T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

AYŞE ENGİN

Tez Danışmanı
PROF. DR. NEŞET AYDIN

ÇANAKKALE – 2023

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

AYŞE ENGİN

Tez Danışmanı
PROF. DR. NEŞET AYDIN

ÇANAKKALE – 2023

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Ayşe ENGİN tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve **25/08/2023** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Genelleştirilmiş Türevli Halkalar Üzerine**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Prof. Dr. Neşet AYDIN	…………………………….
Prof. Dr. Ali ERDOĞAN	…………………………….
Doç. Dr. Çağrı DEMİR	…………………………….
Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL	……………………………
Dr. Öğr. Üyesi Selin TÜRKMEN	……………………………

Tez No : 10217936

Tez Savunma Tarihi : 25/08/2023

Prof. Dr. Ahmet Evren ERGİNAL

Enstitü Müdürü

../../2023

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları’na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Ayşe ENGİN
25/08/2023

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Neşet AYDIN'a, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen Dr. Öğr. Üyesi Selin TÜRKMEN'e, Öğr. Gör. Dr. Didem K. CAMCI'a, Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL'e, hayatımın her evresinde bana destek olan canım annem Fetiye AYRAN'a, canım babam Halil AYRAN'a, tüm zorlukları benimle birlikte göğüsleyen canım eşim Mehmet Ali ENGİN'e ve biricik oğlum İrfan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım."

Ayşe ENGİN
Çanakkale, Ağustos 2023

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR ÜZERİNE

Ayşe ENGİN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN
25/08/2023, 79

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk iki bölümü giriş ve ön bilgileri içermektedir. Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, bir halkanın tek yanlı genelleştirilmiş (α, β)-ters türev kavramı verilmiştir. R bir yarıasal halka, ϱ, R halkasının sıfır idealinden farklı ideali, α, β, R halkasının homomorfizmaları, $\alpha(\varrho) = \varrho$ (veya $\beta(\varrho) = \varrho$) ve $0 \neq \gamma: \varrho \rightarrow R$ bir (α, β)-ters türev olsun. R halkasının γ ile belirli $\varkappa: \varrho \rightarrow R$ l-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi (r- genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi) vardır ancak ve ancak $\varkappa$ dönüşümü $\varkappa(\varrho), \gamma(\varrho) \subset C_R(\varrho)$ koşulunu sağlayan ϱ ideali üzerinde (β, α)-türev olan γ ile belirli r-genelleştirilmiş (β, α)-türevdir (l-genelleştirilmiş (β, α)-türevdir). İkinci bölümde, homo-türev içeren özdeşlikler yardımıyla asal halkaların homo-türevlerinin formu karakterize edilmiştir. Son bölümde ise yarıasal halkaların Jordan homo-türevlerinin homo-türev olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asal Halka, Yarıasal Halka, (α, β)-Ters Türev, Tek Yanlı Genelleştirilmiş (α, β)-Ters Türev, Homo-Türev, Jordan Homo-Türev

ABSTRACT

ON RİNGS WİTH GENERALİZED DERİVATİONS

Ayşe ENGİN
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Doctoral Dissertation in Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Neşet AYDIN
25/08/2023, 79

The first two chapters of this study, which consist of four chapters, include an introduction and preliminary information. This thesis consists of three main parts. In the first part, we introduce the notion of the one-sided generalized (α, β)-reverse derivation of a ring R. Let R be a semiprime ring, ϱ be a non-zero ideal of R, α, β be an homomorphisms of R, and $\alpha(\varrho) = \varrho$ (or $\beta(\varrho) = \varrho$) and $0 \neq \gamma: \varrho \to R$ be an (α, β)-reverse derivation. We show that there exists $\varkappa: \varrho \to R$, a left generalized (α, β)-reverse derivation (a right generalized (α, β)-reverse derivation) associated with γ iff $\varkappa(\varrho), \gamma(\varrho) \subset C_R(\varrho)$ and $\varkappa$ is a right generalized (β, α)-derivation (a left generalized (β, α)-derivation) associated with (β, α)-derivation γ on ϱ. In the second part, the form of homoderivations of prime rings was characterized with the help of identities containing homoderivations of prime rings. In the third part, it is shown that Jordan homoderivations of semiprime rings are homoderivations.

Keywords: Prime Ring, Semiprime Ring, (α, β)-Reverse Derivation, One Sided Generalized (α, β)-Reverse Derivation, Homoderivation, Jordan Homoderivation

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\emptyset$	Boş Küme
$\in$	Eleman
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit değildir
Z_R	R halkasının merkezi
$C_R(\quad)$	R halkasının merkezileştiricisi
$\mathrm{char}(R)$	R halkasının karakteristiği
(0)	Sıfır ideali
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\subset$	Kapsanır
$\subseteq$	Kapsanır veya Eşit
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Kümesi
$\times$	Kartezyen Çarpım
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve Ancak
$(\quad ,\ +)$	Grup Yapısı
$(\quad ,\ +\ ,\ .)$	Halka Yapısı
$\sum$	Toplam Sembolü
Λ	İndis Kümesi
id	Birim Dönüşüm
$\nsubseteq$	Kapsanmaz ve Eşit Değil
$h_{\mid Z_R}$	Z_R kısıtlanışı

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Halkada türev kavramından ilk olarak Posner (Posner, 1957) ilgili çalışmada bahsetmiştir. Posner (Posner, 1957) bu çalışmada asal halkaların türev içeren cebirsel özdeşlikleri yardımıyla halkanın değişmeli olup olmadığı problemine bir çözüm bulmuştur.

Değişmeli olmayan asal halkalarda ters türev kavramını içeren ilk çalışma Herstein (Herstein,1957) tarafından 1957 yılında yapılmıştır. Bahsi geçen çalışmada, yazar asal halkaların ters türevleri ile asal halkaların türevleri arasındaki ilişkiyi incelemiş olup, karakteristiği 2 den farklı asal halkaların ters türevlerinin aslında bir türev olduğunu ispatlamıştır. Herstein'ın bu çalışmasından motive olarak günümüze kadar yapılan araştırmalara bakıldığında, asal (yarıasal) halkaların üzerinde tanımlı ters türev yerine (α, β)-ters türev, genelleştirilmiş ters türev ve genelleştirilmiş (α, β)-türev gibi daha genel dönüşümlere yer verilerek aynı problemin incelendiği görülmüştür. 2007 yılında, M. Samman ve N. Alyamani (Samman ve Alyamani, 2007) ise Herstein ın probleminin yarıasal halkada bir çözüm olup olmadığını araştırmışlardır ve değişmeli olmayan yarıasal halkaların ters türevlerinin de bir türev olduğunu göstermişlerdir. 2015 yılında, A. Aboubakr ve S. Gonzalez (Aboubakr ve Gonzalez, 2015) genelleştirilmiş ters türev kavramını sağ genelleştirilmiş ters türev ve sol genelleştirilmiş ters türev olarak literatüre kazandırmışlardır. Yazarlar ilgili çalışmada Herstein ın probleminin hem küme hem de fonksiyon bazında daha genel bir formda çözümünün olup olmadığını araştırmışlardır ve bir yarıasal halkanın sıfırdan farklı ideali üzerinde tanımlı tek yanlı genelleştirilmiş ters türevi varsa bu tek yanlı genelleştirilmiş ters türevin tek yanlı genelleştirilmiş türev olduğunu göstermişlerdir. 2018 de M. Özdemir ve N. Aydın (Özdemir ve Aydın, 2018) bir yarıasal halkada α halkanın otomorfizması ve β halkanın epimorfizması olmak üzere halkanın bir (α, β)-ters türevi var ise bu (α, β)-ters türevin (β, α)-türev olduğunu göstermişlerdir. Yine aynı çalışmada yazarlar, bir asal halkada α halkanın homomorfizması ve β halkanın epimorfizması olması durumunda, halkanın bir (α, β)-ters türevi ile belirli genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi varsa bu genelleştirilmiş (α, β)-ters türevin (β, α)-türev ile belirli genelleştirilmiş (β, α)-türev olduğunu ispatlamışlardır.

Halkada homo-türev kavramı ilk olarak 2000 yılında El-Sofy Aly (El-Sofy, 2000) tarafından yüksek lisans tezinde verilmiştir. Bu tanım halka homomorfizması ve halkada türev kavramlarından esinlenilerek oluşturulmuştur. Yazar ilgili çalışmada, belli bir homo-türev içeren özdeşlik sağlayan asal ve yarıasal halkaların yapısal özelliklerini veren sonuçları literatüre kazandırmıştır.

Halkada Jordan homo-türev tanımı N. Ur Rehman ve H. M. Alnoghashi (Rehman ve Alnoghashi, 2022) tarafından 2022 yılında verilmiştir. Bu tanım Jordan homomorfizma ve Jordan türev kavramlarının bir kombinasyonudur.

Bu tez çalışmasının amacı yukarıda bahsedilen literatürde var olan bazı sonuçları mümkün olduğunca ileri düzeyde bir genelliğe ulaştırmaktır. Tez çalışması, altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş ve ikinci bölüm ön bilgiler kısmından meydana gelmektedir. Üçüncü bölümünde literatürde var olan genelleştirilmiş (α, β)-ters türev kavramı, sağ genelleştirilmiş (α, β)-ters türev ve sol genelleştirilmiş (α, β)-ters türev olmak üzere daha genel bir form kazandırılarak yeniden tanımlanmıştır. Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Herstein'ın ele aldığı problem bir yarıasal halkanın ideali üzerinde tanımlanmış (α, β)-ters türev (burada α veya β dönüşümünden en az birinin epimorfizma olması yeterli) kullanılarak incelenmiştir. Bu bağlamda, bir yarıasal halkanın sıfır idealinden farklı bir ideali üzerinde tanımlı (α, β)-ters türevin (β, α)-türev olduğu gösterilmiştir. İkinci kısımda ise tek yanlı genelleştirilmiş (α, β)-ters türev ile tek yanlı (α, β)-türev arasındaki ilişki araştırılmıştır. Bunun sonucunda, bir halka üzerinde tanımlı tek yanlı genelleştirilmiş (α, β)-ters türevlerin kümesi ile bir halka üzerinde tanımlanmış tek yanlı genelleştirilmiş (α, β)-türevlerin kümesinin kesişiminin boş kümeden farklı olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümünde, halkada türev kavramıyla ilgili literatürde var olan bazı sonuçlardan ilham alınarak asal halkaların homo-türevlerinin yapısı ve homo-türev içeren asal halkaların yapısı karakterize edilmiştir. Beşinci bölümünde Jordan homo-türev ile homo-türev kavramları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Altıncı bölüm ise çalışmanın sonuç kısmından oluşmaktadır.

İKİNCİ BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, okuyucuya yardımcı olmak amacıyla tez çalışmasında kullanılan temel tanım, lemma ve teoremlerden oluşmaktadır.

$\emptyset \neq R$ bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlı ikili işlemlerden biri "+" (toplama), diğerini de "$.$" (çarpma) işlemi olarak düşünülmektedir. $(R,+)$ ikilisi R kümesinin toplama işlemi ile birlikte bir grup olduğunu belirtmektedir. $(R,+,.)$ üçlüsü ise R kümesinin toplama ve çarpma ile birlikte bir halka olduğunu belirtmektedir. İşlemin önemli olmadığı durumlarda $(R,+,.)$ üçlüsü yerine R gösterilmektedir.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R bir halkadır.

Teorem 2.1(Hungerford, 2012) Herhangi bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamaz.

Tanım 2.2

$$Z_R = \{r_1 \in R | r_1 r_2 = r_2 r_1, \forall r_2 \in R\}$$

şeklinde tanımlanan küme halkanın **merkezi** olarak adlandırılır. $\emptyset \neq A \subseteq R$ olmak üzere,

$$C_R(A) = \{r_1 \in R | r_1 a_1 = a_1 r_1, \forall a_1 \in A\}$$

şeklinde tanımlanan küme A kümesinin **merkezleştiricisi** olarak adlandırılır. Özel olarak, $A = R$ olması durumunda $Z_R = C_R(A)$ dır.

Tanım 2.3 Her $r_1 \in R$ için $nr_1 = 0$ $(\underbrace{r_1 + r_1 + \cdots + r_1}_{n-defa} = 0)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa bu tür n tamsayılarının en küçüğüne halkanın karakteristiği denir ve $char(R) = n$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 $r_1 \in R$ ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere $nr_1 = 0$ $(\underbrace{r_1 + r_1 + \cdots + r_1}_{n-defa} = 0)$ iken $r_1 = 0$ oluyorsa R halkasına $\boldsymbol{n}$**-burulmasız** halka denir.

Tanım 2.5 $J: R \to R$ toplamsal dönüşüm olsun. Her $r_1 \in R$ için,

$$J(r_1^2) = J(r_1)^2$$

koşulunu sağlayan J toplamsal dönüşümüne R halkasının **Jordan homomorfizması** denir.

Yardımcı Özellik 2.6 R_1 bir halka ve R_2, 2-burulmasız bir halka olsun. $J: R_1 \to R_2$ Jordan homomorfizması aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $J(r_1r_2 + r_2r_1) = J(r_1)J(r_2) + J(r_2)J(r_1)$
ii. $J(r_1r_2r_1) = J(r_1)J(r_2)J(r_1)$
iii. $J(r_1r_2r_3 + r_3r_2r_1) = J(r_1)J(r_2)J(r_3) + J(r_3)J(r_2)J(r_1)$

Örnek 2.7 $id_R: R \to R, id_R(x) = x$ şeklinde tanımlanan birim dönüşüm R halkasının bir Jordan homomorfizmasıdır.

Tanım 2.8 R_1 ve R_2 iki halka olsun. $f: R_1 \to R_2$ toplamsal dönüşümü her $r_1, r_2 \in R_1$ için

$$f(r_1r_2) = f(r_1)f(r_2)\ (f(r_1r_2) = f(r_2)f(r_1))$$

koşulunu sağlıyor ise f dönüşümüne bir halka homomorfizması (halka ters-homomorfizması) denir. Eğer, f halka homomorfizması

i. örten dönüşüm ise **halka epimorfizması**
ii. bire-bir dönüşüm ise **halka monomorfizması**
iii. hem örten hem bire-bir dönüşüm ise **halka izomorfizması**

olarak adlandırılır.

Tanım 2.9 $(R \neq)P_1, P_2, P_3$ bu halkanın idealleri olsun. Bu durumda,

$P_2P_3 \subseteq P_1$ iken $P_2 \subseteq P_1$ veya $P_3 \subseteq P_1$

koşulunu sağlayan P_1 idealine R halkasının **asal ideali** denir.

Tanım 2.10 Sıfır ideali asal ideal olan halkaya **asal halka** denir.

Yardımcı Özellik 2.11 (Brešar, 2014: Lemma 2.17) Aşağıdakiler birbirine denktir:

i. $r_1, r_2 \in R$ için $r_1 R r_2 = (0)$ ise $r_1 = 0$ veya $r_2 = 0$ dır.
ii. I ve J sol idealleri için, $IJ = \{\sum_{sonlu} x_i y_i \,|x_i \in I, y_i \in J\} = (0)$ ise $I = (0)$ veya $J = (0)$ dır.
iii. I ve J sağ idealleri için, $IJ = \{\sum_{sonlu} x_i y_i \,|x_i \in I, y_i \in J\} = (0)$ ise $I = (0)$ veya $J = (0)$ dır.
iv. I ve J idealleri için, $IJ = \{\sum_{sonlu} x_i y_i \,|x_i \in I, y_i \in J\} = (0)$ ise $I = (0)$ veya $J = (0)$ dır.

Örnek 2.12 $(\mathbb{R}, +, .)$ reel sayılar halkası bir asal halkadır.

Örnek 2.13 (Brešar, 2014: Example 2.31) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $n \geq 2$ için bileşenleri $\mathbb{Z}$ olan $n \times n$ tipindeki matrisler halkası olan $M_n(\mathbb{Z})$ matrisler halkası bir asal halkadır.

Tanım 2.14 M, R nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $m_1, m_2 \in M$ için $m_1 r_1 m_2 \in M$ olacak şekilde $r_1 \in R$ varsa M kümesine bir $\boldsymbol{m}$**-sistem** denir.

