki başka bir çalışmasında, lineer operatörlerin kaba sürekliligini tanımlayarak, görüntü uzayı sonlu boyutlu olan lineer operatörlerin, tanım kümesinin her bir noktasında, kaba sürekli olduğunu ispatlamıştır. Sonlu boyutlu normlu uzaylardaki sonuçları sonsuz boyutlu normlu uzaylara taşıdığı çalışması kaba yakınsaklık ile ilgili son çalışması olarak 2003 yılında literatürdeki yerini almıştır. Aytar (2008), $\mathbb{N}$'nin doğal yoğunluğu kavramını kullanarak bu kaba yakınsaklık kavramını kaba istatistiksel yakınsama kavramına genişlettiği çalışmasında kaba istatistiksel limit noktaları kümesinin kapalılık, konvekslik gibi bazı özelliklerini incelemiştir. Ayrıca, Malik ve Maity (2013), Malik ve Maity (2016) normlu lineer uzaylarda çift dizilerin sırasıyla kaba yakınsaklık ve kaba istatistiksel yakınsaklığı kavramlarını çalışmışlardır. Diğer taraftan, bu kavramlar üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Günlük hayatta belirsizlik içeren pek çok problem ile karşılaşılmaktadır. Zadeh (1965) tarafından sunulan bulanık kümeler ve daha sonra bu kümelerin genelleştirilmesi olarak Atanassov (1986,1989) tarafından tanımlanan sezgisel bulanık kümeler kavramları belirsizliği gidermek için kullanılan matematiksel araçlar olarak literatürde yer almıştır. Klasik matematiğin dışında tanımlanan bu matematiksel araçlar sayesinde birçok problem bu kavramlar yardımıyla yeniden ifade edilmiştir. Yakınsaklık çeşitleri de bunların içindeki önemli kavramlardandır. Saadati ve Park (2006) sezgisel bulanık normlu uzay, sezgisel bulanık normlu uzayda dizilerin yakınsaklığı ve Cauchy dizileri kavramlarını tanıtmışlardır. Sezgisel bulanık normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık istatistiksel Cauchy dizisi ve aralarındaki ilişkiler Karakuş ve ark. (2008) tarafından tanımlanmıştır. Antal ve vd. (2021) kaba istatistiksel yakınsaklık kavramını söz konusu uzaylarda tanıtmış ve bu uzaylarda kaba istatistiksel limit noktaları kümesi ile kaba istatistiksel yakınsak dizilerin limit noktaları kümesi arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

# İKİNCİ BÖLÜM

# TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1. Kaba İstatistiksel Yakınsaklık

### 2.1.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde yoğunluk kavramı ve bundan yararlanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı sunulmuştur. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklık ile ilgili literatürdeki temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1.** (Freedman ve Sember, 1981) $P(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet kümesi olmak üzere bir $\underline{\varphi} : P(\mathbb{N}) \to [0,1]$ fonksiyonu her $A, B \in P(\mathbb{N})$ için

*i.* $A \sim B \Rightarrow \underline{\varphi}(A) = \underline{\varphi}(B)$

*ii.* $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \underline{\varphi}(A) + \underline{\varphi}(B) \leq \underline{\varphi}(A \cup B)$

*iii.* $\underline{\varphi}(A) + \underline{\varphi}(B) \leq 1 + \underline{\varphi}(A \cap B)$

*iv.* $\underline{\varphi}(\mathbb{N}) = 1$

koşullarını sağlıyor ise $\underline{\varphi}$'ye bir alt yoğunluk fonksiyonu denir.

Burada, $A \sim B$ ile $A$ ve $B$ kümelerinin simetrik farkının sonlu olduğu ifade edilmiştir.

**Tanım 2.2.** (Freedman ve Sember, 1981) $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $\underline{\varphi}$ bir alt yoğunluk fonksiyonu olsun. O halde,

$$\overline{\varphi}(A) := 1 - \underline{\varphi}(\mathbb{N} \setminus A)$$

biçiminde tanımlanan $\overline{\varphi}$ fonksiyonuna bir üst yoğunluk fonksiyonu denir.

**Tanım 2.3.** (Freedman ve Sember, 1981) $\underline{\varphi}$ bir alt yoğunluk ve $\overline{\varphi}$ bir üst yoğunluk fonksiyonu olsun. Eğer, $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\underline{\varphi}(A) = \overline{\varphi}(A) = \varphi(A)$ oluyorsa $\varphi$ fonksiyonuna doğal yoğunluk fonksiyonu (kısaca yoğunluk fonksiyonu) denir. $\varphi(A)$, $A$ kümesinin yoğunluğu olarak ifade edilir.

**Not 2.4.** Sonlu kümelerin yoğunluğu 0 dır.

**Örnek 2.5.** (Freedman ve Sember, 1981) $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\varphi(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in A : k \leq n\}|}{n}$$

biçiminde tanımlanan $\delta$ bir yoğunluk fonksiyonudur.

**Tanım 2.6.** (Fridy, 1985) $(\xi_n)$, $(\mathbb{R}, |.|)$ metrik uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi(\{n \in \mathbb{N} : |\xi_n - \xi_0| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyor ise $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ sayısına istatistiksel yakınsıyor denir ve $st - \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$ veya $\xi_n \xrightarrow{st} \xi_0$ ile gösterilir.

İstatistiksel yakınsaklık yakınsaklığın bir genelleştirmesi olduğundan her Cauchy yakınsak dizi istatistiksel yakınsak olmasına rağmen tersi doğru değildir. Bir dizi istatistiksel yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ için, dizinin sonsuz sayıda terimi, bu terimlerin indislerinden oluşan kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olması koşuluyla, istatistiksel limitin komşuluğunun dışında kalabilir. Bu, istatistiksel yakınsamayı Cauchy yakınsaklıktan ayıran önemli bir özelliktir. Sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğu için, Cauchy yakınsak her dizinin istatistiksel olarak yakınsak olduğunu söyleyebiliriz. Fakat, istatistiksel yakınsak her dizinin Cauchy yakınsak olmadığı Örnek
ref2.6 gösterilmiştir.

**Örnek 2.7.**

$$\xi_n := \begin{cases} \sqrt[3]{n}, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^3 \\ 7, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(\xi_n)$ dizisi verilsin.

$$(\xi_n) = (1,7,7,7,7,7,7,2,7,7,\ldots)$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |\xi_n - 7| \geq \varepsilon\} = \{1, 8, 27, \ldots\}$$

olmak üzere $\varphi(A) = 0$ olduğundan $st - \lim_{n\to\infty} \xi_n = 7$ dir fakat $(\xi_n)$ dizisi Cauchy yakınsak bir dizi değildir.

### 2.1.2. Kaba İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde kaba istatistiksel yakınsaklık kavramı ve kaba limit noktalarının kümesinin bazı topolojik özellikleri gibi temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Bu kavramlar için referanslar bölümünde yer alan Phu (2001, 2003) ve Aytar (2008)'ın çalışmalarından yararlanılmıştır.

**Tanım 2.8.** (Phu, 2001) $\xi = (\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi, $\xi_0 \in \mathbb{X}$ ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_\varepsilon$ olmak üzere

$$\|\xi_n - \xi_0\| < \mathtt{r} + \varepsilon$$

şartını sağlayan en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ elemanına kaba yakınsaktır ($\mathtt{r}-$yakınsaktır) denir ve $\xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}} \xi_0$ ile gösterilir. Tanımdaki $\xi_0$ elemanına $(\xi_n)$ dizisinin kaba limit noktası denir ve tüm kaba limit noktalarının kümesi

$$LIM_\xi^{\mathtt{r}} = \left\{ \xi_0 \in \mathbb{X} : \xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}} \xi_0 \right\}$$

ile gösterilir. Buradaki $\mathtt{r}$ kabalık derecesi olarak adlandırılır ve $\mathtt{r} = 0$ olduğu durumda Cauchy yakınsaklık elde edilir.

**Örnek 2.9.** (Phu, 2001) $\xi = (\xi_n) = ((-1)^n)$ dizisi Cauchy anlamda yakınsak bir dizi değildir. Ancak, her $\varepsilon > 0$ için

$$|\xi_n - \xi_0| < \mathtt{r} + \varepsilon$$

olacak biçimde $\mathtt{r} > 0$ bulunabilirse dizi kaba yakınsak olur. Şimdi,

$$|\xi_n - \xi_0| < \mathtt{r} + \varepsilon \Rightarrow -\mathtt{r} - \varepsilon + \xi_n < \xi_0 < \mathtt{r} + \varepsilon + \xi_n$$

$\xi_n = ((-1)^n)$ dizisinin $(\xi_{2n})$ ve $(\xi_{2n-1})$ şeklinde iki alt dizisini alalım. $(\xi_{2n}) = (1,1,1,...)$ olur ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} -\mathtt{r} - \varepsilon < 1 - \xi_0 < \mathtt{r} + \varepsilon &\Rightarrow 1 - \mathtt{r} - \varepsilon < \xi_0 < 1 + \mathtt{r} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \xi_0 \in [1 - \mathtt{r}, 1 + \mathtt{r}] \end{aligned}$$

olur ve $(x_{2n-1}) = (-1,-1,-1,...)$ için

$$\begin{aligned} -\mathtt{r} - \varepsilon < -1 - \xi_0 < \mathtt{r} + \varepsilon &\Rightarrow -1 - \mathtt{r} - \varepsilon < \xi_0 < -1 + \mathtt{r} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \xi_0 \in [-1 - \mathtt{r}, -1 + \mathtt{r}] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$LIM_\xi^{\mathtt{r}} = \begin{cases} \emptyset, & \mathtt{r} < 1 \\ [1 - r, r - 1], & \mathtt{r} \geq 1 \end{cases}$$

olur. Sonuç olarak $(\xi_n)$ dizisi $\mathtt{r} \in [1, \infty)$ için kaba yakınsaktır.

Cauchy yakınsak bir dizinin limiti tektir. Örnek 2.9 den görüleceği üzere bir dizinin kaba limiti tek olmayabilir. Böylece kaba limit noktalarının kümesi tek bir elemandan oluşmaması durumu bu kümenin bazı topolojik özelliklerinin incelenmesini ön plana çıkarmıştır.