Tanım 2.15 I, R halkasının bir ideali olsun. I nın **asal radikali** aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\beta(I) = \{r_1 \in R | Her\ m - sistem\ M\ için\ r_1 \in M \Rightarrow M \cap I \neq \emptyset\}$$

Tanım 2.16

$$\beta(0) = \{r_1 \in R | Her\ m - sistem\ M\ için\ r_1 \in M \Rightarrow 0 \in M\}$$

şeklinde yazılan bu kümeye R halkasının asal radikali denir. $\beta(0)$ asal radikali $\beta(R)$ ile gösterilir. Bir başka deyişle, R halkasının sıfır idealin asal radikaline R halkasının asal radikali olarak adlandırılır. Bu tanıma ek olarak, R halkasının tüm asal ideallerinin kesişimi olan yarıasal ideale de R halkasının asal radikali denir.

Tanım 2.17 $(R \neq)$ P_1, P_2 bu halkanın idealleri olsun. Bu durumda,

$P_2^2 \subseteq P_1$ iken $P_2 \subseteq P_1$

koşulunu sağlayan P_1 idealine R halkasının **yarıasal ideali** denir.

Tanım 2.18 Sıfır ideali yarıasal ideal olan halkaya **yarıasal halka** denir. Bu tanıma ek olarak, asal radikali sıfır olan halkaya da **yarıasal halka** denir.

Yardımcı Özellik 2.19 (Brešar, 2014: Lemma 2.21) Aşağıdakiler birbirine denktir:

i. $r_1 \in R$ için $r_1 R r_1 = (0)$ ise $r_1 = 0$ veya $r_1 = 0$ dır.
ii. I sol ideali için, $I^2 = \{\sum_{sonlu} x_i y_i \mid x_i, y_i \in I\} = (0)$ ise $I = (0)$ dır.
iii. I sağ ideali için, $I^2 = \{\sum_{sonlu} x_i y_i \mid x_i, y_i \in I\} = (0)$ ise $I = (0)$ dır.
iv. I ideali için, $I^2 = \{\sum_{sonlu} x_i y_i \mid x_i, y_i \in I\} = (0)$ ise $I = (0)$ dır.

Örnek 2.20 (Brešar, 2014: Example 2.32) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[r_1, r_2]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların halkası $C[r_1, r_2]$ bir yarıasal halkadır.

Uyarı 2.21 Her asal halka aynı zamanda bir yarıasal halkadır fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.22 (Brešar, 2014: Example 2.32) R_1 ve R_2 sıfır halkasından farklı yarıasal halkalar olmak üzere $R_1 \times R_2$ bir yarıasal halkadır fakat asal halka değildir. Çünkü, $R_1 \times R_2$ halkasının sıfır idealinden farklı $R_1 \times (0)$ ve $(0) \times R_2$ idealleri vardır.

Uyarı 2.23 R bir yarıasal halka olmak üzere, yarıasal halka tanımından $\beta(R) = (0)$ dır. Λ indis kümesi için $\{P_i | i \in \Lambda\}$ ailesinin her bir üyesi, R halkasının asal idealleri olsun. Bir halkanın asal radikali o halkanın tüm asal ideallerinin kesişimi olan yarıasal ideal olduğundan, bu durumda $\bigcap_{i\in\Lambda} P_i = (0)$ dır. Yani, bir yarıasal halka kesişimleri sıfır olacak biçimde keyfi asal ideallerinin kümesini içerir.

Tanım 2.24 $(Å, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere

$$\begin{array}{cccc} [,] & : & Å \times Å & \rightarrow & Å \\ & & (\wp_1, \wp_2) & & [\wp_1, \wp_2] \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm her $\wp_1, \wp_2, \wp_3 \in Å$ için

- $[\wp_1, \wp_1] = 0$
- $[\wp_1, \wp_2 + \wp_3] = [\wp_1, \wp_2] + [\wp_1, \wp_3]$ ve $[\wp_1 + \wp_2, \wp_3] = [\wp_1, \wp_3] + [\wp_2, \wp_3]$
- $[\wp_1, [\wp_2, \wp_3]] + [\wp_2, [\wp_3, \wp_1]] + [\wp_3, [\wp_1, \wp_2]] = 0$

koşullarını sağlayan ikili işleme Lie komütatör denir ve $(Å, +, [,])$ cebirsel yapısına Lie halka denir.

Örnek 2.25

$$\begin{array}{cccc} [,] & : & R \times R & \rightarrow & R \\ & & (\wp_1, \wp_2) & & [\wp_1, \wp_2] = \wp_1\wp_2 - \wp_2\wp_1 \end{array}$$

şeklinde tanımlanan işlem bir Lie komütatördür ve $(R, +, [,])$ üçlüsü bir Lie halkadır.

Her $\wp_1, \wp_2, \wp_3 \in R$ için **Lie komütatörün sağladığı özellikler**:

$\boldsymbol{L_1}$) $[\wp_1 + \wp_2, \wp_3] = [\wp_1, \wp_3] + [\wp_2, \wp_3]$

$\boldsymbol{L_2}$) $[\wp_1, \wp_2 + \wp_3] = [\wp_1, \wp_2] + [\wp_1, \wp_3]$

$\boldsymbol{L_3}$) $[\wp_1\wp_2, \wp_3] = \wp_1[\wp_2, \wp_3] + [\wp_1, \wp_3]\wp_2$

$\boldsymbol{L_4}$) $[\wp_1, \wp_2\wp_3] = [\wp_1, \wp_2]\wp_3 + \wp_2[\wp_1, \wp_3]$

$\boldsymbol{L_5}$) $[\wp_1, [\wp_2, \wp_3]] + [\wp_2, [\wp_3, \wp_1]] + [\wp_3, [\wp_1, \wp_2]] = 0$

Tanım 2.26 $\emptyset \neq L, R$ halkasının toplamsal alt grubu olmak üzere

$$[L, R] = \{\sum_{sonlu}[x_i, r_i] \,|\, x_i \in L, r_i \in R\} \subset L$$

koşulunu sağlayan L toplamsal alt grubuna R halkasının Lie ideali denir.

Örnek 2.27 R_1, R_2 sıfırdan farklı sıfır böleni olmayan, birimli ve değişmeli olmayan halkalar olmak üzere Char$R_1 \neq 2$ ve Char$R_2 \neq 2$ olsun. Z_{R_1}, R_1 halkasının merkezi olmak üzere $L = Z_{R_1} \times R_2$, $R_1 \times R_2$ halkasının toplamsal alt grubudur. Keyfi $(z, s_1) \in L, (r, s_2) \in R_1 \times R_2$ için

$$[(z, s_1), (r_1, s_2)] = (zr - rz, s_1 s_2 - s_2 s_1) \underbrace{=}_{z \in Z_{R_1}} (0_{R_1}, s_1 s_2 - s_2 s_1) \in L$$

eşitlikleri sağlandığından $L, R_1 \times R_2$ halkasının bir Lie idealidir.

Tanım 2.28 Her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$d(r_1 + r_2) = d(r_1) + d(r_2)$$

$$d(r_1 r_2) = d(r_1) r_2 + r_1 d(r_2)$$

koşulunu sağlayan $d: R \rightarrow R$ dönüşümü R halkasının bir **türevi** olarak adlandırılır.

Örnek 2.29 $a \in R$ olsun. $I_a: R \rightarrow R, I_a(x) = [a, x]$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir türevdir. Bu dönüşüm R halkasının a ile belirli iç türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.30 α, β, R halkasının birer dönüşümleri olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$d_{\alpha,\beta}(r_1 r_2) = d_{\alpha,\beta}(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1) d_{\alpha,\beta}(r_2)$$

koşulunu sağlayan $d_{\alpha,\beta}: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının **($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$)-türevi** denir.

Örnek 2.31 (Garg ve Sharma,2016) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere, $R = \{a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} | a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{Z}\}$ kümesi 3×3 tipindeki matrislerin halkası olan $M_3(\mathbb{Z})$ halkasının bir alt halkasıdır. $\alpha = \beta: R \to R, \alpha(a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}) = \beta(a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}) = -a_{12}e_{12} - a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}$ şeklinde tanımlanan dönüşümler R halkasının otomorfizmalarıdır. $d_{\alpha,\beta}: R \to R, d_{\alpha,\beta}(a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}) = a_{12}e_{12} + a_{23}e_{23}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm R halkasının (α, β)-türevidir.

Uyarı 2.32 Tanım 2.30 de $\alpha = \beta = id_R$ olarak seçilirse $d_{\alpha,\beta}, R$ halkasının bir türevidir. O halde, her türev bir (α, β)-türevdir fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.33 $a \in R$ olsun. $I_{a_{\alpha,\beta}}: R \to R,\ I_{a_{\alpha,\beta}}(x) = a\alpha(x) - \beta(x)a$ şeklinde tanımlanan dönüşüm R halkasının (α, β)-türevdir fakat türevi değildir. Özel olarak, bu dönüşüm R halkasının a ile belirli (α, β)-iç türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.34 Her $r_1, r_2 \in R$ için,

i. $F(r_1r_2) = F(r_1)r_2 + r_1d(r_2)$
ii. $F(r_1r_2) = d(r_1)r_2 + r_1F(r_2)$

(i) koşulunu sağlayan R halkasının bir d türevi varsa $F: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının d türevi ile belirli bir **sol genelleştirilmiş türevi**,

(ii) koşulunu sağlayan R nin bir d türevi varsa $F: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının d türevi ile belirli bir **sağ genelleştirilmiş türevi**,

(i), (ii) koşullarını sağlayan R nin bir d türevi varsa $F: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının d türevi ile belirli bir **genelleştirilmiş türevi** denir.

Örnek 2.35 (Ashraf ve Heitinger, 2006: Example 3.4.1) S keyfi bir halka ve $R = \{a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} | a_{11}, a_{12} \in S\}$ kümesi 2×2 tipindeki matrislerin halkası olan $M_2(S)$ halkasının bir alt halkasıdır. $d: R \to R, d(a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12}) = e_{11}(a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12}) - (a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12})e_{11}$, $F: R \to R, F(a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12}) = 2e_{11}(a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12}) -$

$(a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12})e_{11}$ şeklinde tanımlansın. F toplamsal dönüşümü R halkasının d türevi ile belirli bir sol genelleştirilmiş türevdir.

Tanım 2.36 α, β, R halkasının birer dönüşümleri olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

i. $F_{\alpha,\beta}(r_1 r_2) = F_{\alpha,\beta}(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)d_{\alpha,\beta}(r_2)$
ii. $F_{\alpha,\beta}(r_1 r_2) = d_{\alpha,\beta}(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)F_{\alpha,\beta}(r_2)$

(i) koşulunu sağlayan R halkasının bir $d_{\alpha,\beta}$ (α,β)-türevi varsa $F_{\alpha,\beta}: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının $d_{\alpha,\beta}$ (α,β)-türevi ile belirli bir **sol genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-türevi**,

(ii) koşulunu sağlayan R halkasının bir $d_{\alpha,\beta}$ (α,β)-türevi varsa $F_{\alpha,\beta}: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının $d_{\alpha,\beta}$ (α,β)-türevi ile belirli bir **sağ genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-türevi**,

(i), (ii) koşullarını sağlayan R halkasının bir $d_{\alpha,\beta}$ (α,β)-türevi varsa $F_{\alpha,\beta}: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının $d_{\alpha,\beta}$ (α,β)-türevi ile belirli bir **genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-türevi** denir.

Uyarı 2.37 Tanım 2.36 de $\alpha = \beta = id_R$ olarak seçilirse $F_{\alpha,\beta}$, R halkasının $d_{\alpha,\beta}$ türevi ile belirli (sol,sağ) genelleştirilmiş türevidir. O halde, her genelleştirilmiş türev genelleştirilmiş (α,β)-türevdir fakat tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.38 $\delta: R \to R$ toplamsal dönüşüm olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$\delta(r_1 r_2) = \delta(r_2)r_1 + r_2\delta(r_1)$$

koşulunu sağlayan δ toplamsal dönüşümü R halkasının **ters türevi** olarak adlandırılır.

Örnek 2.39 (Aboubakr ve Gonzalez, 2015: Example 1) S bir halka ve $R = \{a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} | a_{12}, a_{13}, a_{23} \in S\}$ kümesi 3×3 tipindeki matrislerin halkası olan $M_3(S)$ halkasının bir alt halkasıdır. $\gamma: R \to R,\ \gamma(a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}) = (a_{12} - a_{23})e_{13}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm R halkasının ters türevidir.

Tanım 2.40 α, β, R halkası üzerinde tanımlanmış dönüşümler olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$\gamma(r_1 r_2) = \gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1)$$

koşulunu sağlıyor ise $\gamma: R \to R$ toplamsal dönüşümü R halkasının $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$**-ters türevi** olarak adlandırılır.

Örnek 2.41 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \{r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22} | r_{11}, r_{12}, r_{22} \in \mathbb{Z}\}$ kümesi 2×2 tipindeki matrislerin halkası olan $M_2(\mathbb{Z})$ halkasının bir alt halkasıdır. $\alpha, \beta, \gamma_{\alpha,\beta}: R \to R$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\alpha(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{11}e_{22}$$

$$\beta(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{22}e_{11}$$

$$\gamma_{\alpha,\beta}(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = (r_{11} - r_{22})e_{12}$$

Toplamsal $\gamma_{\alpha,\beta}$ dönüşümü R halkasının (α, β)-ters türevidir.

Tanım 2.42 (Aboubakr ve Gonzalez, 2015: 200) Her $r_1, r_2 \in R$ için,

i. $\varphi(r_1 r_2) = \delta(r_2)r_1 + r_2\varphi(r_1)$
ii. $\varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_2)r_1 + r_2\delta(r_1)$

(i) koşulunu sağlayan R halkasının bir δ ters türevi varsa $\varphi: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının δ ters türevi ile belirli bir **sağ genelleştirilmiş ters türevi**,

(ii) koşulunu sağlayan R halkasının bir δ ters türevi varsa φ toplamsal dönüşümüne R halkasının δ ters türevi ile belirli bir **sol genelleştirilmiş ters türevi**,

(i), (ii) koşullarını sağlayan R halkasının bir δ ters türevi varsa φ toplamsal dönüşümüne R halkasının δ ters türevi ile belirli bir **genelleştirilmiş ters türevi** denir.

Örnek 2.43 (Aboubakr ve Gonzalez, 2015: 201) $\mathbb{R}$ reel sayılar halkası olmak üzere, $R = \{r_{12}e_{12} + r_{13}e_{13} + r_{14}e_{14} + r_{24}e_{24} + r_{34}e_{34} | r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{24}, r_{34} \in \mathbb{R}\}$ kümesi 4×4 tipindeki matrislerin halkası olan $M_4(\mathbb{R})$ halkasının bir alt halkasıdır. $F: R \to R, F(r_{12}e_{12} +$

$r_{13}e_{13} + r_{14}e_{14} + r_{24}e_{24} + r_{34}e_{34}) = (r_{13} + r_{34})e_{14} + r_{34}e_{34}$ ve $d: R \to R, d(r_{12}e_{12} + r_{13}e_{13} + r_{14}e_{14} + r_{24}e_{24} + r_{34}e_{34}) = (r_{13} - r_{24})e_{24}$ dönüşümleri tanımlansın. O halde, F, R halkasının d ters türevi ile belirli sol genelleştirilmiş ters türevdir.

Örnek 2.44 (Aboubakr ve Gonzalez, 2015: 201) $\mathbb{R}$ reel sayılar halkası olmak üzere, $R = \{r_{12}e_{12} + r_{13}e_{13} + r_{14}e_{14} + r_{24}e_{24} + r_{34}e_{34} | r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{24}, r_{34} \in \mathbb{R}\}$ kümesi 4×4 tipindeki matrislerin halkası olan $M_4(\mathbb{R})$ halkasının bir alt halkasıdır. $F: R \to R, F(r_{12}e_{12} + r_{13}e_{13} + r_{14}e_{14} + r_{24}e_{24} + r_{34}e_{34}) = r_{13}e_{13}$ ve $d: R \to R, d(r_{12}e_{12} + r_{13}e_{13} + r_{14}e_{14} + r_{24}e_{24} + r_{34}e_{34}) = (r_{13} - r_{24})e_{14}$ dönüşümleri tanımlansın. O halde, F, R halkasının d ters türevi ile belirli sağ genelleştirilmiş ters türevdir.