Cauchy yakınsak bir dizi aynı zamanda sınırlıdır ve her alt diziside aynı noktaya Cauchy yakınsaktır. Bu durum kaba yakınsaklıkta aşağıdaki gibi ifade edilir.

**Teorem 2.10.** (Phu, 2001) $\xi = (\xi_n), (\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi olsun.

*i.* $LIM_\xi^{\mathtt{r}}$ kümesinin çapı $2\mathtt{r}$ den büyük değildir.

*ii.* $\xi$ dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $LIM_\xi^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak şekilde $\mathtt{r} \geq 0$ var olmasıdır. Ayrıca sınırlı bir $\xi$ dizisi her $\mathtt{r} \geq 0$ için $LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ özelliğini sağlayan $\xi' = (\xi_{n_k})$ alt dizisini içerir.

*iii.* $\xi' = (\xi_{n_k})$, $\xi$ dizisinin bir alt dizisi ise $LIM_\xi^{\mathtt{r}} \subseteq LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}}$ sağlanır.

Kaba limit noktaları kümesinin bazı topolojik özellikleri aşağıdaki biçimde ifade edilir.

**Teorem 2.11.** (Phu, 2001) $\xi = (\xi_n), (\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi olsun.

*i.* $LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi kapalıdır.

*ii.* $LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi konvekstir.

Kaba yakınsaklığın Cauchy yakınsaklıkla ilişkisi aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir:

**Teorem 2.12.** (Phu, 2001) $\xi = (\xi_n), (\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. $\mathtt{r} \geq 0$ olmak üzere $\xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}} \xi_0$ olması için gerek ve yeter şart $\eta_n \to \xi_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|\xi_n - \eta_n\| \leq \mathtt{r}$ olacak biçimde $\mathbb{X}$ içinde $(\eta_n)$ dizisinin mevcut olmasıdır.

**Tanım 2.13.** (Aytar, 2008) $\xi = (\xi_n), (\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi, $\mathtt{r} \geq 0$ ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi(\{n \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \xi_0\| \geq \mathtt{r} + \varepsilon\}) = 0$$

veya

$$st - \lim_{n\to\infty} \sup \|\xi_n - \xi_0\| \leq \mathtt{r}$$

oluyorsa $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ elemanına kaba istatistiksel yakınsaktır denir ve $\xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}-st} \xi_0$ biçiminde gösterilir. $\xi_0$ elemanına $(\xi_n)$ dizisinin kaba istatistiksel limit noktası denir. Tüm kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi $st - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ ile gösterilir. Buradaki $\mathtt{r} - st$, istatistiksel kabalık derecesi olarak adlandırılır ve $\mathtt{r} = 0$ olduğu durumda ise istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Aynı zamanda kaba yakınsaklıkta bir $n_\varepsilon$'dan sonraki tüm terimlerin $\xi_0$'ın bir $\mathtt{r} + \varepsilon$ komşuluğuna düştüğünden bu komşuluk dışında kalan terimler sonlu sayıdadır. Dolayısıyla bu terimlerin oluşturduğu kümenin yoğunluğu sıfır olduğundan kaba yakınsak her dizi kaba istatistiksel yakınsaktır. Bu durumda kaba istatistiksel yakınsaklık kaba yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve Cauchy yakınsaklığın bir genelleştirilmesidir.

**Teorem 2.14.** (Aytar, 2008) $\xi = (\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. $st - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesinin çapı $2\mathtt{r}$ den büyük değildir.

**Teorem 2.15.** (Aytar, 2008) $\xi = (\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi olsun. $\xi$ dizisi sınırlı ise $st - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $\mathtt{r}$ pozitif reel sayısı vardır.

Kaba yakınsak her dizi aynı zamanda sınırlıdır. Ancak kaba istatistikel yakınsak her dizinin sınırlı olmadığı Örnek 2.16'te görülür.

**Örnek 2.16.** $\xi = (\xi_n)$ dizisi

$$\xi_n := \begin{cases} (-1)^n, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ n, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$$st - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = \begin{cases} \emptyset, & \mathtt{r} < 1 \\ [1-\mathtt{r}, \mathtt{r}-1], & \mathtt{r} \geq 1 \end{cases}$$

ve her $\mathtt{r} \geq 0$ için $LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = \emptyset$ dir

**Teorem 2.17.** (Aytar, 2008) $\xi = (\xi_n), (\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi olsun. $\xi$ dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $st - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $\mathtt{r}$ pozitif reel sayısı vardır.

**Teorem 2.18.** (Aytar, 2008) $\xi' = (\xi_{n_k})$, $\xi = (\xi_n)$ dizisinin zayıf olmayan bir alt dizisi ise $st - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \subseteq st - LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}}$.

Teorem 2.18'nın zayıf olan alt diziler için sağlanmadığı Örnek 2.19 ile ifade edilmiştir.

**Örnek 2.19.** (Aytar, 2008) $\xi = (\xi_n)$ dizisi

$$\xi_n := \begin{cases} n, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ 0, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $st - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = [-\mathtt{r}, \mathtt{r}]$ biçimindedir, ancak

$\xi' = (1,4,9,16,\ldots)$ alt dizisi için $st-LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}} = \emptyset$ dir.

Kaba istatistiksel limit noktaları kümesinin bazı topolojik özellikleri aşağıdaki biçimde ifade edilir.

**Teorem 2.20.** (Aytar, 2008) $\xi = (\xi_n), (\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi olsun.

*i.* $st-LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi kapalıdır.

*ii.* $st-LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi konvekstir.

İstatistiksel yakınsaklık ile kaba istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki Teorem 2.21'da verilmiştir.

**Teorem 2.21.** (Aytar, 2008) $\xi = (\xi_n), (\mathbb{X}, \|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi, $\xi_0 \in \mathbb{X}$ ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. $\xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}-st} \xi_0$ olması için gerek ve yeter şart $\eta_n \xrightarrow{st} \xi_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|\xi_n - \eta_n\| \leq \mathtt{r}$ olacak biçimde $\mathbb{X}$ içinde $(\eta_n)$ dizisinin mevcut olmasıdır.

### 2.2. Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Kaba İstatistiksel Yakınsaklık

Bu alt bölümde sezgisel bulanık normlu uzaylarda istatistiksel ve kaba istatistiksel yakınsaklık kavramları ve onların temel özelliklerine değinilmiştir.

#### 2.2.1. Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylar

Sezgisel bulanık normlu uzay gerçek yaşam koşullarında karşımıza çıkan belirsizliği modellemek için doğal bir araç olarak iyi motive edilmiş bir araştırma alanıdır. Bu alt bölümde, bu kavram ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.22.** (Schweizer ve Sklar, 1960) $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ bir ikili işlem olsun. Eğer, her $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$ için

*i.* $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$

*ii.* $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

*iii.* $x_2 \leq x_3 \Rightarrow x_1 * x_2 \leq x_1 * x_3$

*iv.* $x_1 * 1 = 1 * x_1 = x_1$

koşulları sağlanıyor ise $*$ işlemine bir üçgensel norm (t-norm) denir.

**Tanım 2.23.** (Schweizer ve Sklar, 1960) $\circ : [0,1]^2 \to [0,1]$ bir ikili işlem olsun. Eğer, her $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$ için

*i.* $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$

*ii.* $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$

*iii.* $x_2 \leq x_3 \Rightarrow x_1 \circ x_2 \leq x_1 \circ x_3$

*iv.* $x_1 \circ 0 = 0 \circ x_1 = x_1$

koşulları sağlanıyor ise $\circ$ işlemine bir t-conorm denir.

**Örnek 2.24.** (Schweizer ve Sklar, 1960) Aşağıdaki işlemler birer t-normdur:

(1) $\alpha \circ \beta = \max\{\alpha, \beta\}$ (Maksimum t-conormu)

(2) $\alpha * \beta = \min\{\alpha, \beta\}$ (Minimum t-normu)

**Tanım 2.25.** (Saadati ve Park, 2006) $\mathbb{X}$ bir lineer uzay, $\phi$ ve $\vartheta$ $\mathbb{X} \times (0, \infty)$ üzerinde bulanık küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $\circ$ sürekli bir t-conorm olsun. Her $x, y \in \mathbb{X}$ ve $u, t > 0$ için,

*i.* $\phi(x,u) + \vartheta(x,u) \leq 1$,

*ii.* $\phi(x,u) > 0$,

*iii.* $\phi(x,u) = 1 \Leftrightarrow x = 0$, *iv.* $\alpha \neq 0$ olmak üzere $\phi(\alpha x, u) = \phi\left(x, \frac{u}{|\alpha|}\right)$,

*v.* $\phi(x,u) * \phi(y,t) \leq \phi(x+y, u+t)$,

*vi.* $\phi(x,u) : (0,\infty) \to (0,1]$, $u$ üzerinde süreklidir,

*vii.* $\lim_{u \to 0} \phi(x,u) = 0$ ve $\lim_{u \to \infty} \phi(x,u) = 1$,

*viii.* $\vartheta(x,u) < 1$,

*ix.* $\vartheta(x,u) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

*x.* $\alpha \neq 0$ ise $\vartheta(\alpha x, u) = v\left(x, \frac{u}{|\alpha|}\right)$,

*xi.* $\vartheta(x,u) \circ \vartheta(y,t) \geq \vartheta(x+y, u+t)$,

*xii.* $\vartheta(x,u) : (0,\infty) \to [0,1)$, $u$ üzerinde süreklidir,

*xiii.* $\lim_{u \to 0} \vartheta(x,u) = 1$ ve $\lim_{u \to \infty} \vartheta(x,u) = 0$

şartları sağlanıyorsa $(\phi, \vartheta)$ sıralı ikilisine sezgisel bulanık norm ve $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta, *, \circ)$ sıralı beşlisine sezgisel bulanık normlu uzay denir.

**Tanım 2.26.** (Lael ve Nourouzi, 2008) $\mathbb{X}$ bir lineer uzay, $\phi$ ve $\vartheta$, $\mathbb{X} \times (0,\infty)$ üzerinde bulanık küme, min sürekli bir t-norm ve max sürekli bir t-conorm olsun. Her $x, y \in \mathbb{X}$ için,

1. Her $u \in (-\infty, 0]$ için $\phi(x,u) = 0$,
2. Her $u \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $\phi(x,u) = 1$ olması için gerek yeter şart $x = 0$ olmasıdır,
3. Her $u \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ve $c \neq 0$ için $\phi(cx, u) = \phi\left(x, \frac{u}{|c|}\right)$ ,
4. $\phi(x+y, u+t) \geq \min\{\phi(x,u), \phi(y,t)\}$,
5. $\lim_{u \to \infty} \phi(x,u) = 1$ ve $\lim_{u \to 0} \phi(x,u) = 0$,

6. Her $u \in (-\infty, 0]$ için $\vartheta(x,u) = 1$,

7. Her $u \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $\vartheta(x,u) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır,

8. Her $u \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ve $c \neq 0$ için $\vartheta(cx,u) = \vartheta\left(x, \frac{u}{|c|}\right)$,

9. $\max\{\vartheta(x,t), \vartheta(y,s)\} \geq \vartheta(x+y, t+s)$,

10. $\lim\limits_{u\to\infty} \vartheta(x,u) = 0$ ve $\lim\limits_{u\to 0} \vartheta(x,u) = 1$

şartları sağlanıyorsa $(\phi, \vartheta)$ sıralı ikilisine sezgisel bulanık r norm ve $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ sıralı üçlüsüne sezgisel bulanık normlu uzay denir.

Tezimizin bundan sonraki kısmında "$(\mathbb{X}, \phi, \vartheta, *, \circ)$ sezgisel bulanık normlu uzay" ifadesi yerine okuyucu dostu olması ve anlamayı kolaylaştırması açısından "$\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayı" ifadesi kullanılacaktır.

**Tanım 2.27.** (Saadati ve Park, 2006) $\xi_0$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir eleman, $u > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun.

$$B(\xi_0, \varepsilon, u) = \{x \in \mathbb{X} : \phi(x - \xi_0, u) > 1 - \varepsilon, \vartheta(x - \xi_0, u) < \varepsilon\}$$

kümesi sezgisel bulanık normlu uzayda açık yuvar olarak tanımlanır.

**Örnek 2.28.** (Saadati ve Park, 2006) Her $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $\alpha * \beta = \alpha\beta$, $\alpha \circ \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ ve $\phi$ ve $\vartheta$ sırasıyla, her $u > 0$ için,

$$\phi(x,u) = \frac{u}{u + |x|} \text{ ve } \vartheta(x,u) = \frac{|x|}{u + |x|}$$

biçiminde tanımlanan $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ üzerinde bulanık kümeler olsun. O halde $(\mathbb{R}, \phi, \vartheta, *, \circ)$ sezgisel bulanık normlu uzaydır.

**Tanım 2.29.** (Saadati ve Park, 2006) $(\xi_n)$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için $n \geq n_0$ iken $\phi(\xi_n - \xi_0, u) > 1 - \varepsilon$ ve $\vartheta(\xi_n - \xi_0, u) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0 \in \mathbb{X}$ elemanına $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre Cauchy yakınsaktır denir ve $(\phi, \vartheta) - \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$ veya $\xi_n \xrightarrow{(\phi,\vartheta)} \xi_0$ şeklinde gösterilir.

### 2.2.2. Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık ve hibrit türleri farklı uzaylarda çalışılmıştır. Bunlardan bir tanesi de sezgisel bulanık normlu uzaylardır. Karakuş, vd. (2008) istatistiksel yakınsaklığı tanımladıkları çalışmalarında ayrıca istatistiksel yakınsaklık için etkili bir karakterizasyon sunmuşlardır. Tezimizin bu alt bölümünde söz konusu çalışmadaki bazı önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 2.30.** (Karakuş vd., 2008) $(\xi_n)$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$\varphi(\{n \in \mathbb{N} : \phi(\xi_n - \xi_0, u) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_n - \xi_0, u) \geq \varepsilon\}) = 0$$

sağlanıyorsa $(\xi_n)$ dizisi $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre $\xi_0$ elemanına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\phi,\vartheta} - \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$ veya $\xi_n \xrightarrow{st_{\phi,\vartheta}} \xi_0$ ile gösterilir.

**Önerme 2.31.** (Karakuş vd., 2008) $(\xi_n)$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için aşağıdaki durumlar birbirine denktir:

*i.* $st_{\phi,\vartheta} - \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$,

*ii.* $\varphi(\{n \in \mathbb{N} : \phi(\xi_n - \xi_0, u) \leq 1 - \varepsilon\}) = \varphi(\{n \in \mathbb{N} : \vartheta(\xi_n - \xi_0, u) \geq \varepsilon\}) = 0$,

*iii.* $\varphi(\{n \in \mathbb{N} : \phi(\xi_n - \xi_0, u) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(\xi_n - \xi_0, u) < \varepsilon\}) = 1$,

*iv.* $\varphi(\{n \in \mathbb{N} : \phi(\xi_n - \xi_0, u) > 1 - \varepsilon\}) = \varphi(\{n \in \mathbb{N} : \vartheta(\xi_n - \xi_0, u) < \varepsilon\}) = 1$,

*v.* $st - \lim\limits_{n\to\infty} \phi(\xi_n - \xi_0, u) = 1$ ve $st - \lim\limits_{n\to\infty} \vartheta(\xi_n - \xi_0, u) = 0$.

**Teorem 2.32.** (Karakuş vd., 2008) $(\xi_n)$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer $(\xi_n)$ dizisi $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir.

**Teorem 2.33.** (Karakuş vd., 2008) $(\xi_n)$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi olsun. Eğer $\xi_n \xrightarrow{(\phi,\vartheta)} \xi_0$ ise $\xi_n \xrightarrow{st_{\phi,\vartheta}} \xi_0$ dır.

**Örnek 2.34.** (Karakuş vd., 2008) Örnek 2.28'de bulunan $(\mathbb{R}, \phi, \vartheta, *, \circ)$ sezgisel bulanık normlu uzayını ele alınsın. $(\xi_n)$ dizisi

$$\xi_n := \begin{cases} 1, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ 0, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için

$$A(\varepsilon, u) = \{n \in \mathbb{N} : \phi(\xi_n, u) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_n, u) \geq \varepsilon\}$$

olsun.

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, u) &= \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{u}{u + |\xi_n|} \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \frac{|\xi_n|}{u + |\xi_n|} \geq \varepsilon\right\} \\ &= \left\{n \in \mathbb{N} : |\xi_n| \geq \frac{\varepsilon u}{1 - \varepsilon} > 0\right\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \xi_n = 1\} \\ &= \left\{n \in \mathbb{N} : n = k^2 \text{ ve } \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2\right\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{|A(\varepsilon, u)|}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

sağlanır. Dolayısıyla, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|A(\varepsilon,u)|}{n} = 0$ olduğundan $\xi_n \xrightarrow{st_{\phi,\vartheta}} 0$ elde edilir. Fakat, $(\xi_n)$ dizisi $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre Cauchy yakınsak değildir.

**Teorem 2.35.** (Karakuş vd., 2008) $(\xi_n)$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. $\xi_n \xrightarrow{st_{\phi,\vartheta}} \xi_0$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi(K) = 1$ ve $\xi_{n_k} \xrightarrow{(\phi,\vartheta)} \xi_0$ olacak biçimde doğal sayıların bir $K = \{n_k : k < t, n_k < n_t\}$ kümesi vardır.

### 2.2.3. Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Kaba İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel ve kaba yakınsaklığın bir genellemesi olan kaba istatistiksel yakınsaklık kavramı Antal, vd. (2021) tarafından sezgisel bulanık normlu uzaylarda tanımlanmıştır. Tezimizin bu kısmında Antal, vd. (2021) bu çalışmada bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

**Tanım 2.36.** (Antal vd., 2021) $(\xi_n)$, $(\mathbb{X},\phi,\vartheta)$ uzayında bir dizi, $\mathtt{r}\geq 0$ ve $\xi_0\in\mathbb{X}$ olsun. Eğer, $u>0$ ve $\varepsilon\in(0,1)$ için, $n\geq n_\varepsilon$ olmak üzere

$$\phi\left(\xi_n-\xi_0,\mathtt{r}+u\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\xi_n-\xi_0,\mathtt{r}+u\right)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ sayısı var ise $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ elemanına $(\phi,\vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre kaba yakınsaktır denir ve $\mathtt{r}_{(\phi,\vartheta)}-\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$ veya $\xi_n\xrightarrow{\mathtt{r}_{(\phi,\vartheta)}}\xi_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.36'de $\mathtt{r}=0$ alınırsa $(\phi,\vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre Cauchy yakınsaklık elde edilir. Ayrıca, $\xi=(\xi_n)$ dizisin kaba limit noktalarının kümesi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$LIM_\xi^{\mathtt{r}(\phi,\vartheta)}=\left\{\xi_0\in\mathbb{X}:\xi\xrightarrow{\mathtt{r}(\phi,\vartheta)}\xi_0\right\}$$

**Tanım 2.37.** (Antal vd., 2021) $(\xi_n)$, $(\mathbb{X},\phi,\vartheta)$ uzayında bir dizi, $\mathtt{r}\geq 0$ ve $\xi_0\in\mathbb{X}$ olsun. Eğer, $u>0$ ve $\varepsilon\in(0,1)$ için,

$$\varphi\left(\left\{n\in\mathbb{N}:\phi\left(\xi_n-\xi_0,\mathtt{r}+u\right)\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_n-\xi_0,\mathtt{r}+u\right)\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

oluyorsa $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ elemanına $(\phi,\vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre kaba istatistiksel yakınsaktır denir ve $\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}-\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$ veya $\xi_n\xrightarrow{\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}}\xi_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.37'de $\mathtt{r}=0$ alınırsa $(\phi,\vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre istatistiksel yakınsaklık elde edilir. $\xi=(\xi_n)$ dizisin kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$st_{(\phi,\vartheta)}-LIM_\xi^{\mathtt{r}}=\left\{\xi_0\in\mathbb{X}:\xi_n\xrightarrow{\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}}\xi_0\right\}$$

Sınırlı olmayan bir dizi kaba yakınsak değildir. Fakat sınırlı olmayan bir dizinin kaba istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımı ile limitlenebileceği Örnek 2.38 ile görülür.