Tanım 2.45 $\alpha,\ \beta,\ R$ halkası üzerinde tanımlanmış dönüşümler olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$\mathcal{F}(r_1r_2) = \gamma_{\alpha,\beta}(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\mathcal{F}(r_1)$$

koşulunu sağlayan R halkasının $\gamma_{\alpha,\beta}$ (α,β)-ters türevi varsa $\mathcal{F}: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının **sağ genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-ters türevi** ($r$-genelleştirilmiş (α,β)-ters türev)

$$\mathcal{F}(r_1r_2) = \mathcal{F}(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma_{\alpha,\beta}(r_1)$$

koşulunu sağlayan R halkasının $\gamma_{\alpha,\beta}$ (α,β)-ters türevi varsa $\mathcal{F}: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının **sol genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-ters türevi** ($l$-genelleştirilmiş (α,β)-ters türev) denir. $\mathcal{F}: R \to R$ toplamsal dönüşümü R halkasının hem **sağ genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-ters türevi** aynı zamanda **sol genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-ters türevi** ise R halkasının **genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-ters türevi** olarak adlandırılır.

Örnek 2. 46 $\mathfrak{R}_1$ değişmeli bir halka, $\mathfrak{R}_2$ değişmeli olmayan bir halka ve $\mathfrak{R}_2$ halkasının opposite halkası olan $\mathfrak{R}_2^{op}$ olsun. $\alpha, \beta: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2$ halka homomorfizmaları, $\gamma: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2^{op}$ (β,α)-türevi ve $\varphi: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2^{op}$ γ (β,α)-türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (β,α)-türev olsun. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1$ ve $\tilde{\gamma}, \tilde{\varphi}: \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2^{op} \times \mathfrak{R}_1$dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\tilde{\alpha}(r_1, r_2) = (\alpha(r_1), r_2)$$

$$\tilde{\beta}(r_1, r_2) = (\beta(r_1), r_2)$$

$$\tilde{\gamma}(r_1, r_2) = (\gamma(r_1), r_2)$$

$$\tilde{\varphi}(r_1, r_2) = (\varphi(r_1), r_2)$$

$\tilde{\varphi}$, $\tilde{\gamma}$ ile belirli r-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevdir.

Örnek 2. 47 $\Re_1$ değişmeli bir halka, $\Re_2$ değişmeli olmayan bir halka ve $\Re_2$ halkasının opposite halkası olan $\Re_2^{op}$ olsun. $\alpha, \beta: \Re_2 \to \Re_2$ halka homomorfizmaları, $\gamma: \Re_2 \to \Re_2^{op}$ (β, α)-türevi ve $\varphi: \Re_2 \to \Re_2^{op}$ γ (β, α)-türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (β, α)-türev olsun. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: \Re_2 \times \Re_1 \to \Re_2 \times \Re_1$ ve $\tilde{\gamma}, \tilde{\varphi}: \Re_2 \times \Re_1 \to \Re_2^{op} \times \Re_1$dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\tilde{\alpha}(r_1, r_2) = (\alpha(r_1), r_2)$$

$$\tilde{\beta}(r_1, r_2) = (\beta(r_1), r_2)$$

$$\tilde{\gamma}(r_1, r_2) = (\gamma(r_1), r_2)$$

$$\tilde{\varphi}(r_1, r_2) = (\varphi(r_1), r_2)$$

$\tilde{\varphi}$, $\tilde{\gamma}$ ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevdir.

Tanım 2.48 $h: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$h(r_1 r_2) = h(r_1)h(r_2) + h(r_1)r_2 + r_1 h(r_2)$$

koşulunu sağlayan h toplamsal dönüşümüne R halkasının **homo-türevi** denir.

Örnek 2.49 (El Sofy Aly, 2000) $f: R \to R$ halka homomorfizması olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $h(x) = f(x) - x$ şeklinde tanımlanan dönüşüm R halkasının bir homo-türevidir.

Örnek 2.50 (El Sofy Aly, 2000) R bir halka ve $h: R \to R, h(x) = -x$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda h, R halkasının bir homo-türevidir.

Örnek 2.51 (El Sofy Aly, 2000) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} | m, n \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlanan küme Reel sayılar üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile bir halka belirtir. $d: R \to R, d(m + n\sqrt{2}) = -2n\sqrt{2}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm R halkasının bir homo-türevidir.

Uyarı 2.52 Eğer $h: R \to R$ bir homo-türev ise $\alpha: R \to R$, $\alpha(w_1) = h(w_1) + w_1$ şeklinde tanımlanan halka homomorfizması vardır.

İspat: Keyfi $w_1, w_2 \in R$ için

$$\begin{aligned} \alpha(w_1 r_2) = h(w_1 w_2) + w_1 w_2 &= h(w_1)h(w_2) + h(w_1)w_2 + w_1 h(w_2) + w_1 w_2 \\ &= h(w_1)(h(w_2) + w_2) + w_1(h(w_2) + w_2) = (h(w_1) + w_1)(h(w_2) + w_2) \\ &= \alpha(w_1)\alpha(w_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, α halka homomorfizmasıdır.

Örnek 2.50 ve Uyarı 2.52 gereğince Uyarı 2.53 elde edilir.

Uyarı 2.53 $h: R \to R$ bir homo-türevi vardır ancak ve ancak $\sigma(r_1) = h(r_1) + r_1$ olan $\sigma: R \to R$ bir halka homomorfizması vardır.

Tanım 2.54 Her $r_1 \in R$ için,

$$j_h({r_1}^2) = j_h(r_1)^2 + j_h(r_1)r_1 + r_1 j_h(r_1)$$

koşulunu sağlayan $j_h: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının **Jordan homo-türevi** denir.

Örnek 2.55 (Rehman ve Alnoghashi, 2022: 13) S bir halka ve $R = \{a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} | a_{12}, a_{13}, a_{23} \in S\}$ kümesi 3×3 tipindeki matrislerin halkası olan $M_3(S)$ halkasının bir alt halkasıdır. $f: R \to R, f(a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23}) = a_{23}e_{12}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm R halkasının bir Jordan homo-türevidir.

Tanım 2.56 $\emptyset \neq S \subseteq R$ olmak üzere $f: R \to R$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

i. $f(S) \subseteq S$

ii. Keyfi bir $s \in S$ için $n(s) > 1$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayısı için $f^{n(s)}(s) = 0$ dır

koşullarını sağlayan f dönüşümüne S kümesi üzerinde **sıfır güç değerli** (zero power valued) denir.

Teorem 2.57 (Rehman ve Söğütçü, 2020: 530) R, 2-burulmasız bir yarıasal halka, $\alpha, \beta,\ R$ halkasının otomorfizmaları ve $(0) \neq L, R$ halkasının $L \nsubseteq Z_R$ koşulunu sağlayan kare-kapalı Lie ideali olsun. $\delta: R \rightarrow L$ dönüşümü her $a \in L$ için $a^\delta, \beta(a) \in L$ ve

$$(a^2)^\delta = a^\delta \alpha(a) + \beta(a) a^\delta$$

koşullarını sağlanıyor ise δ, L üzerinde (α, β) $-$türevdir.

Lemma 2.58 (Mayne, 1984: 123) R bir asal halka ve $a, b \in R$ için $b, ab \in Z_R$ olsun. Bu durumda, $b \neq 0_R$ ise $a \in Z_R$ dir.

Lemma 2.59 (Mayne, 1984: 123) Sıfır idealinden farklı değişmeli bir sağ ideali olan asal halka değişmelidir.

Teorem 2.60 (Posner, 1957: 1094) $R, char(R) \neq 2$ olan bir asal halka ve d_1, d_2 R halkasının türevleri olsun. Bu durumda, $d_1 d_2$ türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Lemma 2.61 (Melaibari, Muthana, Al-Kenani, 2016: 6) R bir halka ve h, R halkasının sıfır değerli homo-türevi olsun. Bu durumda, $h(Z_R) \subset Z_R$ koşulu sağlanır.

Teorem 2.62 (Belkadi, Ali, Taoufiq, 2023: 6) R, 2-burulmasız bir asal halka ve h, R halkasının sıfırdan farklı homo-türevi olsun. Bu durumda her $r_1, r_2 \in R$ için $[h(r_1), h(r_2)] = 0$ koşulu sağlanıyor ise R değişmeli bir halkadır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
ARAŞTIRMA BULGULARI

Tez çalışmasının bu bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde üç farklı problem ele alınmıştır. Tez şablonu gereğince aynı bölümde yazılmıştır.

3.1. Tek Yanlı Genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-Ters Türevler Üzerine

Bu bölümde ilk olarak yarıasal halkaların (α, β)-ters türevlerinin sağladığı özellikler, daha sonrasında ise yarıasal halkaların tek yanlı genelleştirilmiş (α, β)-ters türevlerinin sağladığı özellikler incelenecektir. İlk olarak ikinci bölümde verdiğimiz tanımları bütünlük olması amacıyla hatırlayalım.

R bir halka ve α, β, R halkası üzerinde tanımlanmış dönüşümler olsun. $\gamma: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $r_1, r_2 \in R$ için $\gamma(r_1 r_2) = \gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1)$ koşulunu sağlıyor ise γ dönüşümü R halkasının **$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-ters türevi** olarak adlandırılır. $\mathcal{F}: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $r_1, r_2 \in R$ için $\mathcal{F}(r_1 r_2) = \gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\mathcal{F}(r_1)$ koşulunu sağlıyor ise R halkasının **sağ genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-ters türevi** ($r$-genelleştirilmiş (α, β)-ters türev) ve $\mathcal{F}(r_1 r_2) = \mathcal{F}(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1)$ koşulunu sağlıyor ise R halkasının **sol genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-ters türevi** ($l$-genelleştirilmiş (α, β)-ters türev) olarak adlandırılır.

Bu bölüm boyunca, aksi belirtilmedikçe R bir yarıasal halka, $(0) \neq \rho, R$ halkasının iki yanlı ideali, Z_R, R halkasının merkezi, $C_R(\rho)$, ρ idealinin R halkasındaki merkezileştiricisi ve $\alpha, \beta: R \to R$ halka homomorfizmalarıdır.

3.1.1. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$-Ters Türevler Üzerine

1957 yılından bu yana ters türev ile türev arasındaki ilişki araştırılmaktadır. Bu kısım literatürde (α, β)-ters türev ile ilgili var olan sonuçlardan ilham alarak, seçilen kümeler ve dönüşümler üzerinde en az şartla (α, β)-ters türev ile (α, β)-türev arasındaki ilişkiyi belirlemeyi amaçlamaktadır. Halkada ters türev tanımı ilk olarak Herstein (Herstein, 1957) tarafından verilmiştir. Yazar ilgili çalışmada karakteristiği 2'den farklı bir asal halka üzerinde tanımlanan ters türev ve türev kavramlarının birbiri ile çakıştığını göstermiştir. Sonra Samman ve Alyamani (Samman ve Alyamani, 2007) tarafından bir yarıasal halka üzerinde tanımlı olan ters türev ve türev kavramlarının birbiri ile çakıştığı gösterilmiştir. Burada vurgulamamız gereken yazarlar, dönüşümün üzerinde tanımlandığı küme daha genel bir formda iken aynı dönüşüm kullanılarak benzer sonuca ulaşmaya çalışmaktadır. Daha sonra, (Özdemir, Aydın, 2018) tarafından "R bir asal halka, α, R halkasının homomorfizması ve β, R halkasının otomorfizması olması durumunda R halkasının sıfır dönüşümünden farklı D (α,β)-ters türevi vardır ancak ve ancak R halkası değişmelidir ve D (α,β)-ters türevi halkanın (α,β)-türevidir." sonucu ispatlanmıştır. Bu çalışmada bahsedilen sonuçtaki β dönüşümünün bire-bir olması şartı kaldırılarak bahsedilen sonuç tekrar incelenmiştir. Yazarlar ilgili çalışmada "R bir yarıasal halka α, R halkasının otomorfizması ve β, R halkasının epimorfizması olması durumunda R halkasının sıfır dönüşümünden farklı D (α,β)-ters türevi vardır ancak ve ancak D (α,β)-ters türevi halkanın merkezi tarafından kapsanan (β,α)-türevidir." sonucu gösterilmiştir. Bu çalışmada ise bahsedilen sonuç halka homomorfizmaları olan α ve β dönüşümlerinden en az birinin epimorfizma olması durumu ön koşulunda yarıasal halkanın bir ideali üzerinde incelenmiştir. Bu durumda, literatürde var olan bu sonuç daha genel bir formda ispatlanmış olacaktır. Böylece, (Özdemir, Aydın, 2018) tarafından (α,β)-ters türev ile ilgili ispatlanan sonuçlar bu bölümde yer alan problemlerin birer sonucu haline dönüşmüştür.

Bu bölümde araştırılan problemler vasıtasıyla aşağıda tanımları verilen $\wp_1$ ve $\wp_2$ kümeleri için $\wp_1 \cap \wp_2 \neq \emptyset$ durumunun hangi koşullar altında sağlandığı sorusuna bir cevap aranmaktadır. R keyfi bir halka ve α,β, R halkasının keyfi iki dönüşümü olsun. $\wp_1 = \{d \mid d: R \to R \ (\alpha,\beta)\text{-türev}\}$ ve $\wp_2 = \{\gamma \mid \gamma: R \to R \ (\alpha,\beta)\text{-ters türev}\}$ şeklinde iki küme tanımlansın. $\wp_1$ kümesi ile R halkası üzerinde tanımlı tüm (α,β)-türevlerinin kümesini göstermektedir. $\wp_2$ kümesi ile de R halkası üzerinde tanımlı tüm (α,β)-ters türevlerinin kümesini göstermektedir.

Aşağıda, (α,β)-türev ve (α,β)-ters türev ile ilgili birkaç örnek verilmiştir. Örnekler ile iki fonksiyon arasındaki ilişki vurgulanmıştır.

Örnek 3.1.1.1 T bir tamlık bölgesi olmak üzere $\Re = \{r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22} : r_{11}, r_{12}, r_{22} \in T\}$ kümesi 2×2 tipindeki matrislerin halkası olan $M_2(T)$ halkasının bir alt halkasıdır. $\alpha, \beta, \gamma: \Re \to \Re$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\alpha(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{11}e_{22}$$

$$\beta(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})=r_{22}e_{11}$$

$$\gamma(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})=(r_{11}-r_{22})e_{12}$$

Keyfi $r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22}, s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22}\in\Re$ alalım.

$$\begin{aligned}\gamma(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22}+s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})&\\ &=\gamma\big((r_{11}+s_{11})e_{11}+(r_{12}+s_{12})e_{12}+(r_{22}+s_{22})e_{22}\big)\\ &=(r_{11}+s_{11}-r_{22}-s_{22})e_{12}=(r_{11}-r_{22})e_{12}+(s_{11}-s_{22})e_{12}\\ &=\gamma(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})+\gamma(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından γ toplamsal bir dönüşümdür.

$\gamma((r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22}))=\gamma(r_{11}s_{11}e_{11}+(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{22})e_{12}+r_{22}s_{22}e_{22})=(r_{11}s_{11}-r_{22}s_{22})e_{12}$

$$\begin{aligned}\gamma(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})\alpha(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})&\\ &+\beta(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})\gamma(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\\ &=((r_{11}-r_{22})e_{12})(s_{11}e_{22})+(r_{22}e_{11})((s_{11}-s_{22})e_{12})\\ &=((r_{11}-r_{22})s_{11})e_{12}+(r_{22}(s_{11}-s_{22}))e_{12}\\ &=(r_{11}s_{11}-r_{22}s_{11}+r_{22}s_{11}-r_{22}s_{22})e_{12}=(r_{11}s_{11}-r_{22}s_{22})e_{12}\end{aligned}$$

Son iki ifadeden toplamsal γ dönüşümü $\Re$ halkasının (α,β)-türevidir.

$$\begin{aligned}\gamma((r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22}))&\\ &=\gamma(r_{11}s_{11}e_{11}+(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{22})e_{12}+r_{22}s_{22}e_{22})=(r_{11}s_{11}-r_{22}s_{22})e_{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\alpha(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})&\\ &+\beta(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\gamma(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})\\ &=((s_{11}-s_{22})e_{12})(r_{11}e_{22})+(s_{22}e_{11})((r_{11}-r_{22})e_{12})\\ &=((s_{11}-s_{22})r_{11})e_{12}+(s_{22}(r_{11}-r_{22}))e_{12}\\ &=(r_{11}s_{11}-r_{22}s_{11}+r_{22}s_{11}-r_{22}s_{22})e_{12}=(r_{11}s_{11}-r_{22}s_{22})e_{12}\end{aligned}$$

son iki ifadeden toplamsal γ dönüşümü $\Re$ halkasının (α,β)-ters türevidir.