**Örnek 2.38.** (Antal vd., 2021) $(\mathbb{R},\|\cdot\|)$ reel sayılar üzerinde adi normlu uzayını göstersin. $\phi$ ve $\vartheta$ kümeleri her $u > 0$ için $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ üzerinde

$$\phi(x,u) = \frac{u}{u + \|x\|} \text{ ve } \vartheta(x,u) = \frac{\|x\|}{u + \|x\|}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $(\mathbb{R}, \phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normlu uzaydır. $\xi = (\xi_n)$ dizisi

$$\xi_n := \begin{cases} (-1)^n, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ n, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde, her $\mathtt{r} \geq 0$ için $LIM_{\xi}^{\mathtt{r}(\phi,\vartheta)} = \emptyset$ ve

$$st_{(\phi,\vartheta)} - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = \begin{cases} \emptyset, & \mathtt{r} < 1 \\ [1-\mathtt{r}, \mathtt{r}-1], & \mathtt{r} \geq 1 \end{cases}$$

bulunur.

**Tanım 2.39.** (Antal vd., 2021) $(\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi olsun. Eğer, $\varepsilon \in (0,1)$ için,

$$\varphi\left(\{n \in \mathbb{N} : \phi\left(\xi_n, M\right) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_n, M\right) \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ reel sayısı var ise $(\xi_n)$ dizisine $(\phi, \vartheta)$ normuna göre istatistiksel sınırlıdır denir.

**Teorem 2.40.** (Antal vd., 2021) $\xi = (\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi olsun. $(\xi_n)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $st_{(\phi,\vartheta)} - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\mathtt{r} > 0$ sayısının var olmasıdır.

**Teorem 2.41.** (Antal vd., 2021) $(\xi_n)$ ve $(\eta_n)$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında birer dizi olsun. O halde, her $\mathtt{r} \geq 0$ için aşağıdaki durumlar sağlanır:

*i.* Eğer $\xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}} \xi_0$ ve $\alpha(\neq 0) \in \mathbb{N}$ ise $\alpha\xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}} \alpha\xi_0$ dır,

*ii.* Eğer $\xi_n \xrightarrow{\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}} \xi_0$ ve $\eta_n \xrightarrow{\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}} \eta_0$ ise $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{\mathtt{r}-st_{(\phi,\vartheta)}} \xi_0 + \eta_0$ dır.

**Örnek 2.42.** (Antal vd., 2021) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ reel sayılar üzerinde adi normlu uzayını göstersin. $\phi$ ve $\vartheta$ kümeleri her $u > 0$ için $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ üzerinde

$$\phi(x,u) = \frac{u}{u + \|x\|} \text{ ve } \vartheta(x,u) = \frac{\|x\|}{u + \|x\|}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $(\mathbb{R}, \phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normlu uzaydır. $\xi = (\xi_n)$ dizisi

$$\xi_n := \begin{cases} n, & \exists k \in \mathbb{N} \ni n = k^2 \\ 0, & \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde, $st_{(\phi,\vartheta)} - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = [-\mathtt{r}, \mathtt{r}]$ dir. Fakat $(n_k) = (1, 4, 9, \ldots)$ için $(\xi_{n_k})$ zayıf alt dizisinin kaba istatistiksel limit kümesi boş kümedir.

**Teorem 2.43.** (Antal vd., 2021) $\xi = (\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. Eğer, $\xi' = (\xi_{n_k})$ dizisi $(\xi_n)$ dizisinin zayıf olmayan bir alt dizisi ise $st_{(\phi,\vartheta)} - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \subseteq st_{(\phi,\vartheta)} - LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}}$ dir.

**Teorem 2.44.** (Antal vd., 2021) $\xi = (\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. O halde, $st_{(\phi,\vartheta)} - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi kapalı ve konvekstir.

**Teorem 2.45.** (Antal vd., 2021) $(\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. Eğer, $\xi_0 \in \mathbb{X}$ elemanına istatistiksel yakınsak ve her $\varepsilon \in (0,1)$ için $\phi(\xi_n - \eta_n, \mathtt{r}) > 1 - \varepsilon$ ve $\vartheta(\xi_n - \eta_n, \mathtt{r}) < \varepsilon$ olacak şekilde $\mathbb{X}$ de bir $(\eta_n)$ dizisi var ise $(\xi_n)$ dizisi $\xi_0$ elemanına kaba istatistiksel yakınsaktır.

**Teorem 2.46.** (Antal vd., 2021) $\xi = (\xi_n)$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. O halde, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $m > 2$ için $\phi(y - z, mr) \leq 1 - \varepsilon$ veya $\vartheta(y - z, mr) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $y, z \in st_{(\phi,\vartheta)} - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ yoktur.

### 2.3. Çift İndisli Diziler

Bu alt bölümde $\xi = (\xi_{jk})$ çift indisli dizisi için Pringsheim anlamda yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve bazı temel özelliklerinden bahsedilecektir.

**Tanım 2.47.** (Pringsheim, 1900) $\mathbb{X} \neq \emptyset$ olacak biçimde bir küme $f(j,k) := \xi_{jk}$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ fonksiyonuna $\mathbb{X}$ de bir çift indisli dizi denir ve $(\xi_{jk})$ ile gösterilir.

**Tanım 2.48.** (Pringsheim, 1900) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$j,k \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left\|\xi_{jk} - \xi_0\right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı var ise, $(\xi_{jk})$ dizisi $\xi_0$ elemanına Pringsheim anlamında yakınsaktır (veya yakınsaktır) denir.

**Tanım 2.49.** (Pringsheim, 1900) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$(j \geq p \geq n_\varepsilon) \wedge (k \geq q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \left\|\xi_{jk} - \xi_{pq}\right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $(\xi_{jk})$ dizisine Cauchy dizisi denir.

**Tanım 2.50.** (Mursaleen ve Edely, 2003) $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $j \leq p$, $k \leq q$ olacak şekilde ki $(j,k) \in E$ elemanlarının sayısı $E(p,q)$ olsun. Eğer $\left(\frac{E(p,q)}{pq}\right)$ dizisi Pringsheim anlamda bir limite sahip ise $E$ çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\varphi_2(E) := \lim_{p,q\to\infty} \frac{E(p,q)}{p,q}$$

biçimindedir.

**Örnek 2.51.** (Mursaleen ve Edely, 2003) $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\varphi_2(E) = \lim_{p,qn\to\infty} \frac{|\{(j,k) \in E : j \leq p \text{ ve } k \leq q\}|}{mn}$$

biçiminde tanımlanan $\varphi_2$ bir yoğunluk fonksiyonudur.

### 2.3.1. Çift İndisli Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu alt bölümde, bölüm 2.1.1 de tek indisli diziler için sunulan istatistiksel yakınsaklık kavramı çift indisli dizilier için sunulacaktır. Bu bölümde verilen tanım ve teoremler Mursaleen ve Edely (2003) ve Moricz (2003) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak sundukları çalışmalarından alınmıştır.

**Tanım 2.52.** (Mursaleen ve Edely, 2003) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi_2\left(\left\{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \left\|\xi_{jk} - \xi_0\right\| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

oluyor ise $(\xi_{jk})$ dizisi $\xi_0 \in \mathbb{X}$ elemanına istatistiksel olarak yakınsaktır denir ve $\xi_{jk} \xrightarrow{st_2} \xi_0$ ile gösterilir.

**Teorem 2.53.** (Mursaleen ve Edely, 2003) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $(\xi_{jk})$ dizisi yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.53'nin tersinin her zaman doğru olmadığı Örnek 2.54 ile görülür.

**Örnek 2.54.** (Mursaleen ve Edely, 2003)

$$\xi_{jk} = \begin{cases} jk, & \exists t,s \in \mathbb{N} \ni (j = t^2) \wedge (k = s^2) \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(\xi_{jk})$ dizisi 1 sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak yakınsak değildir.

**Teorem 2.55.** (Mursaleen ve Edely, 2003) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $(\xi_{jk})$ dizisi istatistiksel yakınsak ise limiti tektir.

**Teorem 2.56.** (Mursaleen ve Edely, 2003) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin $\xi_0 \in \mathbb{X}$ elemanına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\varphi_2(K) = 1$ ve $\lim\limits_{\substack{j,k\to\infty \\ (j,k)\in K}} \xi_{jk} = \xi_0$ olacak şekilde bir $K = \{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : j,k = 1,2,...\}$ kümesinin var olmasıdır.

### 2.3.2. Çift İndisli Dizilerin Kaba İstatiksel Yakınsaklığı

**Tanım 2.57.** (Malik ve Maity, 2013) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi,

$\xi_0 \in \mathbb{X}$ ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$j,k \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|\xi_{jk} - \xi_0\| < \mathtt{r} + \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $(\xi_{jk})$ dizisi $\xi_0$ elemanına kaba yakınsaktır denir ve $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}} \xi_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.57'de $\xi_0$ elemanına $(\xi_{jk})$ dizisinin kaba limit noktası denir. Tüm kaba limit noktalarının kümesi

$$LIM_\xi^{\mathtt{r}} = \left\{\xi_0 \in \mathbb{X} : \xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}} \xi_0\right\}$$

ile gösterilir. Buradaki $\mathtt{r}$ kabalık derecesi olarak adlandırılır ve $\mathtt{r} = 0$ olduğu durumda Pringsheim anlamda yakınsaklık elde edilir.