Örnek 3.1.1.2 T bir tamlık bölgesi olmak üzere $\Re=\{r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22}: r_{11},r_{12},r_{22}\in T\}$ kümesi 2×2 tipindeki matrislerin halkası olan $M_2(T)$ halkasının bir alt halkasıdır. $\alpha,\beta,\gamma:\Re\to\Re$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\alpha(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{11}e_{22}$$

$$\beta(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{22}e_{11}$$

$$\gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = -r_{12}e_{12}$$

Keyfi $r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}, s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22} \in \mathfrak{R}$ alalım.

$$\begin{aligned}
&\gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22} + s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\
&\qquad = \gamma\big((r_{11} + s_{11})e_{11} + (r_{12} + s_{12})e_{12} + (r_{22} + s_{22})e_{22}\big) = (-r_{12} - s_{12})e_{12} \\
&\qquad = -r_{12}e_{12} + (-s_{12}e_{12}) \\
&\qquad = \gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) + \gamma(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından γ toplamsal bir dönüşümdür.

$$\begin{aligned}
&\gamma((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})) \\
&\qquad = \gamma(r_{11}s_{11}e_{11} + (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} + r_{22}s_{22}e_{22}) \\
&\qquad = (-r_{11}s_{12} - r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})\alpha(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\
&\qquad + \beta(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})\gamma(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\
&\qquad = (-r_{12}e_{12})(s_{11}e_{22}) + (r_{22}e_{11})(-s_{12}e_{12}) = (-r_{12}s_{11})e_{12} + (-r_{22}s_{12})e_{12} \\
&\qquad = (-r_{12}s_{11} - r_{22}s_{12})e_{12}
\end{aligned}$$

son iki ifadeden toplamsal γ dönüşümü $\mathfrak{R}$ halkasının (α, β)-türevi değildir.

$$\begin{aligned}
&\gamma((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})) \\
&\qquad = \gamma(r_{11}s_{11}e_{11} + (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} + r_{22}s_{22}e_{22}) \\
&\qquad = (-r_{11}s_{12} - r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\alpha(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) \\
&\qquad + \beta(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) \\
&\qquad = (-s_{12}e_{12})(r_{11}e_{22}) + (s_{22}e_{11})(-r_{12}e_{12}) = (-s_{12}r_{11}e_{12}) + (-s_{22}r_{12}e_{12}) \\
&\qquad = (-r_{11}s_{12} - r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

son iki ifadeden toplamsal γ dönüşümü $\mathfrak{R}$ halkasının (α, β)-ters türevidir.

Örnek 3.1.1.3 T bir tamlık bölgesi olmak üzere $\mathfrak{R} = \{r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}: r_{11}, r_{12}, r_{22} \in T\}$ kümesi 2×2 tipindeki matrislerin halkası olan $M_2(T)$ halkasının bir alt halkasıdır. $\alpha, \beta, \gamma: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\alpha(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{22}e_{22}$$

$$\beta(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{11}e_{11}$$

$$\gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = r_{12}e_{12}$$

Keyfi $r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}, s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22} \in \mathfrak{R}$ alalım.

$$\begin{aligned}
&\gamma((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) + (s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}))\\
&\qquad = \gamma\big((r_{11} + s_{11})e_{11} + (r_{12} + s_{12})e_{12} + (r_{22} + s_{22})e_{22}\big) = (r_{12} + s_{12})e_{12}\\
&\qquad = r_{12}e_{12} + s_{12}e_{12}\\
&\qquad = \gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) + \gamma(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından γ toplamsal bir dönüşümdür.

$$\begin{aligned}
&\gamma((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}))\\
&\qquad = \gamma(r_{11}s_{11}e_{11} + (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} + r_{22}s_{22}e_{22}) = (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})\alpha(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\\
&\qquad + \beta(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})\gamma(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\\
&\qquad = (r_{12}e_{12})(s_{22}e_{22}) + (r_{11}e_{11})(s_{12}e_{12}) = (r_{12}s_{22}e_{12}) + (r_{11}s_{12}e_{12})\\
&\qquad = (r_{12}s_{22} + r_{11}s_{12})e_{12}
\end{aligned}$$

son iki ifadeden toplamsal γ dönüşümü $\mathfrak{R}$ halkasının (α, β)-türevi değildir.

$$\begin{aligned}
&\gamma((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}))\\
&\qquad = \gamma(r_{11}s_{11}e_{11} + (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} + r_{22}s_{22}e_{22}) = (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\alpha(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})\\
&\qquad + \beta(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\gamma(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})\\
&\qquad = (s_{12}e_{12})(r_{22}e_{22}) + (s_{22}e_{11})(r_{12}e_{12}) = (s_{12}r_{22}e_{12}) + (s_{22}r_{12}e_{12})\\
&\qquad = (r_{22}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

son iki ifadeden toplamsal γ dönüşümü $\mathfrak{R}$ halkasının (α, β)-ters türev değildir.

Yukarıda verilen örneklerden yola çıkarak bir halka üzerinde tanımlı bir (α,β)-ters türev aynı zamanda (α,β)-türev olabilir. O halde, $\wp_1$ ve $\wp_2$ kümelerinin kesişimlerinin boştan farklı olduğu durumlar mevcuttur.

Teorem 3.1.1.4 R, 2-burulmasız bir yarıasal halka, α,β,R halkasının otomorfizmaları ve $\gamma: R \to R$ olsun. γ sıfır dönüşümünden farklı (α,β)-ters türev ise (α,β)-türevdir.

İspat: Keyfi bir $r_1 \in R$ ve γ, (α,β)-ters türevi için

$$\gamma({r_1}^2) = \gamma(r_1)\alpha(r_1) + \beta(r_1)\gamma(r_1) \tag{3.1}$$

denklemi sağlanır. Kabul edelim ki R halkası değişmeli olmasın. Her halka kendisinin kare kapalı Lie idealidir. R halkası değişmeli olmadığından R, $R \not\subseteq Z_R$ koşulunu sağlayan kare kapalı Lie idealdir. Her $r_1 \in R$ için γ (α,β)-ters türevi $\gamma(r_1),\beta(r_1) \in R$ koşullarını sağlar. **Teorem 2.57** gereğince γ,R halkasının (α,β)-türevidir. R halkasının değişmeli olması durumda γ,R halkasının (α,β)-türevidir çünkü

$$\gamma(r_1r_2) = \gamma(r_2r_1) = \gamma(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\gamma(r_2).$$

Teorem 3.1.1.4 ile 2-burulmasız bir yarıasal halkada α,β halkanın otomorfizmaları olmak üzere (α,β)-türev ile (α,β)-ters türev kavramlarının çakıştığı gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1.5 $\alpha(\rho) = \rho$ olsun. $\gamma: \rho \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α,β)-ters türevi vardır ancak ve ancak γ,ρ ideali üzerinde $\gamma(\rho) \subset C_R(\rho)$ koşulunu sağlayan (β,α)-türevdir.

İspat: Keyfi $x_1,x_2,x_3 \in \rho$ alalım. γ dönüşümünün (α,β)-ters türev olması kullanılarak,

$$\begin{aligned}\gamma(x_1x_2x_3) &= \gamma\big(x_1(x_2x_3)\big) = \gamma(x_2x_3)\alpha(x_1) + \beta(x_2x_3)\gamma(x_2)\\ &= \big(\gamma(x_3)\alpha(x_2) + \beta(x_3)\gamma(x_2)\big)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\beta(x_3)\gamma(x_2)\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\gamma(x_1x_2x_3) = \gamma\big((x_1x_2)x_3\big) &= \gamma(x_3)\alpha(x_1x_2) + \beta(x_3)\gamma(x_1x_2) \\
&= \gamma(x_3)\alpha(x_1)\alpha(x_2) + \beta(x_3)\big(\gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\gamma(x_1)\big) \\
&= \gamma(x_3)\alpha(x_1)\alpha(x_2) + \beta(x_3)\gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_3)\beta(x_2)\gamma(x_1)
\end{aligned}
$$

ifadeleri elde edilir. Buradan,

$$\gamma(x_1x_2x_3) = \gamma(x_3)\alpha(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_3)\gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\beta(x_3)\gamma(x_2) \qquad (3.\ 2)$$

$$\gamma(x_1x_2x_3) = \ \gamma(x_3)\alpha(x_1)\alpha(x_2) + \beta(x_3)\gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_3)\beta(x_2)\gamma(x_1) \qquad (3.3)$$

denklemleri yazılır. (3. 2) ve (3. 3) denklemlerinden

$$\gamma(x_3)[\alpha(x_1), \alpha(x_2)] = [\beta(x_3), \beta(x_2)]\gamma(x_1) \qquad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) denkleminde $x_3 = x_2$ alıp, $[\beta(x_2), \beta(x_2)] = 0$ olduğu kullanılarak (3.4) denkleminden keyfi $x_1, x_2 \in \rho$ için $\gamma(x_2)[\alpha(x_1), \alpha(x_2)] = 0$ elde edilir. Son elde edilen ifade daha kolay anlaşılması açısından

$$\gamma(x_1)[\alpha(x_1), \alpha(x_2)] = 0, \ \ \forall x_1, x_2 \in \rho \qquad (3.5)$$

şeklinde düzenlenir. (3.5) denkleminden $\alpha(\rho) = \rho$ olması kullanılarak

$$\gamma(x_1)[\alpha(x_1), x_2] = 0, \ \ \forall x_1, x_2 \in \rho \qquad (3.6)$$

olmasına ulaşılır. (3.6) denkleminde keyfi $x_3 \in \rho$ ve $r_1 \in R$ için x_2 yerine $x_2 x_3 r_1$ yazıldığında elde edilen ifade $\boldsymbol{L_4}$ özelliği kullanılarak düzenlendiğinde $\gamma(x_1)x_2x_3[\alpha(x_1), r_1] + \gamma(x_1)[\alpha(x_1), x_2x_3]r_1 = 0$ bulunur. Son bulunan ifade (3.6) denklemi kullanılarak tekrar düzenlendiğinde

$$\gamma(x_1)x_2x_3[\alpha(x_1), r_1] = 0, \ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho, r_1 \in R \tag{3.7}$$

bulunur. Bir başka deyişle (3.7) denklemi

$$\gamma(x_1)\rho\rho[\alpha(x_1), R] = 0, \qquad \forall x_1 \in \rho$$

şeklinde yazılır. Bir yarıasal halkanın iki yanlı ideali de yarıasal halkadır. Bu yüzden, ρ yarıasal halkadır. ρ yarıasal halka olduğundan Λ indis kümesi olmak üzere

$$\omega(\rho) = \{\omega_i \mid her\ i \in \Lambda \text{ için } \omega_i, \rho\ yarı - asal\ halkasının\ asal\ ideali\ \}$$

$\bigcap \omega(\rho) = (0)$ koşulunu sağlayan asal ideal ailesi olan $\omega(\rho)$ kümesi vardır ve ρ yarıasal halkası $\omega(\rho)$ kümesini içerir. Keyfi bir $\omega_1 \in \omega(\rho)$ asal ideali için $\gamma(x_1)\rho\rho[\alpha(x_1), R] = 0 \subset \omega_1$ sağlanır. ω_1 asal ideal olduğundan, $\gamma(x_1)\rho\rho[\alpha(x_1), R] \subset \omega_1$ iken $\gamma(x_1)\rho \subset \omega_1$ veya $[\alpha(x_1), R] \subset \omega_1$ sağlanır. Şimdi $S_1 = \{x_1 \in \rho : \gamma(x_1)\rho \subset \omega_1\}$ ve $S_2 = \{x_1 \in \rho : [\alpha(x_1), R] \subset \omega_1\}$ şeklinde iki küme tanımlayalım. Bu tanımlardan yola çıkarak $(S_1, +)$ ve $(S_2, +)$ nın $(\rho, +) = (S_1, +) \cup (S_2, +)$ olacak şekilde $(\rho, +)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu kolayca görülür. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $\rho = S_1$ ya da $\rho = S_2$ olmalıdır. Şimdi $\rho = S_1$ durumunu inceleyelim. Bu durumda her $x_1 \in \rho$ için $\gamma(x_1)\rho \subset \omega_1$ koşulu sağlanır. Keyfi $x_2 \in \rho$ ve $r_1 \in R$ için $\gamma(x_1)\rho \subset \omega_1$ ifadesi sağdan $[\alpha(x_2), r_1]$ ile çarpıldığında $\gamma(x_1)\rho[\alpha(x_2), r_1] \subset \omega_1[\alpha(x_2), r_1]$ elde edilir. ω_1 bir ideal olduğundan $\omega_1[\alpha(x_2), r_1] \subset \omega_1$ sağlanır. Buradan, $\gamma(x_1)\rho[\alpha(x_2), r_1] \subset \omega_1[\alpha(x_2), r_1] \subset \omega_1$ yazılır. O halde her $x_1, x_2 \in \rho, r_1 \in R$ için

$$\gamma(x_1)\rho[\alpha(x_2), r_1] \subset \omega_1$$

elde edilir. Şimdi ise $\rho = S_2$ durumunu inceleyelim. Bu durumda her $x_1 \in \rho, r_1 \in R$ için $[\alpha(x_1), r_1] \subset \omega_1$ koşulu sağlanır. Keyfi $x_2, x_3 \in \rho$ için $[\alpha(x_1), r_1] \subset \omega_1$ ifadesi sol taraftan $\gamma(x_2)x_3$ ile çarpıldığında $\gamma(x_2)x_3[\alpha(x_1), r_1] \subset \gamma(x_2)x_3\omega_1$ bulunur. ω_1 bir ideal olduğundan $\gamma(x_2)x_3\omega_1 \subset \omega_1$ sağlanır. Buradan $\gamma(x_2)x_3[\alpha(x_1), r_1] \subset \omega_1$ olduğu kolayca görülür. O halde, her $x_1, x_2 \in \rho, r_1 \in R$ için

$$\gamma(x_2)x_3[\alpha(x_1), r_1] \subset \omega_1$$

elde edilir. $\rho = S_1$ ve $\rho = S_2$ durumlarının her ikisinden de her $x_1, x_2 \in \rho$ için

$$\gamma(x_1)\rho[\alpha(x_2), R] \subset \omega_1$$

sonucuna varılır. Bu durum keyfi bir $\omega_1 \in \omega(\rho)$ asal ideali için gerçeklendiğinden her $\omega_i \in \omega(\rho)$ (her $i \in \Lambda$) içinde gerçeklenir. Dolayısıyla her $x_1, x_2 \in \rho$ için

$$\gamma(x_1)\rho[\alpha(x_2), R] \subset \bigcap \omega(\rho) = (0)$$

sağlanır. Başka bir deyişle $\gamma(\rho)\rho[\alpha(\rho), R]) = (0)$ dır. $\alpha(\rho) = \rho$ olduğundan son ifadeden her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ ve $r_1 \in R$ için $\gamma(x_1)x_2[x_3, r_1] = 0$ yazılır. Son ifadede $r_1 = \gamma(x_1)$ yazıldığında

$$\gamma(x_1)x_2[x_3, \gamma(x_1)] = 0 \tag{3.8}$$

bulunur. (3.8) denklemi soldan x_3 ile çarpıldığında her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ için

$$x_3\gamma(x_1)x_2[x_3, \gamma(x_1)] = 0 \tag{3.9}$$

olur. (3.8) denkleminde $x_2 = x_3x_2$ yazıldığında her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ için

$$\gamma(x_1)x_3x_2[x_3, \gamma(x_1)] = 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) denklemlerinden,

$$[x_3, \gamma(x_1)]x_2[x_3, \gamma(x_1)] = 0$$

elde edilir. Burada ρ idealin yarıasal halka olması kullanılarak her $x_1, x_3 \in \rho$ için

$$[x_3, \gamma(x_1)] = 0$$

bulunur. Bu ise her $x_1 \in \rho$ için $\gamma(x_1) \in C_R(\rho)$ demektir. Bu durumda, her $x_1, x_2 \in \rho$ için

$$\gamma(x_1 x_2) = \gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\gamma(x_1) = \gamma(x_1)\beta(x_2) + \alpha(x_1)\gamma(x_2)$$

olur ve γ (α, β)-ters türevinin ρ ideali üzerinde (β, α)-türev olduğu sonucuna varılır.

Her halka kendisinin bir ideali olduğundan **Teorem 3.1.1.5** de ρ ideali yerine R halkasının kendisini alırsak **Sonuç 3.1.1.6** elde ederiz.

Sonuç 3.1.1.6 α, R nin bir epimorfizması olsun. $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türevi vardır ancak ve ancak γ, R halkasının merkezi tarafından kapsanan (β, α)-türevdir.

Teorem 3.1.1.7 $\beta(\rho) = \rho$ olsun. $\gamma: \rho \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türevi vardır ancak ve ancak γ, ρ ideali üzerinde $\gamma(\rho) \subset C_R(\rho)$ koşulunu sağlayan (β, α)-türevdir.

İspat: Teorem 3.1.1.5 de bulunan (3.1.1.4) denklemi her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ için $\gamma(x_3)[\alpha(x_1), \alpha(x_2)] = [\beta(x_3), \beta(x_2)]\gamma(x_1)$ şeklindedir. (3.1.1.4) denkleminde $x_1 = x_2$ alındığında $[\beta(x_3), \beta(x_1)]\gamma(x_1) = 0$ bulunur. $[\beta(x_3), \beta(x_1)]\gamma(x_1) = 0$ ifadesini $\beta(\rho) = \rho$ kullanarak düzenlediğimizde her $x_1, x_2 \in \rho$ için,

$$[x_2, \beta(x_1)]\gamma(x_1) = 0 \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) denkleminde $r_1 \in R$ ve $x_3 \in \rho$ olmak üzere x_2 yerine $r_1 x_2 x_3$ yazılıp $\boldsymbol{L_3}$ özelliği kullanılarak $[r_1, \beta(x_1)]x_2 x_3 \gamma(x_1) + r_1[x_2 x_3, \beta(x_1)]\gamma(x_1) = 0$ elde edilir. Son elde edilen ifade ve (3.11) denklemini birlikte düşündüğümüzde

$$[r_1, \beta(x_1)]x_2x_3\gamma(x_1) = 0, \ \forall r_1 \in R, x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.12}$$

bulunur. Bir başka deyişle (3.12) denklemi

$$[R, \beta(x_1)]\rho\rho\gamma(x_1) = (0), \ \ \forall x_1 \in \rho$$

şeklinde yazılır. Denklem (3.7) ve denklem (3.8) arasında kullanılan ispat tekniği uygulanarak her $r_1 \in R$ $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ için $[r_1, \beta(x_1)]x_2\gamma(x_3) = (0)$ sonucuna varılır. $\beta(\rho) = \rho$ olduğu kullanılarak son ifadeyi düzenlediğimizde her $r_1 \in R$ ve $x_1, x_2, x_3 \in \rho$, $[r_1, x_1]x_2\gamma(x_3) = 0$ elde edilir. Son elde edilen ifadede r_1 yerine $\gamma(x_3)$ yazıldığında

$$[\gamma(x_3), x_1]x_2\gamma(x_3) = 0, \ \ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.13}$$

bulunur. (3.13) denklemi sağdan x_1 ile çarpıldığında

$$[\gamma(x_3), x_1]x_2\gamma(x_3)x_1 = 0, \ \ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13) denkleminde x_2 yerine x_2x_1 yazıldığında

$$[\gamma(x_3), x_1]x_2x_1\gamma(x_3) = 0, \ \ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.15}$$

bulunur. (3.14) ve (3.15) denklemleri birlikte düşünüldüğünde

$$[\gamma(x_3), x_1]x_2[\gamma(x_3), x_1] = 0, \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho$$

sonucuna varılır. ρ bir yarıasal halka olduğundan son ifadeden her $x_1, x_3 \in \rho$ için $[\gamma(x_3), x_1] = 0$ dır. Bu ise $\gamma(\rho) \subset C_R(\rho)$ demektir. Bu durumda, her $x_1, x_2 \in \rho$ için

$$\gamma(x_1x_2) = \gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\gamma(x_1) = \ \gamma(x_1)\beta(x_2) + \alpha(x_1)\gamma(x_2)$$

olur ve γ (α, β)-ters türevinin ρ ideali üzerinde (β, α)-türev olduğu sonucuna varılır.

Her halka kendisinin bir ideali olduğundan **Teorem 3.1.7** de ρ ideali yerine R halkasının kendisini alırsak **Sonuç 3.1.8** elde ederiz.

Sonuç 3.1.1.8 β, R nin bir epimorfizması olsun. $\gamma: R \rightarrow R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türevi vardır ancak ve ancak $\gamma: R \rightarrow Z_R$ (β, α)-türevdir.

Sonuç 3.1.1.9 R bir asal halka ve α, R halkasının bir epimorfizması olsun. $\gamma: R \rightarrow R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türevi vardır ancak ve ancak R değişmeli bir halkadır ve γ, R halkasının (α, β)-türevidir.

İspat: Her asal halka bir yarıasal halka olduğundan **Sonuç 3.1.6** gereğince γ (α, β)-ters türevi $\gamma(R) \subset Z_R$ koşulunu sağlar. Keyfi $r_1, r_2 \in R$ için

$$[\gamma(r_1 r_2), \beta(r_2)] = 0$$

yazılır. Son ifadeden

$$\begin{aligned} 0 = [\gamma(r_1 r_2), \beta(r_2)] &= [\gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1), \beta(r_2)] \\ &= [\gamma(r_2)\alpha(r_1), \beta(r_2)] + [\beta(r_2)\gamma(r_1), \beta(r_2)] \\ &= \gamma(r_2)[\alpha(r_1), \beta(r_2)] + [\gamma(r_2), \beta(r_2)]\alpha(r_1) + \beta(r_2)[\gamma(r_1), \beta(r_2)] \\ &\quad + [\beta(r_2), \beta(r_2)]\gamma(r_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Son elde edilen ifade $\gamma(R) \subset Z_R$ koşulunu kullanılarak düzenlendiğinde

$$\gamma(r_2)[\alpha(r_1), \beta(r_2)] = 0, \quad \forall r_1, r_2 \in R \tag{3.16}$$

bulunur. α, R halkasının bir epimorfizması olduğundan $\alpha(R) = R$ dir. (3.16) denklemi $\alpha(R) = R$ olması kullanarak düzenlendiğinde her $r_1, r_2 \in R$ için $\gamma(r_2)[r_1, \beta(r_2)] = 0$ elde edilir. Keyfi $r_3 \in R$ için, son ifadede r_1 yerine $r_1 r_3$ yazıldığında $\gamma(r_2)[r_1 r_3, \beta(r_2)] = 0$ olur. $\gamma(r_2)[r_1 r_3, \beta(r_2)] = 0$ ifadesi $\boldsymbol{L_3}$ özelliği ve $\gamma(r_2)[r_1, \beta(r_2)] = 0$ ifadesi kullanılarak tekrar düzenlenirse

$$\gamma(r_2)r_1[r_3,\beta(r_2)] = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

bulunur. Burada R nin asallığı kullanıldığında her $r_2, r_3 \in R$ için $\gamma(r_2) = 0$ veya $\beta(r_2) \in Z_R$ sonucuna varılır. Şimdi $S_1 = \{r_2 \in R: \gamma(r_2) = 0\}$ ve $S_2 = \{r_2 \in R: \beta(r_2) \in Z_R\}$ şeklinde iki küme tanımlayalım. Bu tanımlardan yola çıkarak $(S_1,+)$ ve $(S_2,+)$ nin $(S_1,+) \cup (S_2,+) = (R,+)$ koşulunu sağlayan $(R,+)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu kolayca görülür. Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $S_1 = R$ yada $S_2 = R$ olması sonucuna varılır. Şimdi $S_1 = R$ durumunu inceleyelim. Her $r_2 \in R$ için $\gamma(r_2) = 0$ dır. Bu ise çelişkidir çünkü seçilen γ dönüşümü sıfır dönüşümünden farklıdır. O halde $S_2 = R$ dir. Her $r_2 \in R$ için $\beta(r_2) \in Z_R$ sonucuna varılır.

$$\gamma(r_1r_2) = \gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1)$$

ifadesinden $\gamma(R) \subset Z_R$ ve $\beta(R) \subset Z_R$ ifadeleri yardımıyla

$$\gamma(r_2)\alpha(r_1) \subset Z_R, \forall r_1, r_2 \in R$$

elde edilir. Bu durumda **Lemma 2.58** gereğince her $r_1 \in R$ için $\alpha(r_1) \subset Z_R$ sonucuna varılır. α, R halkasının bir epimorfizması olduğundan R değişmeli bir halkadır. O halde her $r_1, r_2 \in R$ için

$$\gamma(r_1r_2) = \gamma(r_2r_1) = \gamma(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\gamma(r_2)$$

ifadesi sağlandığından γ (α,β)-türevdir.

Sonuç 3.1.1.10 R bir asal halka ve β, R halkasının bir epimorfizması olsun. $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α,β)-ters türevi vardır ancak ve ancak R değişmeli bir halkadır ve γ, R halkasının (α,β)-türevidir.

İspat: Her asal halka bir yarıasal halka olduğundan **Sonuç 3.1.8** gereğince γ $(\alpha,\beta)-$ters türevi $\gamma(R) \subset Z_R$ koşulunu sağlar. Keyfi $r_1, r_2 \in R$ için

$$[\gamma(r_1r_2), \alpha(r_1)] = 0$$

yazılır. Son ifadeden

$$0 = [\gamma(r_1 r_2\ ), \alpha(r_1)] = \ [\gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1), \alpha(r_1)]$$
$$= \gamma(r_2)[\alpha(r_1), \alpha(r_1)] + [\gamma(r_2), \alpha(r_1)]\alpha(r_1) + [\beta(r_2), \alpha(r_1)]\gamma(r_1)$$
$$+ \beta(r_2)[\gamma(r_1), \alpha(r_1)]$$

elde edilir. Bu ifade $\gamma(R) \subset Z_R$ kullanılarak düzenlendiğinde

$$[\beta(r_2), \alpha(r_1)]\gamma(r_1) = 0, \forall r_1, r_2 \in R \text{ için}$$

bulunur. Bulunan son ifade $\beta(R) = R$ olması kullanılarak düzenlediğinde her $r_1, r_2 \in R$ için $[r_2, \alpha(r_1)]\gamma(r_1) = 0$

sonucuna varılır. Burada $r_3 \in R$ olmak üzere $r_2 = r_2 r_3$ yazıldığında $[r_2 r_3, \alpha(r_1)]\gamma(r_1) = 0$ olur. Son ifade $\boldsymbol{L_3}$ özelliği ve $[r_2, \alpha(r_1)]\gamma(r_1) = 0$ ifadesi kullanılarak düzenlendiğinde

$$[r_2, \alpha(r_1)]r_3\gamma(r_1) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

bulunur. Burada R halkasının asallığı kullanıldığında her $r_1 \in R$ için $\alpha(r_1) \in Z_R$ veya $\gamma(r_1) = 0$ sonucuna varılır. Şimdi $S_1 = \{r_1 \in R: \alpha(r_1) \in Z_R\ \}$ ve $S_2 = \{r_1 \in R: \gamma(r_1) = 0\}$ şeklinde iki küme tanımlayalım. Bu tanımlardan yola çıkarak $(S_1, +)$ ve $(S_2, +)$ nin $(S_1, +) \cup (S_2, +) = (R, +)$ koşulunu sağlayan $(R, +)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu kolayca görülür. Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $S_1 = R$ yada $S_2 = R$ olması sonucuna varılır. Şimdi $S_1 = R$ durumunu inceleyelim. Her $r_1 \in R$ için $\alpha(r_1) \in Z_R$ sonucuna varılır. Bu ise $\alpha(R) \subset Z_R$ demektir. Şimdi ise $S_2 = R$ durumunu inceleyelim. Her $r_1 \in R$ için $\gamma(r_1) = 0$ dır. Bu ise çelişkidir çünkü seçilen γ dönüşümü sıfır dönüşümünden farklıdır. O halde,

$$\gamma(r_1 r_2) = \gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1)$$

ifadesinden $\gamma(R) \subset Z_R$ ve $\alpha(R) \subset Z_R$ ifadeleri yardımıyla

$$\beta(r_2)\gamma(r_1) \subset Z_R, \text{ her } r_1, r_2 \in R$$

elde edilir. Bu durumda **Lemma 2.58** gereğince her $r_2 \in R$ için $\beta(r_2) \subset Z_R$ sonucuna varılır. β, R halkasının bir epimorfizması olduğundan R değişmeli bir halkadır. O halde her $r_1, r_2 \in R$ için

$$\gamma(r_1 r_2) = \gamma(r_2 r_1) = \gamma(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\gamma(r_2)$$

ifadesi sağlandığından $\gamma\ (\alpha, \beta)$ −türevdir.

R keyfi bir halka ve α,β, R halkasının keyfi iki dönüşümü olsun. $\wp_1 = \{d | d: R \to R\ (\alpha,\beta) - türev\}$ ve $\wp_2 = \{\gamma | \gamma: R \to R\ (\alpha,\beta) - ters\ türev\}$ kümelerinden bölüm başında bahsedilmişti. S bir yarıasal halka olsun. α, β, S halkasının homomorfizmaları için en az biri örten olsun. Bu durumda, S halkası üzerinde tanımlı bir (α,β)-ters türevin (β,α)-türev olduğu gösterilmiştir. $A = \{\gamma | \gamma: S \to S\ (\alpha,\beta) - ters\ türevler\}$ kümesin her bir elemanı (β,α)-türev olduğundan $A \subset \wp_1$ ve A kümesi tanımından $A \subset \wp_2$ olur. O halde, $A \subset \wp_1 \cap \wp_2$ sonucu elde edilir. Yani, $\wp_1$ ve $\wp_2$ kümeleri ayrık değildir. R halkası asal ve yarıasal seçildiğinde $\wp_2 \subset \wp_1$ elde edilir.

3.1.2. Tek Yanlı Genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$-Ters Türevler Üzerine

Halkada tek yanlı ters türev tanımını ilk olarak Aboubakr ve Gonzalez (A. Aboubakr ve S. Gonzalez, 2015) tarafından verilmiştir. Yazarlar ilgili çalışmada " R bir yarıasal halka ve I, R halkasının sıfır idealinden farklı bir ideali olsun. Bu durumda, $F: I \to R$ sıfır dönüşümünden farklı $d: I \to R$ ters türevi ile belirli sol (sağ) genelleştirilmiş ters türevi vardır ancak ve ancak $d(I), F(I) \subseteq C_R(I)$ ve F, d türevi ile belirli sağ (sol) genelleştirilmiş türevdir." olduğunu göstermişlerdir. Bu bölümde, yazarların ilgili çalışmasından ilham alarak yukarıda bahsedilen sonucu tek yanlı genelleştirilmiş (α,β)-ters türev yardımıyla daha genel bir formda ispatlamak amaçlanmaktadır.