**Örnek 2.58.** (Malik ve Maity, 2013) $(\xi_{jk})$ dizisi

$$\xi_{jk} := \begin{cases} 1, & \exists n \in \mathbb{N} \ni j+k = 2n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $(\xi_{jk})$ dizisi yakınsak değildir, ancak kaba yakınsak bir dizidir ve

$$LIM_\xi^{\mathtt{r}} = \begin{cases} \emptyset, & \mathtt{r} < 0,5 \\ [1-\mathtt{r}, \mathtt{r}], & \mathtt{r} \geq 0,5 \end{cases}$$

biçimindedir.

**Teorem 2.59.** (Malik ve Maity, 2013) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin kaba limit noktalarının kümesinin çapı $2\mathtt{r}$ den büyük değildir.

**Teorem 2.60.** (Malik ve Maity, 2013) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $(\xi_{jk})$ dizisi sınırlı ise $LIM_\xi^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\mathtt{r} \geq 0$ sayısı vardır.

Tek indisli dizilerde dizinin sınırlılığı ile kaba yakınsaklığı denktir, ancak çift indisli dizilerde kaba yakınsaklığın sınırlılığı gerektirmediği Örnek 2.61'te verilmiştir.

**Örnek 2.61.** (Malik ve Maity, 2013) $\xi = (\xi_{jk})$ dizisi

$$\xi_{jk} := \begin{cases} k, & j = 1 \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $\mathtt{r} = 0$ için $LIM_{\xi}^{0} = \{2\} \neq \emptyset$ elde edilir, ancak $(\xi_{jk})$ dizisi sınırlı değildir.

**Teorem 2.62.** (Malik ve Maity, 2013) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\xi' = (\xi_{j_p k_q})$ dizisi $(\xi_{jk})$ dizisinin alt dizisi ise $LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \subseteq LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}}$ sağlanır.

**Teorem 2.63.** (Malik ve Maity, 2013) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin $LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi kapalı ve konveks bir kümedir.

**Teorem 2.64.** (Malik ve Maity, 2013) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi, $\mathtt{r}_1 \geq 0$ ve $\mathtt{r}_2 \geq 0$ olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin $\xi_0 \in \mathbb{X}$ elemanına $\mathtt{r}_1 + \mathtt{r}_2$ kaba yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\eta_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}_1} \xi_0$ ve $\|\xi_{jk} - \eta_{jk}\| \leq \mathtt{r}_2$ olacak şekilde bir $(\eta_{jk})$ dizisinin var olmasıdır.

**Tanım 2.65.** (Malik ve Maity, 2016) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi_2(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\xi_{jk} - \xi_0\| \geq \mathtt{r} + \varepsilon\}) = 0$$

oluyor ise $(\xi_{jk})$ dizisi $\xi_0 \in \mathbb{X}$ elemanına kaba istatistiksel yakınsaktır denir ve $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-st_2} \xi_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.65'da $\xi_0$ elemanına $\xi = (\xi_{jk})$ dizisinin kaba istatistiksel limit noktası denir. Tüm kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi

$$st_2 - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = \left\{ \xi_0 \in \mathbb{X} : \xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-st_2} \xi_0 \right\}$$

ile gösterilir.

**Örnek 2.66.** (Malik ve Maity, 2016)

$$\xi_{jk} := \begin{cases} jk, & \exists t,s \in \mathbb{N} \ni (j=t^2) \wedge (k=s^2) \\ (-1)^{j+k}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(\xi_{jk})$ dizisi kaba istatistiksel yakınsaktır ve

$$st_2 - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = \begin{cases} \emptyset, & \mathtt{r} < 1 \\ [1-\mathtt{r}, \mathtt{r}-1], & \mathtt{r} \geq 1 \end{cases}$$

biçimindedir.

**Teorem 2.67.** (Malik ve Maity, 2016) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin $\mathtt{r} - st_2$-limit noktaları kümesinin çapı $2\mathtt{r}$ den büyük değildir.

**Teorem 2.68.** (Malik ve Maity, 2016) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $(\xi_{jk})$ dizisi sınırlı ise $st_2 - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\mathtt{r} \geq 0$ sayısı vardır.

Teorem 2.68'nin tersinin her zaman doğru olmadğı Örnek 2.69 ile ifade edilir.

**Örnek 2.69.** (Malik ve Maity, 2016) $\xi = (\xi_{jk})$ dizisi

$$\xi_{jk} = \begin{cases} k, & j=2, \\ 5, & j \neq 2 \end{cases}$$

dizisi verilsin. $\mathtt{r} = 0$ için $st_2 - LIM_{\xi}^{0} \neq \emptyset$ bulunur, ancak $(\xi_{jk})$ dizisi sınırlı değildir.

**Teorem 2.70.** (Malik ve Maity, 2016) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $st_2 - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\mathtt{r} \geq 0$ sayısının var olmasıdır.

**Tanım 2.71.** (Malik ve Maity, 2016) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $(\xi_{j_p k_q})$ dizisi $(\xi_{jk})$ dizisinin alt dizisi olsun. Eğer $\varphi_2\left((j_p, k_q) : p, q \in \mathbb{N}\right) = 1$ sağlanıyor ise $(\xi_{j_p k_q})$ dizisine $(\xi_{jk})$ dizisinin yoğun alt dizisidir denir.

**Örnek 2.72.** (Malik ve Maity, 2016) $\xi = (\xi_{jk})$ dizisi

$$\xi_{jk} := \begin{cases} jk, & \exists t,s \in \mathbb{N} \ni (j = t^2) \wedge (k = s^2), \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $t,s \in \mathbb{N}$ için $j_t = t^2$ ve $k_s = s^2$ olmak üzere $\xi' = (\xi_{j_t k_s})$, $(\xi_{jk})$ dizisinin alt dizisidir ve $st_2 - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = [-\mathtt{r}, \mathtt{r}]$ elde edilir. Fakat $\mathtt{r} \geq 0$ için $st_2 - LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}} = \emptyset$ dir.

**Teorem 2.73.** (Malik ve Maity, 2016) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\xi' = (\xi_{j_p k_q})$ dizisi $(\xi_{jk})$ dizisinin yoğun bir alt dizisi ise $st_2 - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \subseteq st_2 - LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}}$ olur.

Teorem 2.73'in yoğun olmayan alt diziler için sağlanmadığı Örnek 2.72 ile ifade edilmiştir.

**Teorem 2.74.** (Malik ve Maity, 2016) $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin $st_2 - LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi kapalı ve konveks kümedir.

**Teorem 2.75.** (Malik ve Maity, 2016) $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} > 0$ olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin $\xi_0 \in \mathbb{X}$ elemanına kaba istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\eta_{jk} \xrightarrow{st_2} \xi_0$ ve $\|\xi_{jk} - \eta_{jk}\| \leq \mathtt{r}$ olacak şekilde bir $(\eta_{jk})$ dizisinin var olmasıdır.

### 2.3.3. Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Çift İndisli Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı

Sezgisel bulanık normlu uzaylarda çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları Mursaleen ve Mohiuddine (2009) tarafından tanımlanmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Tezimizin bu alt bölümünde söz konusu çalışmadaki temel tanım ve teoremler yer verilmiştir.

**Tanım 2.76.** (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009) $(\xi_{jk})$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için,

$$j,k \geq n_{\varepsilon} \Rightarrow \phi(\xi_{jk} - \xi_0, u) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(\xi_{jk} - \xi_0, u) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ elemanı varsa $(\xi_{jk})$ dizisi $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre $\xi_0$ elemanına yakınsaktır denir ve $(\phi, \vartheta) - \lim\limits_{j,k\to\infty} \xi_{jk} = \xi_0$ veya $\xi_{jk} \xrightarrow{(\phi,\vartheta)} \xi_0$ ile gösterilir.

**Tanım 2.77.** (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009) $(\xi_{jk})$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için,

$$\varphi_2(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \phi(\xi_{jk} - \xi_0, u) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_{jk} - \xi_0, u) \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyor ise $(\xi_{jk})$ dizisi $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre $\xi_0$ elemanına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_2^{(\phi,\vartheta)} - \lim\limits_{j,k\to\infty} \xi_{jk} = \xi_0$ ile gösterilir.

**Lemma 2.78.** (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009) $(\xi_{jk})$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. O halde her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $u > 0$ için aşağıdaki durumlar denktir,

*i.* $st_2^{(\phi,\vartheta)} - \lim\limits_{j,k\to\infty} \xi_{jk} = \xi_0$,

*ii.* $\varphi_2\left(\left\{(j,k) : \phi\left(\xi_{jk} - \xi_0, u\right) \leq 1 - \varepsilon\right\}\right) = \varphi_2\left(\left\{(j,k) : \vartheta\left(\xi_{jk} - \xi_0, u\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$,

*iii.* $\varphi_2\left(\left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \phi(\xi_{jk} - \xi_0, u) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(\xi_{jk} - \xi_0, u) < \varepsilon\right\}\right) = 1$,

*iv.* $\varphi_2\left(\left\{(j,k) : \phi\left(\xi_{jk} - \xi_0, u\right) > 1 - \varepsilon\right\}\right) = \varphi_2\left(\left\{(j,k) : \vartheta\left(\xi_{jk} - \xi_0, u\right) < \varepsilon\right\}\right) = 1$,

*v.* $st_2 - \lim\limits_{j,k\to\infty} \phi\left(\xi_{jk} - \xi_0, u\right) = 1$ ve $st_2 - \lim\limits_{j,k\to\infty} \vartheta\left(\xi_{jk} - \xi_0, u\right) = 0$.

**Teorem 2.79.** (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009) $(\xi_{jk})$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0 \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer $(\xi_{jk})$ dizisi $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre istatistiksel yakınsak ise bu durumda $(\xi_{jk})$ dizisinin istatistiksel limiti tektir.

**Teorem 2.80.** (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009) $(\xi_{jk})$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi olsun. Eğer $(\phi,\vartheta)-\lim\limits_{j,k\to\infty}\xi_{jk}=\xi_0$ ise $st_2^{(\phi,\vartheta)}-\lim\limits_{j,k\to\infty}\xi_{jk}=\xi_0$ dır.