Örnek 3.1.2.1 $\mathfrak{R}_1$ değişmeli bir halka, $\mathfrak{R}_2$ değişmeli olmayan bir halka ve $\mathfrak{R}_2$ halkasının opposite halkası olan $\mathfrak{R}_2^{op}$ olsun. $\alpha, \beta: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2$ halka homomorfizmaları, $\gamma: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2^{op}$ (β,α)-türevi ve $\varphi: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2^{op}$ γ (β,α)-türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (β,α)-türev olsun . $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1$ ve $\tilde{\gamma}, \tilde{\varphi}: \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2^{op} \times \mathfrak{R}_1$dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\tilde{\alpha}(r_1, s_1) = (\alpha(r_1), s_1)$$

$$\tilde{\beta}(r_1, s_1) = (\beta(r_1), s_1)$$

$$\tilde{\gamma}(r_1, s_1) = (\gamma(r_1), s_1)$$

$$\tilde{\varphi}(r_1, s_1) = (\varphi(r_1), s_1)$$

Keyfi $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1$ alalım.

$$\tilde{\gamma}\big((r_1,s_1)+(r_2,s_2)\big)=\tilde{\gamma}(r_1+r_2,s_1+s_2)$$

$$=(\gamma(r_1+r_2),s_1+s_2)\overset{\gamma\ toplamsal}{\cong}(\gamma(r_1)+\gamma(r_2),s_1+s_2)$$

$$=(\gamma(r_1),s_1)+(\gamma(r_2),s_2)\overset{\tilde{\gamma} tanımı}{\cong}\tilde{\gamma}(r_1,s_1)+\tilde{\gamma}(r_2,s_2)$$

ve

$$\tilde{\gamma}\big((r_1,s_1)(r_2,s_2)\big)=\tilde{\gamma}(r_1r_2,s_1s_2)$$

$$=(\gamma(r_1r_2),s_1s_2)\overset{\Re_2^{op}\ ikinci\ işlem\ tanımı}{\cong}(\beta(r_2)\gamma(r_1)+\gamma(r_2)\alpha(r_1),s_1s_2)$$

$$=(\gamma(r_2)\alpha(r_1)+\beta(r_2)\gamma(r_1),s_1s_2)\overset{\Re_1\ değişmeli}{\cong}(\gamma(r_2)\alpha(r_1)$$
$$+\beta(r_2)\gamma(r_1),s_2s_1)=(\gamma(r_2)\alpha(r_1),s_2s_1)+(\beta(r_2)\gamma(r_1),s_2s_1)$$
$$=(\gamma(r_2),s_2)(\alpha(r_1),s_1)$$
$$+(\beta(r_2),s_2)(\gamma(r_1),s_1)\overset{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha},\tilde{\beta} dönüşüm\ tanımları}{\cong}\tilde{\gamma}(r_2,s_2)\tilde{\alpha}(r_1,s_1)$$
$$+\tilde{\beta}(r_1,s_1)\tilde{\gamma}(r_2,s_2)$$

sağlandığından $\tilde{\gamma}$ dönüşümü (α,β)-ters türevdir.

$$\tilde{\varphi}\ \big((r_1,s_1)+(r_2,s_2)\big)=\ \tilde{\varphi}\ (r_1+r_2,s_1+s_2)$$

$$=(\varphi(r_1+r_2),s_1+s_2)\overset{\gamma\ toplamsal}{\cong}(\varphi(r_1)+\varphi(r_2),s_1+s_2)$$

$$=(\varphi(r_1),s_1)+(\varphi(r_2),s_2)\overset{\tilde{\varphi}\ tanımı}{\cong}\tilde{\varphi}\ (r_1,s_1)+\tilde{\varphi}\ (r_2,s_2)$$

ve

$$\tilde{\varphi}\ \big((r_1,s_1)(r_2,s_2)\big)=\tilde{\varphi}\ (r_1r_2,s_1s_2)$$

$$=(\varphi(r_1r_2),s_1s_2)\overset{\Re_2^{op}\ ikinci\ işlem\ tanımı}{\cong}(\beta(r_2)\varphi(r_1)+\gamma(r_2)\alpha(r_1),s_1s_2)$$

$$=(\gamma(r_2)\alpha(r_1)+\beta(r_2)\varphi(r_1),s_1s_2)\overset{\Re_1\ değişmeli}{\cong}(\gamma(r_2)\alpha(r_1)$$
$$+\beta(r_2)\varphi(r_1),s_2s_1)=(\gamma(r_2)\alpha(r_1),s_2s_1)+(\beta(r_2)\varphi(r_1),s_2s_1)$$
$$=(\gamma(r_2),s_2)(\alpha(r_1),s_1)$$
$$+(\beta(r_2),s_2)(\varphi(r_1),s_1)\overset{\tilde{\varphi},\tilde{\alpha},\tilde{\beta} dönüşüm\ tanımları}{\cong}\tilde{\gamma}(r_2,s_2)\tilde{\alpha}(r_1,s_1)$$
$$+\tilde{\beta}(r_1,s_1)\tilde{\varphi}\ (r_2,s_2)$$

sağlandığından $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\gamma}$ ile belirli r-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevdir. Fakat

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(r_1, s_1)\tilde{\alpha}(r_2, s_2) + \tilde{\beta}(r_1, s_1)\tilde{\varphi}\,(r_2, s_2) \\
&= (\gamma(r_1), s_1)(\alpha(r_2), s_2) \\
&+ (\beta(r_1), s_1)(\varphi(r_2), s_2) \overset{\mathfrak{R}_2^{op}\ işlem}{\cong} (\alpha(r_2)\gamma(r_1), s_1 s_2) + (\varphi(r_2)\beta(r_1), s_1 s_2) \\
&= (\varphi(r_2)\beta(r_1) + \alpha(r_2)\gamma(r_1), s_1 s_2) \overset{\gamma\ tanımından}{\cong} (\varphi(r_2 r_1), s_1 s_2) \\
&= \tilde{\varphi}((r_2, s_2)(r_1, s_1)) \neq \tilde{\varphi}\big((r_1, s_1)(r_2, s_2)\big)
\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\gamma}$ ile belirli r-genelleştirilmiş (α, β)-türev değildir.

Örnek 3.1.2.2 $\mathfrak{R}_1$ değişmeli bir halka, $\mathfrak{R}_2$ değişmeli olmayan bir halka ve $\mathfrak{R}_2$ halkasının opposite halkası olan $\mathfrak{R}_2^{op}$ olsun. $\alpha, \beta: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2$ halka homomorfizmaları, $\gamma: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2^{op}$ (β, α)-türevi ve $\varphi: \mathfrak{R}_2 \to \mathfrak{R}_2^{op}$ γ (β, α)-türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (β, α)-türev olsun. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1$ ve $\tilde{\gamma}, \tilde{\varphi}: \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2^{op} \times \mathfrak{R}_1$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\tilde{\alpha}(r, s) = (\alpha(r), s)$$

$$\tilde{\beta}(r, s) = (\beta(r), s)$$

$$\tilde{\gamma}(r, s) = (\gamma(r), s)$$

$$\tilde{\varphi}(r, s) = (\varphi(r), s)$$

Keyfi $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_1$ alalım.

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}\big((r_1, s_1) + (r_2, s_2)\big) &= \tilde{\gamma}(r_1 + r_2, s_1 + s_2) \\
&= (\gamma(r_1 + r_2), s_1 + s_2) \overset{\gamma\ toplamsal}{\cong} (\gamma(r_1) + \gamma(r_2), s_1 + s_2) \\
&= (\gamma(r_1), s_1) + (\gamma(r_2), s_2) \overset{\tilde{\gamma} tanımı}{\cong} \tilde{\gamma}(r_1, s_1) + \tilde{\gamma}(r_2, s_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}\left((r_1,s_1)(r_2,s_2)\right) &= \tilde{\varphi}\,(r_1r_2,s_1s_2) = (\varphi(r_1r_2),s_1s_2) = (\beta(r_2)\gamma(r_1)+\varphi(r_2)\alpha(r_1),s_1s_2)\\ &= (\beta(r_2)\gamma(r_1),s_1s_2)+(\varphi(r_2)\alpha(r_1),s_1s_2)\\ &= (\beta(r_2),s_2)(\gamma(r_1),s_1)+(\varphi(r_2),s_2)(\alpha(r_1),s_1)\\ &= (\varphi(r_2),s_2)(\alpha(r_1),s_1)+(\beta(r_2),s_2)(\gamma(r_1),s_1)\\ &= \tilde{\varphi}\,(r_2,s_2)\tilde{\alpha}(r_1,s_1)+\tilde{\beta}(r_1,s_1)\tilde{\gamma}(r_2,s_2)\end{aligned}$$

sağlandığından $\tilde{\varphi}\,,\tilde{\gamma}$ ile belirli l-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevdir. Fakat

$$\begin{aligned}&\tilde{\gamma}(r_1,s_1)\tilde{\alpha}(r_2,s_2)+\tilde{\beta}(r_1,s_1)\tilde{\varphi}\,(r_2,s_2)\\ &\quad= (\gamma(r_1),s_1)(\alpha(r_2),s_2)\\ &\quad+ (\beta(r_1),s_1)(\varphi(r_2),s_2) \overset{\Re_2^{op}\ işlem}{\triangleq} (\alpha(r_2)\gamma(r_1),s_1s_2)+(\varphi(r_2)\beta(r_1),s_1s_2)\\ &\quad= (\varphi(r_2)\beta(r_1)+\alpha(r_2)\gamma(r_1),s_1s_2) \overset{\gamma\ tanımından}{\triangleq} (\varphi(r_2r_1),s_1s_2)\\ &\quad= \tilde{\varphi}((r_2,s_2)(r_1,s_1)) \neq \tilde{\varphi}\left((r_1,s_1)(r_2,s_2)\right)\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{\varphi}\,,\tilde{\gamma}$ ile belirli r-genelleştirilmiş (α,β)-türev değildir.

Teorem 3.1.2.3 $\alpha(\rho)=\rho$ ve $\gamma:\rho\to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α,β)-ters türev olsun. $\varkappa:\rho\to R$ γ, (α,β)-ters türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi vardır ancak ve ancak $\varkappa,\rho$ üzerinde $\varkappa(\rho),\gamma(\rho)\subset C_R(\rho)$ koşulunu sağlayan γ, (β,α)-türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (β,α)-türevidir.

İspat: Keyfi $x_1,x_2,x_3\in\rho$ alalım. $\gamma,\varkappa$ dönüşümlerinin tanımlarını kullanarak

$$\begin{aligned}\varkappa\left(x_1(x_2x_3)\right) &= \varkappa(x_2x_3)\alpha(x_1)+\beta(x_2x_3)\gamma(x_1)\\ &= \left(\varkappa(x_3)\alpha(x_2)+\beta(x_3)\gamma(x_2)\right)\alpha(x_1)+\beta(x_3)\beta(x_2)\gamma(x_1)\\ &= \varkappa(x_3)\alpha(x_2)\alpha(x_1)+\beta(x_3)\gamma(x_2)\alpha(x_1)+\beta(x_3)\beta(x_2)\gamma(x_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varkappa\left((x_1x_2)x_3\right) &= \varkappa(x_3)\alpha(x_1x_2)+\beta(x_3)\gamma(x_1x_2)\\ &= \varkappa(x_3)\alpha(x_1)\alpha(x_2)+\beta(x_3)\left(\gamma(x_2)\alpha(x_1)+\beta(x_2)\gamma(x_1)\right)\\ &= \varkappa(x_3)\alpha(x_1)\alpha(x_2)+\beta(x_3)\gamma(x_2)\alpha(x_1)+\beta(x_3)\beta(x_2)\gamma(x_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki iki ifadeden her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ için

$$\varkappa(x_3)[\alpha(x_1), \alpha(x_2)] = [\beta(x_3), \beta(x_2)]\gamma(x_1)$$

bulunur. Bulunan ifadede x_3 yerine x_2 yazıldığında

$$\varkappa(x_2)[\alpha(x_1), \alpha(x_2)] = 0, \forall x_1, x_2 \in \rho$$

sonucuna varılır. Yukarıdaki ifade $\alpha(\rho) = \rho$ ile düzenlenirse

$$\varkappa(x_2)[x_1, \alpha(x_2)] = 0, \forall x_1, x_2 \in \rho \tag{3.17}$$

elde edilir. Son ifadede x_1 yerine $r_1 \in R$ ve $x_3 \in \rho$ olmak üzere $x_1 x_3 r_1$ yazıldığında $\varkappa(x_2)[(x_1 x_3) r_1, \alpha(x_2)] = 0$ bulunur. Bu ifade $\boldsymbol{L_3}$ özelliği kullanılarak düzenlendiğinde

$$\varkappa(x_2) x_1 x_3 [r_1, \alpha(x_2)] = 0, \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho, r_1 \in R$$

sonucuna varılır. Bir başka deyişle, her $x_2 \in \rho$ için $\varkappa(x_2)\rho\rho[R, \alpha(x_2)] = (0)$ şeklinde yazılır. Denklem (3.7) ve denklem (3.8) arasında kullanılan ispat tekniği uygulanarak $\varkappa(\rho)\rho[R, \alpha(\rho)]) = (0)$ sonucuna varılır. $\alpha(\rho) = \rho$ olduğundan son ifadeden her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ ve $r_1 \in R$ için $\varkappa(x_1) x_2 [x_3, r_1] = 0$ yazılır. Son ifadede r_1 yerine $\varkappa(x_1)$ ve x_2 yerine $x_3 x_2$ yazıldığında

$$\varkappa(x_1) x_3 x_2 \, [x_3, \varkappa(x_1)] = 0, \ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.18}$$

bulunur. Yine $\varkappa(x_1) x_2 [x_3, r_1] = 0$ ifadesinde r_1 yerine $\varkappa(x_1)$ yazıldığında elde edilen ifadeyi soldan x_3 ile çarpıldığında

$$x_3 \varkappa(x_1) x_2 \, [x_3, \varkappa(x_1)] = 0, \ \forall \, x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.19}$$

olur. (3.18) ve (3.19) denklemleri birlikte düşünüldüğünde,

$$[x_3, \varkappa(x_1)] x_2 [x_3, \varkappa(x_1)] = 0$$

sonucuna varılır. Burada ρ idealin yarıasal halka olması kullanılarak her $x_1, x_3 \in \rho$ için

$$[x_3, \varkappa(x_1)] = 0$$

bulunur. Bu ise her $x_1 \in \rho$ için $\varkappa(x_1) \in C_R(\rho)$ demektir. **Teorem 3.1.5** gereğince γ (α, β)-ters türevi $\gamma(\rho) \in C_R(\rho)$ koşulunu sağlayan halkanın (β, α)-türevidir. Bu durumda, her $x_1, x_2 \in \rho$ için

$$\varkappa(x_1 x_2) = \varkappa(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\gamma(x_1) = \gamma(x_1)\beta(x_2) + \alpha(x_1)\varkappa(x_2)$$

sonucuna varılır. Böylece, $\varkappa, \gamma$ (α, β)-ters türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevinin ρ ideali üzerinde γ (β, α)-türevi ile belirli r-genelleştirlmiş (β, α)-türev olduğu sonucuna varılır.

Her halka kendisinin bir ideali olduğundan **Teorem 3.2.3** de ρ ideali yerine R halkasının kendisini alırsak **Sonuç 3.2.4** elde ederiz.

Sonuç 3.1.2.4 α, R halkasının bir epimorfizması ve $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \to R$ γ (α, β)-ters türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi vardır ancak ve ancak $\varkappa, \rho$ üzerinde $\varkappa(R), \gamma(R) \subset Z_R$ koşulunu sağlayan γ (β, α)-türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (β, α)-türevidir.

Teorem 3.1.2.5 $\beta(\rho) = \rho$ ve $\gamma: \rho \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: \rho \to R$ γ (α, β)-ters türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi vardır ancak ve ancak $\varkappa, \rho$ üzerinde $\varkappa(\rho), \gamma(\rho) \subset C_R(\rho)$ koşulunu sağlayan γ (β, α)-türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (β, α)-türevidir.