**Örnek 2.81.** (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009) Örnek 2.28'de bulunan $(\mathbb{R},\phi,\vartheta,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu uzayını ele alınsın.

$$\xi_{jk}:=\begin{cases} jk, & \exists t,s\in\mathbb{N}\ni(j=t^2)\wedge(k=s^2), \\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dizisi verilsin. Her $\varepsilon\in(0,1)$ ve $u>0$ için

$$A_{m,n}(\varepsilon,u)=\left\{j\le m,k\le n:\phi\left(\xi_{jk},u\right)\le 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_{jk},u\right)\ge\varepsilon\right\}$$

olsun.

$$\begin{aligned} A_{m,n}(\varepsilon,u)&=\left\{j\le m,k\le n:\frac{u}{u+|\xi_{jk}|}\le 1-\varepsilon \text{ veya } \frac{|\xi_{jk}|}{u+|\xi_{jk}|}\ge\varepsilon\right\}\\ &=\left\{j\le m,k\le n:|\xi_{jk}|\ge\frac{\varepsilon u}{1-\varepsilon}>0\right\}\\ &=\left\{j\le m,k\le n:\xi_{jk}=\sqrt{jk}\right\}=\{j\le m,k\le n:\text{ j ve k tam kare sayı }\}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{|A_{m,n}(\varepsilon,u)|}{mn}=\frac{|\{j\le m,k\le n:\text{ j ve k tam kare sayı }\}|}{mn}\le\frac{\sqrt{mn}}{mn}$$

Yani $\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{|A_{m,n}(\varepsilon,u)|}{mn}=0$. Bu durumda $st_2^{(\phi,\vartheta)}-\lim\limits_{j,k\to\infty}\xi_{jk}=0$ elde edilir. Fakat, açıktır ki $(\xi_{jk})$ dizisi yakınsak değildir.

**Teorem 2.82.** (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009) $(\xi_{jk})$, $\mathbb{X}_{\vartheta}^{\phi}$ uzayında bir dizi ve $\xi_0\in\mathbb{X}$ olsun. $st_2^{(\phi,\vartheta)}-\lim\limits_{j,k\to\infty}\xi_{jk}=\xi_0$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi_2(K)=1$ ve $(\phi,\vartheta)-\lim\limits_{j_p,k_q\in K}\eta_{j_pk_q}$=$\xi_0$ olacak biçimde bir $K=\{(j_p,k_q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:j_p,k_q=1,2,\ldots\}$ kümesinin var olmasıdır.

# ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

# ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

## 3.1. Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Çift İndisli Dizilerin Kaba Yakınsaklığı

Kaba yakınsaklık kavramı giriş bölümünde de belirttiğimiz gibi farklı hibrit versiyonları ile günümüzde dizi uzayları ve toplanabilme konuları üzerine çalışan araştırmacıların yoğun ilgisi ile çalışılmaya devam etmektedir. Farklı uzaylardaki kaba yakınsaklık çalışmaları da tezimizin motivasyon kaynağını oluşturmuştur. Günümüz koşullarında belirsizliğin hayatımızda ki her aşamada yer alması belirsizliği modelleyen matematiksel araçların önemini arttırmıştır. Sezgisel bulanık normlu uzaylar da bunlardan en önemlilerinden birisidir. Bu sebeple söz konusu uzaylarda çift dizilerin kaba yakınsaklığı kavramı literatüre bu tez çalışmamız ile çok önemli bir değer katmıştır. Tezimizin özgün sonuçlarını ele aldığımız bu son bölümde, çift indisli dizilerin kaba istatistiksel yakınsaklığı, kaba istatistiksel limit noktaları kümesinin kapalılık ve sınırlılık ve konvekslik gibi bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

**Tanım 3.1.** $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi, $\xi_0 \in \mathbb{X}$ ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve her $u > 0$ için

$$j,k \geq n_\varepsilon \Rightarrow \phi(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r} + u) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r} + u) < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $(\xi_{jk})$ dizisi $\xi_0$ elemanına $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre kaba yakınsaktır denir. $\mathtt{r}_{(\phi,\vartheta)} - \lim \xi_{jk} = \xi_0$ veya $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}_{(\phi,\vartheta)}} \xi_0$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $\xi_0$ elemanına $(\xi_{jk})$ dizisinin $\mathtt{r}_{(\phi,\vartheta)}-$ limit noktası denir.

Tanım 3.1 de $\mathtt{r} = 0$ olarak alınırsa $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre Cauchy anlamında yakınsaklık kavramı elde edilir.

$\xi = (\xi_{jk})$ dizisinin kaba limit noktası tek olmayabilir. Böylece $(\xi_{jk})$ dizisinin kaba limit noktalarının kümesi

$${}^{\phi}_{\vartheta}LIM^{\mathtt{r}}_{\xi} := \left\{ \xi_0 \in \mathbb{X} : \xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}_{(\phi,\vartheta)}} \xi_0 \right\}$$

ile gösterilir. Buradaki $\mathtt{r}$ kabalık derecesi olarak adlandırılır.

### 3.2. Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Çift İndisli Dizilerin Kaba İstatistiksel Yakınsaklığı

**Tanım 3.2.** $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi, $\xi_0 \in \mathbb{X}$ ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ ve her $u > 0$ için

$$\varphi_2(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \phi(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r} + u) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r} + u) \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir $\xi_0$ elemanı varsa $(\xi_{jk})$ dizisi $\xi_0$ elemanına $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre kaba istatistiksel yakınsaktır denir. $\mathtt{r} -_{\vartheta}^{\phi} st_2 - \lim\limits_{j,k\to\infty} \xi_{jk} = \xi_0$ veya $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \xi_0$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $\xi_0$ elemanına $(\xi_{jk})$ dizisinin $\mathtt{r} -_{\vartheta}^{\phi} st_2-$limit noktası denir.

Tanım 3.2 de $\mathtt{r} = 0$ olarak alınırsa $(\phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normuna göre istatistiksel yakınsaklık kavramı elde edilir.

$(\xi_{jk})$ dizisinin kaba istatistiksel limit noktası tek olmayabilir. Böylece $(\xi_{jk})$ dizisinin $\mathtt{r} -_{\vartheta}^{\phi} st_2-$limit noktalarının kümesi

$$st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} := \left\{ \xi_0 \in \mathbb{X} : \xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \xi_0 \right\}$$

ile gösterilir.

**Örnek 3.3.** $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ reel sayılar üzerinde adi normlu uzayını göstersin. $\phi$ ve $\vartheta$ kümeleri her $u > 0$ için $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ üzerinde

$$\phi(x,u) = \frac{u}{u + \|x\|} \text{ ve } \vartheta(x,u) = \frac{\|x\|}{u + \|x\|}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $(\mathbb{R}, \phi, \vartheta)$ sezgisel bulanık normlu uzaydır. $\xi = (\xi_{jk})$ dizisi

$$\xi_{jk} := \begin{cases} jk, & \text{j ve k tam kare sayı değil ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde, her $\mathtt{r} \geq 0$ için

$$st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = \begin{cases} \emptyset, & r < 1 \\ [1-\mathtt{r}, \mathtt{r}-1], & r \geq 1 \end{cases}$$

ve $LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} = \emptyset$ olur.

**Tanım 3.4.** $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon \in (0,1)$ için

$$\varphi_2(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \phi(\xi_{jk}, M) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_{jk}, M) \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde $M > 0$ reel sayısı var ise $(\xi_{jk})$ dizisine istatistiksel sınırlıdır denir.

**Teorem 3.5.** $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi olsun. $\xi' = (\xi_{j_p k_q})$ dizisi $\xi$ dizisinin yoğun alt dizisi ise

$$st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \subseteq st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi'}^{\mathtt{r}}$$

dır.

**Teorem 3.6.** $\xi = (\xi_{jk})$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun. $(\xi_{jk})$ dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi_{jk}}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olacak şekilde $\mathtt{r} \geq 0$ var olmasıdır.

KANIT. $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta, *, \circ)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $(\xi_{jk})$ bu uzayda istatistiksel sınırlı bir dizi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi_2(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \phi(\xi_{jk}, M) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_{jk}, M) \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde $M > 0$ reel sayısı vardır. Kabul edelim ki

$$K = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \phi(\xi_{jk}, M) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_{jk}, M) \geq \varepsilon\}$$

olsun. Böylece $(j,k) \in K^c$ için $\phi(\xi_{jk}, M) > 1 - \varepsilon$ ve $\vartheta(\xi_{jk}, M) < \varepsilon$ olur. Ayrıca,

$$\phi(\xi_{jk}, \mathtt{r} + M) \geq \min\{\phi(0, \mathtt{r}), \phi(\xi_{jk}, M)\} = \min\{1, \phi(\xi_{jk}, M)\} > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\vartheta(\xi_{jk}, \mathtt{r}+M) \leq \max\{\vartheta(0,\mathtt{r}), \vartheta(\xi_{jk}, M)\} = \max\{0, \vartheta(\xi_{jk}, M)\} < \varepsilon$$

dır. Böylece $0 \in st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ elde edilir. Sonuç olarak $st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$.
Tersine, her $\mathtt{r} \geq 0$ için $st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ olsun. O halde $st_2 -_{\vartheta}^{\phi} LIM_{\xi}^{\mathtt{r}} \neq \emptyset$ kümesinin $\xi_0 \in \mathbb{X}$ gibi en az bir tane elemanı vardır. Böylece her $u > 0$ ve her $\varepsilon \in (0,1)$ için

$$\varphi_2(\{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \phi(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r}+u) \leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r}+u) \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Bu nedenle, hemen hemen her $\xi_{jk}$, merkezi $\xi_0$ olan bir küre içinde yer alır ve bu da $(\xi_{jk})$ dizisinin istatistiksel olarak sınırlı olduğu anlamına gelir. □

**Teorem 3.7.** $(\xi_{jk})$ ve $(\eta_{jk})$, $(\mathbb{X}, \phi, \vartheta)$ uzayında iki dizi ve $\xi_0, \eta_0 \in \mathbb{X}$ olsun. O halde her $\mathtt{r} \geq 0$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

*i.* Eğer $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \xi_0$ ve $\alpha(\neq 0) \in \mathbb{R}$ ise $\alpha\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \alpha\xi_0$ dır.