İspat: Keyfi $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ alalım. $\varkappa$ ve γ dönüşümlerinin tanımından

$$\begin{aligned}\varkappa\big(x_1(x_2x_3)\big) &= \gamma(x_2x_3)\alpha(x_1) + \beta(x_2x_3)\varkappa(x_1)\\ &= \big(\gamma(x_3)\alpha(x_2) + \beta(x_3)\gamma(x_2)\big)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\beta(x_3)\varkappa(x_1)\\ &= \gamma(x_3)\alpha(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_3)\gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\beta(x_3)\varkappa(x_1)\end{aligned}$$

ve

$$\varkappa\big((x_1x_2)x_3\big) = \gamma(x_3)\alpha(x_1x_2) + \beta(x_3)\varkappa(x_1x_2)$$
$$= \gamma(x_3)\alpha(x_1)\alpha(x_2) + \beta(x_3)\big(\gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\varkappa(x_1)\big)$$
$$= \gamma(x_3)\alpha(x_1)\alpha(x_2) + \beta(x_3)\gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_3)\beta(x_2)\varkappa(x_1)$$

elde edilir. Elde edilen son iki ifadeden her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ için $\gamma(x_3)[\alpha(x_1), \alpha(x_2)] = [\beta(x_3), \beta(x_2)]\, \varkappa(x_1)$ bulunur. Son ifadede x_2 yerine x_1 yazıldığında her $x_1, x_3 \in \rho$ $[\beta(x_3), \beta(x_1)]\, \varkappa(x_1) = 0$ olur. β, ρ idealinin bir epimorfizması olduğundan $\beta(\rho) = \rho$ dir. Bu bilgi ışığında $[\beta(x_3), \beta(x_1)]\, \varkappa(x_1) = 0$ ifadesini tekrar düzenlersek

$$[x_2, \beta(x_1)]\, \varkappa(x_1) = 0, \forall x_1, x_2 \in \rho \tag{3.20}$$

sonucuna varılır. (3.20) ifadesinde x_2 yerine $r_1 \in R$ ve $x_3 \in \rho$ olmak üzere $r_1x_2x_3$ yazıldığında $[r_1(x_2x_3), \beta(x_1)]\, \varkappa(x_1) = 0$ bulunur. Bulunan bu ifade $\boldsymbol{L_3}$ özelliği kullanılarak düzenlendiğinde

$$[r_1, \beta(x_1)]x_2x_3\, \varkappa(x_1) = 0, \forall r_1 \in R, x_1, x_2, x_3 \in \rho$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade bir başka deyişle

$$[R, \beta(x_1)]\rho\rho\, \varkappa(x_1) = (0), \forall x_1 \in \rho$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.7) ve denklem (3.8) arasında kullanılan ispat tekniği uygulanarak $[R, \beta(\rho)]\rho\, \varkappa(\rho) = (0)$ sonucuna varılır. $\beta(\rho) = \rho$ olduğundan son ifadeden her $x_1, x_2, x_3 \in \rho$ ve $r_1 \in R$ için $[r_1, x_1]x_2\varkappa(x_3) = 0$ yazılır. Son ifadede r_1 yerine $\varkappa(x_3)$yazıldığında

$$[\varkappa(x_3), x_1]x_2\varkappa(x_3) = 0,\ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho$$

elde edilir. Elde edilen ifadede x_2 yerine x_2x_1 yazıldığında

$$[\varkappa(x_3), x_1]x_2x_1\varkappa(x_3) = 0,\ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.21}$$

bulunur. Yine aynı ifadeyi soldan x_1 ile çarpıldığında

$$[\varkappa(x_3), x_1]x_2\varkappa(x_3)x_1 = 0,\ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho \tag{3.22}$$

bulunur. (3.21) ve (3.22) denklemlerini birlikte düşündüğümüzde

$$[\varkappa(x_3), x_1]x_2[\varkappa(x_3), x_1] = 0,\ \forall x_1, x_2, x_3 \in \rho$$

sonucuna varılır. Burada ρ idealin yarıasal halka olması kullanılarak her $x_1, x_3 \in \rho$ için

$$[\varkappa(x_3), x_1] = 0$$

bulunur. Bu ise her $x_3 \in \rho$ için $\varkappa(x_3) \in C_R(\rho)$ demektir. **Teorem 3.1.1.7** gereğince γ (α, β)-ters türevi $\gamma(\rho) \in C_R(\rho)$ koşulunu sağlayan halkanın (β, α)-türevidir. Bu durumda, her $x_1, x_2 \in \rho$ için

$$\varkappa(x_1x_2) = \gamma(x_2)\alpha(x_1) + \beta(x_2)\varkappa(x_1) = \varkappa(x_1)\beta(x_2) + \alpha(x_1)\,\gamma(x_2)$$

sonucuna varılır. Böylece, $\varkappa, \gamma$ (α, β)-ters türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevinin ρ ideali üzerinde γ (β, α)-türevi ile belirli l-genelleştirlmiş (β, α)-türev olduğu sonucuna varılır.

Her halka kendisinin bir ideali olduğundan **Teorem 3.1.2.5** de ρ ideali yerine *R* halkasının kendisini alırsak **Sonuç 3.1.2.6** elde ederiz.

Sonuç 3.1.2.6 β, R halkasının bir epimorfizması ve $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \to R$ γ (α, β)-ters türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi vardır ancak ve ancak $\varkappa, \rho$ üzerinde $\varkappa(R), \gamma(R) \subset Z_R$ koşulunu sağlayan γ (β, α)-türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (β, α)-türevidir.

Teorem 3.1.2.7 α, β, R halkasının epimorfizmaları ve $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \to R$ γ (α, β)-ters türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi varsa *R* halkası sıfır idealinden farklı merkez tarafından kapsanan bir ideal içerir.

İspat: Sonuç 3.1.2.4. ışığında $\varkappa, \varkappa(R), \gamma(R) \subset Z_R$ koşulunu sağlayan γ (α,β)-ters türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevdir. Keyfi $r_1, r_2 \in R$ alalım. Bu durumda,

$0 = [\varkappa(r_1r_2), \beta(r_2)] = [\varkappa(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1), \beta(r_2)] = [\varkappa(r_2)\alpha(r_1), \beta(r_2)] + [\beta(r_2)\gamma(r_1), \beta(r_2)] = \varkappa(r_2)[\alpha(r_1), \beta(r_2)] + [\varkappa(r_2), \beta(r_2)]\alpha(r_1) + \beta(r_2)[\gamma(r_1), \beta(r_2)] + [\beta(r_2), \beta(r_2)]\gamma(r_1)$

elde edilir. Burada $\varkappa(R), \gamma(R) \subset Z_R$ olması ve $[\beta(r_2), \beta(r_2)] = 0$ olması kullanıldığında her $r_1, r_2 \in R$ için $\varkappa(r_2)[\alpha(r_1), \beta(r_2)] = 0$ bulunur. α dönüşümün R halkasının epimorfizması olması kullanılarak her $r_1, r_2 \in R$ için $\varkappa(r_2)[r_1, \beta(r_2)] = 0$ dır. Bulunan ifadede $r_3 \in R$ olmak üzere r_1 yerine r_3r_1 yazıldığında

$$0 = \varkappa(r_2)[r_3r_1, \beta(r_2)] = \varkappa(r_2)r_3[r_1, \beta(r_2)] + \varkappa(r_2)[r_3, \beta(r_2)]r_1$$

bulunur. Buradan

$$\varkappa(r_1)R[R, \beta(r_1)] = 0, \forall r_2 \in R$$

sonucuna varılır. Denklem (3.7) ve denklem (3.8) arasında kullanılan ispat tekniği uygulanarak $\varkappa(R)[R, \beta(R)] = (0)$ sonucuna varılır. $\beta(R) = R$ olduğundan son ifadeden her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $\varkappa(r_1)[r_2, r_3] = 0$ yazılır. Son ifadeden $\varkappa(r_1) \in Z_R$ olduğundan

$$[\varkappa(r_1)r_2, r_3] = 0, \ \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

sonucuna varılır. Bu ise $\varkappa(R)R \subset Z_R$ demektir. R bir yarıasal halka ve $\varkappa$ sıfır dönüşümünden farklı olduğu için $\varkappa(R)R \neq (0)$ dır. $\varkappa(R)R$ kümesinin R halkasının bir ideali olduğu kolayca gösterilir. O halde, bir yarıasal halkanın sıfırdan farklı (α,β)-ters türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi varsa bu halka sıfır idealinden farklı halkanın merkezi tarafından kapsanan bir ideal içerir. Bu ideal halkanın seçilen l-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi ile belirlidir.

Teorem 3.1.2.8 α, β, R halkasının epimorfizmaları ve $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α,β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \to R$ γ (α,β)-ters türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi varsa R halkası sıfır idealinden farklı merkez tarafından kapsanan bir ideal içerir.

İspat: Sonuç 3.1.2.6 ışığında $\varkappa$, $\varkappa(R), \gamma(R) \subset Z_R$ koşulunu sağlayan γ (α,β)-ters türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevdir. Keyfi $r_1, r_2 \in R$ alalım. Bu durumda,

$$[\varkappa(r_1 r_2), \alpha(r_1)] = 0$$

yazılır. Buradan $\varkappa$ dönüşüm tanımı ve Lie komütatör özelliklerini kullanarak $[\gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\varkappa(r_1), \alpha(r_1)] = [\gamma(r_2)\alpha(r_1), \alpha(r_1)] + [\beta(r_2)\varkappa(r_1), \alpha(r_1)] = \gamma(r_2)[\alpha(r_1), \alpha(r_1)] + [\gamma(r_2), \alpha(r_1)]\alpha(r_1) + \beta(r_2)[\varkappa(r_1), \alpha(r_1)] + [\beta(r_2), \alpha(r_1)]\varkappa(r_1) = 0$ elde edilir. $\varkappa(R) \subset Z_R$ olduğundan son ifadeden $[\beta(r_2), \alpha(r_1)]\varkappa(r_1) = 0$ bulunur. β epimorfizma olduğundan her $r_1, r_2 \in R$ için $[r_2, \alpha(r_1)]\varkappa(r_1) = 0$ yazılır. Yazılan son ifadede $r_3 \in R$ olmak üzere r_2 yerine $r_2 r_3$ yazıldığında elde edilen ifade $\boldsymbol{L_3}$ özelliği ve $[r_2, \alpha(r_1)]\varkappa(r_1) = 0$ ifadesi kullanılarak düzenlenirse

$$[r_2, \alpha(r_1)]r_3\varkappa(r_1) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

sonucuna varılır. Denklem (3.7) ve denklem (3.8) arasında kullanılan ispat tekniği uygulanarak $[R, \alpha(R)]\varkappa(R) = (0)$ sonucuna varılır. $\alpha(R) = R$ olduğundan son ifadeden her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $[r_1, r_2]\varkappa(r_3) = 0$ yazılır. Son ifadeden $\varkappa(r_3) \in Z_R$ olduğundan

$$[r_1, \varkappa(r_3)r_2] = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

sonucuna varılır. Bu ise $\varkappa(R)R \subset Z_R$ demektir. R bir yarıasal halka ve $\varkappa$ sıfır dönüşümünden farklı olduğu için $\varkappa(R)R \neq (0)$ dır. $\varkappa(R)R$ kümesinin R halkasının bir ideali olduğu kolayca gösterilir. O halde, bir yarıasal halkanın sıfırdan farklı (α,β)-ters türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi varsa bu halka sıfır idealinden farklı halkanın merkezi tarafından kapsanan bir ideal içerir. Bu ideal halkanın seçilen r-genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi ile belirlidir.

Sonuç 3.1.2.9: α, β, R halkasının epimorfizmaları ve $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α,β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \to R$ γ (α,β)-ters türevi ile belirli genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi varsa R halkası sıfır idealinden farklı merkez tarafından kapsanan bir ideal içerir.

İspat: Kabul edelim ki $\varkappa: R \to R$ γ (α,β)-ters türevi ile belirli genelleştirilmiş (α,β)-ters türevi olsun. Bu durumda $\varkappa$, γ ile belirli hem l-genelleştirilmiş (α,β)-ters türev hem de r-

genelleştirilmiş (α, β)-ters türevdir. O halde, **Teorem 3.2.7** ve **Teorem 3.2.8** gereğince R halkası sıfır idealinden farklı merkez tarafından kapsanan bir ideal içerir.

Sonuç 3.1.2.10 R bir asal halka ve α, β, R halkasının epimorfizmaları ve $\gamma: R \rightarrow R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \rightarrow R$ γ (α, β)-ters türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi varsa R değişmeli bir halkadır ve $\varkappa, R$ halkasının γ (α, β)-türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-türevdir.

İspat: Bir asal halka yarıasal halka olduğundan **Teorem 3.1.2.7** gereğince R halkası sıfır idealinden farklı merkez tarafından kapsanan bir ideal içerir. O halde **Lemma 2.59** ışığında R değişmeli bir halkadır. **Sonuç 3.1.1.9** gereğince γ, R halkasının (α, β)-türevidir. Keyfi $r_1, r_2 \in R$,

$$\varkappa(r_1 r_2) = \varkappa(r_2 r_1) = \varkappa(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\gamma(r_2)$$

sağlanır. O halde, $\varkappa, R$ halkasının γ (α, β)-türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-türevdir.

Sonuç 3.1.2.11 R bir asal halka ve α, β, R halkasının epimorfizmaları ve $\gamma: R \rightarrow R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \rightarrow R$ γ (α, β)-ters türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi varsa R değişmeli bir halkadır ve $\varkappa, R$ halkasının γ (α, β)-türevi ile belirli l-genelleştirilmiş (α, β)-türevdir.

İspat: Keyfi bir asal halka yarıasal halka olduğundan **Teorem 3.1.2.8** gereğince R halkası sıfır idealinden farklı merkez tarafından kapsanan bir ideal içerir. O halde **Lemma 2.57** ışığında R değişmeli bir halkadır. **Sonuç 3.1.1.9** gereğince γ, R halkasının (α, β)-türevidir. Keyfi $r_1, r_2 \in R$,

$$\varkappa(r_1 r_2) = \varkappa(r_2 r_1) = \gamma(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\varkappa(r_2)$$

sağlanır. O halde, $\varkappa, R$ halkasının γ (α, β)-türevi ile belirli r-genelleştirilmiş (α, β)-türevdir.

Sonuç 3.1.2.12 R bir asal halka ve α, β, R halkasının epimorfizmaları ve $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \to R$ γ (α, β)-ters türevi ile belirli genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi varsa R değişmeli bir halkadır ve $\varkappa, R$ halkasının γ (α, β)-türevi ile belirli genelleştirilmiş (α, β)-türevdir.

İspat: Sonuç 3.1.2.10 ve **Sonuç 3.1.2.11** ışığında ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2.13 R değişmeli olmayan bir asal halka, α, R halkasının bir homomorfizması, β, R halkasının bir epimorfizması ve $\gamma: R \to R$ sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türev olsun. $\varkappa: R \to R$ γ ile belirli sıfır dönüşümünden farklı genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi varsa $\varkappa = \gamma$ dır.

İspat: Keyfi $r_1, r_2 \in R$ alalım. $\varkappa, R$ halkasının γ ile belirli genelleştirilmiş (α, β)-ters türevi olduğundan,

$$\varkappa(r_1 r_2) = \varkappa(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\gamma(r_1) = \gamma(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\varkappa(r_1)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade farklı bir deyişle,

$$\big(\varkappa(r_2) - \gamma(r_2)\big)\alpha(r_1) - \beta(r_2)\big(\varkappa(r_1) - \gamma(r_1)\big) = 0, \forall r_1, r_2 \in R$$

ifade edilir. Son ifade düzenlendiğinde,

$$(\varkappa - \gamma)(r_2)\alpha(r_1) - \beta(r_2)(\varkappa - \gamma)(r_1) = 0, \forall r_1, r_2 \in R$$

elde edilir. Okuyucuya kolaylık olması açısından $\varkappa - \gamma = \delta$ ile gösterelim. Son ifadeden

$$\delta(r_2)\alpha(r_1) - \beta(r_2)\delta(r_1) = 0, \forall r_1, r_2 \in R \tag{3.23}$$

yazılır. Keyfi $r_1, r_2 \in R$ alalım.

$$\begin{aligned}\delta(r_1r_2) &= (\varkappa-\gamma)(r_1-r_2)\\ &= \varkappa(r_1r_2)-\gamma(r_1r_2) \overset{\varkappa\, r-genelleştirilmiş}{\triangleq} \gamma(r_2)\alpha(r_1)+\beta(r_2)\varkappa(r_1)\\ &-\gamma(r_2)\alpha(r_1)-\beta(r_2)\gamma(r_1) = \beta(r_2)\varkappa(r_1)-\beta(r_2)\gamma(r_1)\\ &= \beta(r_2)(\varkappa-\gamma)(r_1) = \beta(r_2)\delta(r_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\delta(r_1r_2) &= (\varkappa-\gamma)(r_1-r_2)\\ &= \varkappa(r_1r_2)-\gamma(r_1r_2) \overset{\varkappa\, l-genelleştirilmiş}{\triangleq} \varkappa(r_2)\alpha(r_1)+\beta(r_2)\gamma(r_1)\\ &-\gamma(r_2)\alpha(r_1)-\beta(r_2)\gamma(r_1) = \varkappa(r_2)\alpha(r_1)-\gamma(r_2)\alpha(r_1)\\ &= (\varkappa-\gamma)(r_2)\alpha(r_1) = \delta(r_2)\alpha(r_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeler

$$\delta(r_1r_2) = \beta(r_2)\delta(r_1), \forall r_1, r_2 \in R \tag{3.24}$$

$$\delta(r_1r_2) = \delta(r_2)\alpha(r_1)\;, \forall r_1, r_2 \in R \tag{3.25}$$

şeklinde yazılır. (3.23) denkleminde $r_3 \in R$ olmak üzere r_2 yerine r_2r_3 yazıldığında

$$\begin{aligned}0 = \delta(r_2r_3)\alpha(r_1)-\beta(r_2r_3)\delta(r_1) &\overset{(3.24) ifadesi}{\triangleq} \big(\beta(r_3)\delta(r_2)\big)\alpha(r_1)-\beta(r_2)\beta(r_3)\delta(r_1)\\ &= \beta(r_3)\big(\delta(r_2)\alpha(r_1)\big)-\beta(r_2)\beta(r_3)\delta(r_1) \overset{(3.25)\ ifadesi}{\triangleq} \beta(r_3)\delta(r_1r_2)\\ &-\beta(r_2)\beta(r_3)\delta(r_1) \overset{(3.24)\ ifadesi}{\triangleq} \beta(r_3)\,\beta(r_2)\delta(r_1)-\beta(r_2)\beta(r_3)\delta(r_1)\\ &= \beta([r_3, r_2])\delta(r_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\beta([r_3, r_2])\delta(r_1) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

dir. β epimorfizma olduğundan $[\beta(r_3), \beta(r_2)]\ \delta(r_1) = 0$ ifadesi,

$$[r_3, r_2]\delta(r_1) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

şeklinde düzenlenir. $r_4 \in R$ olmak üzere r_2 yerine $r_2 r_4$ yazıldığında $\boldsymbol{L_4}$ özelliği ve son ifade kullanılarak

$$[r_3, r_2]r_4\delta(r_1) = 0, \forall r_1, r_2, r_3, r_4 \in R$$

bulunur. R asal halkası değişmeli olmadığından her $r_1 \in R$ için $\delta(r_1) = 0$ sonucuna varılır. Bu ise $\varkappa = \gamma$ demektir.

Teorem 3.1.2.13 ile değişmeli olmayan bir asal halkada α ve β dönüşümlerinin halkanın epimorfizmaları olması durumda halkanın genelleştirilmiş (α, β)-türevinin olmadığı gösterilmiştir.

3.2. Homo-Türevler Üzerine

Halkada homo-türev kavramı ilk olarak (El Sofy Aly, 2000) tarafından verilmiştir. İlk olarak bütünlük olması açısından ikinci bölümde verilen homo-türev tanımını hatırlayalım.

R bir halka ve h, R halkasının toplamsal bir dönüşümü olsun. Keyfi $r_1, r_2 \in R$ için

$$h(r_1 r_2) = h(r_1)h(r_2) + h(r_1)r_2 + r_1 h(r_2)$$

koşulunu sağlayan h toplamsal dönüşümüne R halkasının homo-türevi denir.

3.2.1. Asal Halkaların Homo-Türevleri

Homo-türev tanımında görüldüğü gibi bu kavram halkada türev ve homomorfizma kavramlarının bir kombinasyonundan oluşmaktadır. Halka üzerinde tanımlanmış keyfi bir türevin toplamsal tersi de bir türevdir. Toplamsal tersin türev olması seçilen türevin doğal bir sonucudur. Fakat halka üzerinde tanımlı bir homo-türevin toplamsal tersi bir homo-türev değildir. Aynı şekilde halka üzerinde tanımlı iki türevin toplamı doğal olarak türevdir. Fakat homo-türev için aynı sonuç geçerli değildir. Bu bölümün temel problemlerinden ikisi bir homo-türevin tersi ve iki homo-türevin toplamının hangi koşullar altında homo-türev olduğunu açıklamaktır. Aslında halkada türev için araştırılan bazı problemlerin homo-türev uyarlamalarının nasıl davranacağını araştırmayı amaçlıyoruz.

Aşağıda toplamsal tersi bir homo-türev olmayan homo-türev örneği verilmiştir.

Örnek 3.2.1.1 R bir halka olmak üzere $h: R \to R$, $h(w_1) = -w_1$ dönüşümü tanımlansın. Keyfi $w_1, w_2 \in R$ alalım. $h(w_1 + w_2) = -(w_1 + w_2) = -w_1 - w_2 = h(w_1) + h(w_2)$ eşitliği sağlandığından h toplamsal bir dönüşümdür.

$$h(w_1 w_2) = -w_1 w_2$$

ve

$$h(w_1)h(w_2) + h(w_1)w_2 + w_1 h(w_2) = w_1 w_2 - w_1 w_2 - w_1 w_2 = -w_1 w_2$$

eşitlikleri sağlandığından h toplamsal dönüşümü homo-türevdir. Fakat $-h$ homo-türev değildir.

Teorem 3.2.1.2 R, 2-burulmasız bir yarıasal halka ve $h: R \to R$ homo-türev olsun. $-h: R \to R$, $\left(-h(r_1)\right) = -h(r_1)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir homo-türev ise $h = 0$ dır.

İspat: Keyfi $x_1, x_2 \in R$ alalım. h, R halkasının homo-türevi olduğu için

$$h(x_1 x_2) = h(x_1)h(x_2) + h(x_1)x_2 + x_1 h(x_2)$$

yazılır. $-h, R$ halkasının homo-türevi olduğu için

$$(-h)(x_1 x_2) = (-h)(x_1)(-h)(x_2) + (-h)(x_1)x_2 + r_1(-h)(x_2) \overset{-h \ tanımı}{\cong} h(x_1)h(x_2) - h(x_1)x_2 - x_1 h(x_2)$$

yazılır. Yukarıdaki iki ifadeyi birlikte düşündüğümüzde

$$2h(x_1)h(x_2) = 0, \forall x_1, x_2 \in R$$

elde edilir. Burada ilk olarak halkanın 2-burulmasız olması kullanıldığında $h(x_1)h(x_2) = 0$ bulunur. Keyfi $x_3 \in R$ için son ifadede x_1 yerine x_1x_3 yazıldığında

$$\begin{aligned} 0 = h(x_1x_3)h(x_2) &= \big(h(x_1)h(x_3) + h(x_1)x_3 + x_1h(x_3)\big)h(x_2) \\ &= h(x_1)h(x_3)h(x_2) + h(x_1)x_3h(x_2) + x_1h(x_3)h(x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her $x_1, x_2 \in R$için $h(x_1)h(x_2) = 0$ olması kullanılırsa

$$h(x_1)x_3h(x_2) = 0, \forall x_1, x_2, x_3 \in R$$

sonucuna varılır. Son ifadede $x_1 = x_2$ yazıldığında $h(x_1)x_3h(x_1) = 0$ olur. Böylece R halkasının yarıasallığından $h = 0$ elde edilir.

Lemma 3.2.1.3 R bir asal halka, $char(R) \neq 2$ ve h_1, h_2, R halkasının sıfırdan farklı sıfır güç değerli homo-türevleri olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$h_1(r_1)h_2(r_2) + h_2(r_1)h_1(r_2) = 0$$

koşulu sağlanıyor ise her $z_1 \in Z_R$ için $h_1(z_1) = h_2(z_1) = 0$ sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki $h_1 \neq 0$ ve $h_2 \neq 0$ olsun. Keyfi $r_1 \in R, z_1 \in Z_R$ alalım. Hipotezde $r_1 = r_1z_1$ yazıldığında $h_1(r_1z_1)h_2(r_2) + h_2(r_1z_1)h_1(r_2) = 0$ bulunur. Bu ifade homo-türev tanımları kullanılarak düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} 0 &= h_1(r_1)h_1(z_1)h_2(r_2) + h_1(r_1)z_1h_2(r_2) + r_1h_1(z_1)h_2(r_2) + h_2(r_1)h_2(z_1)h_1(r_2) \\ &\quad + h_2(r_1)z_1h_1(r_2) + r_1h_2(z_1)h_1(r_2) \overset{z_1 \in Z_R}{=} h_1(r_1)h_1(z_1)h_2(r_2) \\ &\quad + h_2(r_1)h_2(z_1)h_1(r_2) + \underbrace{\big(h_1(r_1)h_2(r_2) + h_2(r_1)h_1(r_2)\big)z_1}_{h_1(r_1)h_2(r_2)+h_2(r_1)h_1(r_2)=0} \\ &\quad + \underbrace{r_1\big(h_1(z_1)h_2(r_2) + h_2(z_1)h_1(r_2)\big)}_{h_1(z_1)h_2(r_2)+h_2(z_1)h_1(r_2)=0} \\ &= h_1(r_1)h_1(z_1)h_2(r_2) + h_2(r_1)h_2(z_1)h_1(r_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$h_1(r_1)h_1(z_1)h_2(r_2) + h_2(r_1)h_2(z_1)h_1(r_2) = 0, \forall r_1, r_2 \in R, z_1 \in Z_R$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıdaki ifade bu bilgi ve $h_1(z_1)h_2(r_2) = -h_2(z_1)h_1(r_2)$ ifadesi yardımıyla düzenlendiğinde

$$\big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)h_1(z_1)h_2(r_2) = 0$$

bulunur. Burada $r_3 \in R$ olmak üzere $r_2 = r_2r_3$ yazıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= \big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)h_1(z_1)h_2(r_2r_3) \\ &= \underbrace{\big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)h_1(z_1)h_2(r_2)h_2(r_3)}_{=0 \text{ çün}k\text{ü } (h_1(r_1)-h_2(r_1))h_1(z_1)h_2(r_2)=0} \\ &+ \underbrace{\big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)h_1(z_1)h_2(r_2)r_3}_{=0 \text{ çün}k\text{ü } (h_1(r_1)-h_2(r_1))h_1(z_1)h_2(r_2)=0} + \big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)h_1(z_1)r_2h_2(r_3) \end{aligned}$$

elde edilir. R halkasının asallığından her $r_1, r_2, r_3 \in R, z_1 \in Z_R$ için $\big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)h_1(z_1) = 0$ veya $h_2(r_3) = 0$ elde edilir. $h_2 = 0$ olması durumu çelişki verir. O halde, her $r_1 \in R, z_1 \in Z_R$ için $\big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)h_1(z_1) = 0$ dır. **Lemma 2.61** gereğince $h_1(z_1) \in Z_R$ olduğundan $\big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big)Rh_1(z_1) = 0$ sağlanır. R halkasının asallığından her $r_1 \in R, z_1 \in Z_R$ için $\big(h_1(r_1) - h_2(r_1)\big) = 0$ veya $h_1(z_1) = 0$ elde edilir. Bu aşamada ispatı iki farklı durumda inceleyeceğiz.

1.Durum: Kabul edelim ki her $r_1 \in R$ için $h_1(r_1) - h_2(r_1) = 0$ olsun. $h_1 = h_2$ göre hipotezi düzenlediğimizde

$$2h_2(r_1)h_2(r_2) = 0, \forall r_1, r_2 \in R$$

elde edilir. Char$R \neq 2$ olduğundan $h_2(r_1)h_2(r_2) = 0$ bulunur. Burada $r_3 \in R$ olmak üzere r_1 yerine r_1r_3 yazıldığında $0 = h_2(r_1r_3)h_2(r_2) = h_2(r_1)h_2(r_3)h_2(r_3) + h_2(r_1)r_3h_2(r_3) + r_1h_2(r_3)h_2(r_3)$ bulunur. Bu ifadede $h_2(r_1)h_2(r_2) = 0$ olması kullanılırsa

$$h_2(r_1)r_3h_2(r_3) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

olur. R halkasının asallığından $h_2 = 0$ elde edilir. Bu durum $h_2 \neq 0$ seçilişiyle çelişir.

2.Durum: Her $z_1 \in Z_R$ için $h_1(z_1) = 0$ olsun. Hipotezde r_1 yerine $z_1 \in Z$ için z_1

yazıldığında $h_1(z_1)h_2(r_2) + h_2(z_1)h_1(r_2) = 0$ bulunur. Son ifadeden $h_1(z_1) = 0$ olduğundan $h_2(z_1)h_1(r_2) = 0$ bulunur. Burada $r_3 \in R$ için $r_2 = r_2r_3$ yazıldığında $h_2(z_1)h_1(r_2)h_1(r_3) + h_2(z_1)h_1(r_2)r_3 + h_2(z_1)r_2h_1(r_3) = 0$ olur. $h_2(z_1)h_1(r_2) = 0$ olduğundan son ifadeden $h_2(z_1)r_2h_1(r_3) = 0$ bulunur. R halkasının asallığından $h_2(z_1) = 0$ veya $h_1 = 0$ olur. $h_1 = 0$ durumu çelişki verir. O halde her $z_1 \in Z_R$ için $h_2(z_1) = 0$ olur.

Teorem 3.2.1.4 R bir asal halka, $char(R) \neq 2$, h_1 ve h_2, R halkasının sıfırdan farklı sıfır güç değerli homo-türevleri olsun. $h_1 + h_2, R$ halkasının bir homo-türevi ise her $z_1 \in Z_R$ için $h_1(z_1) = h_2(z_1) = 0$ dır.

İspat: Keyfi $x_1, x_2 \in R$ alalım. $h_1 + h_2$ homo-türev olduğundan

$$\begin{aligned}
(h_1 + h_2)(x_1x_2) &= (h_1 + h_2)(x_1)(h_1 + h_2)(x_2) + (h_1 + h_2)(x_1)x_2 + x_1(h_1 + h_2)(x_2) \\
&= \big(h_1(x_1) + h_2(x_1)\big)\big(h_1(x_2) + h_2(x_2)\big) + \big(h_1(x_1) + h_2(x_1)\big)x_2 \\
&+ x_1\big(h_1(x_2) + h_2(x_2)\big) \\
&= h_1(x_1)h_1(x_2) + h_1(x_1)h_2(x_2) + h_2(x_1)h_1(x_2) + h_2(x_1)h_2(x_2) \\
&+ h_1(x_1)x_2 + h_2(x_1)x_2 + x_1h_1(x_2) + x_1h_2(x_2) \\
&= h_1(x_1)h_2(x_2) + h_2(x_1)h_1(x_2) + \underbrace{h_1(x_1)h_1(x_2) + h_1(x_1)x_2 + x_1h_1(x_2)}_{h_1\ homo-türev} \\
&+ \underbrace{h_2(x_1)h_2(x_2) + h_2(x_1)x_2 + x_1h_2(x_2)}_{h_2\ homo-türev} \\
&= h_1(x_1)h_2(x_2) + h_2(x_1)h_1(x_2) + h_1(x_1x_2) + h_2(x_1x_2)
\end{aligned}$$

sağlanır. Yani,

$$(h_1 + h_2)(x_1x_2) = h_1(x_1)h_2(x_2) + h_2(x_1)h_1(x_2) + h_1(x_1x_2) + h_2(x_1x_2), \forall x_1, x_2 \in R$$

dir. $(h_1 + h_2)(x_1x_2)$ ifadesi h_1 ve h_2 homo-türevleri yardımıyla düzenlediğimizde

$$(h_1 + h_2)(x_1x_2) = h_1(x_1x_2) + h_2(x_1x_2), \forall r_1, r_2 \in R$$

elde edilir. Son iki ifadeyi birlikte düşündüğümüzde

$$h_1(x_1)h_2(x_2) + h_2(x_1)h_1(x_2) = 0, \forall x_1, x_2 \in R$$

sonucuna varılır. Son ifadeden **Lemma 3.2.1.3** ışığında her $z_1 \in Z_R$ için $h_1(z_1) = h_2(z_1) = 0$ sonucuna varılır.

Teorem 3.2.1.5 R, 2-burulmasız bir asal halka ve h, R halkasının sıfır dönüşümünden farklı sıfır güç değerli homo-türevi olsun. h^2, R halkasının homo-türevi ise o zaman R değişmeli bir halka veya $h_{|_{Z_R}} = 0$ dır.

İspat: Varsayalım ki $h_{|_{Z_R}} \neq 0$ olsun. Keyfi $r_1, r_2 \in R$ alalım. h^2 homo-türev olduğundan

$$h^2(r_1r_2) = h^2(r_1)h^2(r_2) + h^2(r_1)r_2 + r_1h^2(r_2)$$

ifadesi sağlanır. Başka bir değişle $h^2(r_1r_2) = h\big(h(r_1r_2)\big)$ şeklinde düşündüğümüzde

$$\begin{aligned} h^2(r_1r_2) = h\big(h(r