*ii.* Eğer $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \xi_0$ ve $\eta_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \eta_0$ ise $\xi_{jk}+\eta_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \xi_0+\eta_0$ dır.

KANIT. Kabul edelim ki $(\xi_{jk})$ ve $(\eta_{jk})$ sezgisel bulanık normlu uzayında iki dizi ve $\mathtt{r} \geq 0$ olsun.

*i.* $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi} st_2} \xi_0$ ve $\alpha(\neq 0) \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $u > 0$ ve her $\varepsilon \in (0,1)$ için

$$K = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \phi\left(\xi_{jk} - \xi_0, \frac{\mathtt{r}+u}{|\alpha|}\right) \leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_{jk} - \xi_0, \frac{\mathtt{r}+u}{|\alpha|}\right) \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi için $\varphi_2(K) = 0$ olur. $(t,s) \in K^c$ olsun. O halde

$$\phi\left(\xi_{ts} - \xi_0, \frac{\mathtt{r}+u}{|\alpha|}\right) > 1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\xi_{ts} - \xi_0, \frac{\mathtt{r}+u}{|\alpha|}\right) < \varepsilon$$

dır. Böylece,

$$\phi(\alpha\xi_{ts} - \alpha\xi_0, \mathtt{r}+u) = \phi\left(\xi_{ts} - \xi_0, \frac{\mathtt{r}+u}{|\alpha|}\right) > 1-\varepsilon \tag{3.1}$$

ve

$$\vartheta(\alpha\xi_{ts}-\alpha\xi_0,\mathtt{r}+u)=\vartheta\left(\xi_{ts}-\xi_0,\frac{\mathtt{r}+u}{|\alpha|}\right)<\varepsilon \tag{3.2}$$

elde edilir. Kabul edelim ki

$$H=\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi(\alpha\xi_{jk}-\alpha\xi_0,\mathtt{r}+u)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta(\alpha\xi_{jk}-\alpha\xi_0,\mathtt{r}+u)<\varepsilon\}$$

olsun. Denklem (3.1) ve Denklem (3.2) den $(t,s)\in H$ dır. Dolayısıyla $K^c\subseteq H$ olur. Sonuç olarak $\alpha\xi_{jk}\xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi}st_2}\alpha\xi_0$.

*ii.* $\xi_{jk}\xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi}st_2}\xi_0$ ve $\eta_{jk}\xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi}st_2}\eta_0$ olsun. Eğer, her $u>0$ ve $\varepsilon\in(0,1)$ için

$$A=\left\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi\left(\xi_{jk}-\xi_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_{jk}-\xi_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)\geq\varepsilon\right\}$$

ve

$$B=\left\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi(\eta_{jk}-\eta_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2})\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta(\eta_{jk}-\eta_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2})\geq\varepsilon\right\}$$

kümeleri için $\varphi_2(A)=0$ ve $\varphi_2(B)=0$ olur. $(t,s)\in A^c\cap B^c$ olsun. O halde

$$\phi\left(\xi_{ts}-\xi_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\xi_{ts}-\xi_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)<\varepsilon$$

ve

$$\phi\left(\eta_{ts}-\eta_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\eta_{ts}-\eta_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)<\varepsilon$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}\phi(\xi_{ts}+\eta_{ts}-(\eta_0+\xi_0),\mathtt{r}+u)&\geq\min\left\{\phi\left(\xi_{ts}-\xi_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right),\phi\left(\eta_{ts}-\eta_0,\mathtt{r}+\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)\right\}\\&>1-\varepsilon\end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{aligned}\vartheta(\xi_{ts}+\eta_{ts}-(\eta_0+\xi_0),\mathtt{r}+u)&\geq\max\left\{\vartheta\left(\xi_{ts}-\xi_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right),\vartheta\left(\eta_{ts}-\eta_0,\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)\right\}\\&<\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Kabul edelim ki

$$C=\left\{(j,k):\phi\left(\xi_{jk}+\eta_{jk}-(\xi_0+\eta_0),\mathtt{r}+u\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\xi_{jk}+\eta_{jk}-(\xi_0+\eta_0),\mathtt{r}+u\right)<\varepsilon\right\}$$

olsun. Denklem (3.3) ve Denklem (3.4) den $(t,s)\in C$ dir. Dolayısıyla $A^c\cap B^c\subseteq C$ olur. Sonuç olarak

$$\xi_{jk}+\eta_{jk}\xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi}st_2}\xi_0+\eta_0$$

elde edilir.

$\square$

**Teorem 3.8.** $\xi=(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X},\phi,\vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r}\geq 0$ olsun. O halde $st_2-_{\vartheta}^{\phi}LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ kümesi kapalı bir kümedir.

KANIT. Kabul edelim ki $(\xi_{jk})$ sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi ve $\mathtt{r}\geq 0$ olsun. Eğer $st_2-_{\vartheta}^{\phi}LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}=\emptyset$ ise teorem geçerlidir. Kabul edelim ki her $\mathtt{r}\geq 0$ için $st_2-_{\vartheta}^{\phi}LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}\neq\emptyset$ ve $\eta_0\in\overline{st_2-_{\vartheta}^{\phi}LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}}$ olsun. O halde $\eta_{jk}\xrightarrow{(\phi,\vartheta)}\eta_0$ olacak şekilde $\eta_{jk}\in st_2-_{\vartheta}^{\phi}LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ vardır. Bu durumda her $u>0$ ve her $\varepsilon\in(0,1)$ için en az bir $k_1\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\phi\left(\eta_{jk}-\eta_0,\frac{u}{2}\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\eta_{jk}-\eta_0,\frac{u}{2}\right)<\varepsilon, \text{ her } j,k\geq k_1$$

dır. $m,n>k_1$ için $\eta_{mn}\in st_2-_{\vartheta}^{\phi}LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ dir. Yani

$$\varphi_2\left((j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi\left(\xi_{jk}-\eta_{mn},\mathtt{r}+\frac{u}{2}\right)\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_{jk}-\eta_{mn},\mathtt{r}+\frac{u}{2}\right)\geq\varepsilon\right)=0$$

dır. $(t,s)\in A=\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi\left(\xi_{jk}-\eta_{mn},\mathtt{r}+\frac{u}{2}\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\xi_{jk}-\eta_{mn},\mathtt{r}+\frac{u}{2}\right)<\varepsilon\}$ olsun. O halde

$$\phi(\xi_{ts}-\eta_0,\mathtt{r}+u)\geq\min\left\{\phi\left(\xi_{jk}-\eta_{mn},\mathtt{r}+\frac{u}{2}\right),\phi\left(\eta_{mn}-\eta_0,\frac{u}{2}\right)\right\}>1-\varepsilon \tag{3.5}$$

ve

$$\vartheta(\xi_{ts}-\eta_0,\mathtt{r}+u)\leq \max\left\{\phi\left(\xi_{jk}-\eta_{mn},\mathtt{r}+\frac{u}{2}\right),\phi\left(\eta_{mn}-\eta_0,\frac{u}{2}\right)\right\}<\varepsilon \tag{3.6}$$

elde edilir. Kabul edelim ki

$$B=\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi\left(\xi_{jk}-\eta_0,\mathtt{r}+u\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(\xi_{jk}-\eta_0,\mathtt{r}+u\right)<\varepsilon\}$$

olsun. Denklem (3.5) ve Denklem (3.6) dan $(t,s)\in B$ elde edilir. Bu durumda $A\subseteq B$ olur. Yani $\varphi_2(A)\leq\varphi_2(B)$ dır. Sonuç olarak $\eta_0\in st_2-^{\phi}_{\vartheta} LIM^{\mathtt{r}}_{\xi}$. □

**Teorem 3.9.** $\xi=(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X},\phi,\vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r}\geq 0$ olsun. O halde $st_2-^{\phi}_{\vartheta} LIM^{\mathtt{r}}_{\xi}$ kümesi konvekstir.

KANIT. $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X},\phi,\vartheta,*,\circ)$ uzayında bir dizi, $\mathtt{r}\geq 0$ ve $\xi_1,\xi_2\in st_2-^{\phi}_{\vartheta} LIM^{\mathtt{r}}_{\xi}$ olsun. $st_2-^{\phi}_{\vartheta} LIM^{\mathtt{r}}_{\xi}$ kümesinin konveks olduğunu göstermek için her $\lambda\in(0,1)$, $[(1-\lambda)\xi_1+\lambda\xi_2]\in st_2-^{\phi}_{\vartheta} LIM^{\mathtt{r}}_{\xi}$ olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki her $u>0$ ve $\varepsilon\in(0,1)$ için

$$M_1=\left\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi\left(\xi_{jk}-\xi_1,\frac{\mathtt{r}+u}{2(1-\lambda)}\right)\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_{jk}-\xi_1,\frac{\mathtt{r}+u}{2(1-\lambda)}\right)\geq\varepsilon\right\}$$

ve

$$M_2=\left\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi\left(\xi_{jk}-\xi_2,\frac{\mathtt{r}+u}{2\lambda}\right)\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(\xi_{jk}-\xi_2,\frac{\mathtt{r}+u}{2\lambda}\right)\geq\varepsilon\right\}$$

olsun. O halde kabulümüzden $\varphi_2(M_1)=0$ ve $\varphi_2(M_2)=0$ dır. $(j,k)\in M_1^c\cap M_2^c$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}\phi(\xi_{jk}-[(1-\lambda)\xi_1+\lambda\xi_2],\mathtt{r}+u)&=\phi((1-\lambda)(\xi_{jk}-\xi_1)+\lambda(\xi_{jk}-\xi_2),\mathtt{r}+u)\\&\geq\min\left\{\phi\left((1-\lambda)(\xi_{jk}-\xi_1),\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right),\phi\left(\lambda(\xi_{jk}-\xi_2),\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)\right\}\\&=\min\left\{\phi\left(\xi_{jk}-\xi_1,\frac{\mathtt{r}+u}{2(1-\lambda)}\right),\phi\left(\xi_{jk}-\xi_2,\frac{\mathtt{r}+u}{2\lambda}\right)\right\}\\&>1-\varepsilon,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\vartheta(\xi_{jk}-[(1-\lambda)\xi_1+\lambda\xi_2],\mathtt{r}+u) &= \vartheta((1-\lambda)(\xi_{jk}-\xi_1)+\lambda(\xi_{jk}-\xi_2),\mathtt{r}+u)\\ &\leq \max\left\{\vartheta\left((1-\lambda)(\xi_{jk}-\xi_1),\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right),\vartheta\left(\lambda(\xi_{jk}-\xi_2),\frac{\mathtt{r}+u}{2}\right)\right\}\\ &= \max\left\{\vartheta\left(\xi_{jk}-\xi_1,\frac{\mathtt{r}+u}{2(1-\lambda)}\right),\vartheta\left(\xi_{jk}-\xi_2,\frac{\mathtt{r}+u}{2\lambda}\right)\right\}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$A=\left\{(j,k):\phi(\xi_{jk}-[(1-\lambda)\xi_1+\lambda\xi_2],\mathtt{r}+u)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta(\xi_{jk}-[(1-\lambda)\xi_1+\lambda\xi_2],\mathtt{r}+u)<1-\varepsilon\right\}$$

olmak üzere $M_1^c\cap M_2^c\subseteq A$ elde edilir. Bu durumda $\varphi_2(A^c)\leq\varphi_2(M_1\cup M_2)$ dir. Sonuç olarak $\varphi_2(A^c)=0$ olduğundan $st_2-_{\vartheta}^{\phi}LIM_{\xi}^{\mathtt{r}}$ konveks bir kümedir. □

**Teorem 3.10.** $\xi=(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X},\phi,\vartheta)$ uzayında bir dizi ve $\mathtt{r}\geq 0$ olsun. Eğer $st_2^{(\phi,\vartheta)}-\lim\eta_{jk}=\xi_0$ olacak şekilde $(\eta_{jk})$, $\mathbb{X}$ de bir dizi ve her $\varepsilon\in(0,1)$ ve $j,k\in\mathbb{N}$ için $\phi(\xi_{jk}-\eta_{jk},\mathtt{r})>1-\varepsilon$ ve $\vartheta(\xi_{jk}-\eta_{jk},\mathtt{r})<\varepsilon$ oluyorsa $\xi_{jk}\xrightarrow{\mathtt{r}-_{\vartheta}^{\phi}st_2}\xi_0$ dır.

KANIT. $(\xi_{jk})$, $(\mathbb{X},\phi,\vartheta)$ uzayında bir dizi , $\mathtt{r}\geq 0$, $u>0$, her $\varepsilon\in(0,1)$ ve $j,k\in\mathbb{N}$ için $\eta_{jk}\xrightarrow{st_2^{(\phi,\vartheta)}}\xi_0$ ve $\phi(\xi_{jk}-\eta_{jk},\mathtt{r})>1-\varepsilon$, $\vartheta(\xi_{jk}-\eta_{jk},\mathtt{r})<\varepsilon$ olacak şekilde $(\eta_{jk})$, $\mathbb{X}$ de bir dizi olsun. Her $\varepsilon\in(0,1)$ için

$$A=\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\phi(\eta_{jk}-\xi_0,u)\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta(\eta_{jk}-\xi_0,u)\geq\varepsilon\}$$

olsun. O halde $\varphi_2(A)=0$ dır. $(j,k)\in A^c$ için

$$\phi(\xi_{jk}-\xi_0,\mathtt{r}+u)\geq\min\{\phi(\xi_{jk}-\eta_{jk},\mathtt{r}),\phi(\eta_{jk}-\xi_0,u)\}>1-\varepsilon$$

ve

$$\vartheta(\xi_{jk}-\xi_0,\mathtt{r}+u)\leq\max\{\vartheta(\xi_{jk}-\eta_{jk},\mathtt{r}),\vartheta(\eta_{jk}-\xi_0,u)\}<\varepsilon$$

olur. Bu durumda her $(j,k)\in A^c$ için

$$\phi(\xi_{jk}-\xi_0,\mathtt{r}+u)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta(\xi_{jk}-\xi_0,\mathtt{r}+u)<\varepsilon$$

dır. Yani

$$A^c \subseteq B = \left\{ (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \phi(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r} + u) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(\xi_{jk} - \xi_0, \mathtt{r} + u) < \varepsilon \right\}$$

dır. O halde $B^c \subseteq A$ olur. Bu durumda

$$\varphi_2(B^c) \leq \varphi_2(A)$$

elde edilir. Böylece $\varphi_2(B^c) = 0$ olur. Sonuç olarak $\xi_{jk} \xrightarrow{\mathtt{r}-{}^{\phi}_{\vartheta} st_2} \xi_0$ dır.

$\square$

# DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
# SONUÇ VE ÖNERİLER

Günlük hayatta karşılaştığımız belirsizlik durumlarını modelleyebilmenin önemli araçlarından biri olan sezgisel bulanık normlu uzaylar ve bu uzaylardaki yakınsaklık çeşitleri tezimizin motivasyon kaynağını oluşturmuştur. Bu doğrultuda çalışmamızın ilk bölümünde tek indisli diziler için istatistiksel ve kaba yakınsaklık kavramları verilmiştir. Sezgisel bulanık normlu uzaylarda çift indisli dizilerin kaba yakınsaklık ve kaba istatistiksel yakınsaklık kavramlarını ve temel özelliklerini ifade ettiğimiz bu çalışmada ayrıca kaba istatistiksel limit noktaları kümesi ve bu kümenin kapalılık, sınırlılık ve konvekslik gibi özellikleri incelenmiştir. Kaba istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiye yer verilmiştir.

Çalışmamız neticesinde elde edilen sonuçlar farklı dizi uzaylarında ele alınarak araştırmacılara ışık tutacaktır.

## KAYNAKLAR


Antal, R. Chawla, M. and Kumar, V. (2021). "Rough statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed spaces". *Filomat*, 35(13), 4405–4416.

Atanassov, K. T. (1986). "Intuitionistic fuzzy sets". *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87–96.

Atanassov, K. T. (1989). "More on intuitionistic fuzzy sets". *Fuzzy Sets and Systems*, 33(1), 37–45.

Aytar, S. (2008). "Rough statistical convergence". *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29(3-4), 291–303.

Bag, T. and Samanta, S. K. (2005). "Fuzzy bounded linear operators". *Fuzzy Sets and Systems*, 151(3), 513-547.

Buck, R. (1953). "Generalized asymptotic density". *American Journal of Mathematics*, 75(2), 335–346.

Cheng, S. C. and Mordeson, J. N. (1992). Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces*. October 14-18, California. 193–197.

Fast, H. (1951). "Sur la convergence statistique". *Colloquium Mathematicae*, 2, 241–244.

Freedman, A. R. and Sember, J. J. (1981). "Densities and Summability". *Pacific Journal of Mathematics*, 95, 293–305.

Fridy, J. A. (1985). "On statistical convergence". *Analysis*, 5(4), 301–314

Hardy, G. (1917). "On the convergence of certain multiple series". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19(3), 86–95.

Karakuş S., Demirci, K. and Duman, O. (2008). "Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces". *Chaos, Solitons & Fractals*, 35(4), 763–769.

Lael, F. and Nourouzi, K.(2008). "Some results on the IF-normed spaces". *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(3), 931-939.

Malik, P. and Maity, M. (2013). "On rough convergence of double sequence in normed linear spaces". *Bulletin of Theallahabad Mathematical Society*, 28(1), 89–99.

Malik, P. and Maity, M. (2016). "On rough statistical convergence of double sequence in normed linear spaces". *Afrika Matematika*, 27(1-2), 141–148.

Moricz, F. and Rhoades, B. E. (2003). "Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 104(2), 283–294.

Moricz, F. (1991). "Extensions of the spaces $c$ and $c_0$ from single to double sequence". *Acta*

*Mathematica Hungarica*, 57, 129–136.

Moricz, F. (2003). "Statistical convergence of multiple sequences". *Archiv der Mathematik*, 81, 82–89.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H. (2003). "Statistical convergence of double sequences". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 223–231.

Mursaleen, M. and Mohiuddine, S. A. (2009). "Statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces.". *PChaos, Solitons & Fractals*, 41(5), 2414-2421.

Özcan, A., Karabacak, G., Bulut, S. and Or, A. (2023). "Statistical convergence of double seqeunces in intuitionistic fuzzy metric spaces". *Journal of New Theory*, 22(3), 233–246. https://doi.org/10.53570/jnt.1230368

Özcan, A., Karabacak, G. and Or, A. (2023). *$\lambda$-statistical Convergence in Intiutionistic Fuzzy Metric Spaces*. Academic Researches in Mathematics and Science. Özgür Publications. https://doi.org/10.58830/ozgur.pub132.c615

Özcan, A.and Or, A. (2022). "Rough statistical convergence of double seqeunces in intuitionistic fuzzy normed spaces". *Journal of New Results in Science*, 43, 1-10. https://doi.org/10.54187/jnrs.1198582

Park, J. H. (2004). "Intuitionistic fuzzy metric spaces". *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(5), 1039–1046.

Phu, H. X. (2001). "Rough convergence in normed linear spaces". *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 22(1-2), 199–222.

Phu, H. X. (2003). "Rough convergence in infinite dimensional normed linear spaces". *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 24(3-4), 285–301.

Pringsheim, A. (1900). "Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen.". *Mathematische Annalen*, 53(3), 289-321.

Saadati, R. and Park, J. H. (2006). "On the intuitionistic fuzzy topological spaces". *Pacific Journal of Mathematics*, 27(2), 331-344.

Schoenberg, J. (1959). "The integrability of certain functions and related summability methods.". *The American Mathematical Monthly*, 66(5), 361–775.

Schweizer, B. and Sklar, A. (1960). "Statistical metric spaces". *Pacific Journal of Mathematics*, 10(1), 313-334.

Steinhaus, H. (1951). "Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique". *Colloquium Mathematicae*, 2, 73–74.

Zadeh, L. A. (1965). "Fuzzy sets". *Information and control*,8(3), 338–353.

Zygmund, A. (1951). *Trigonometricheskii ryady*. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat.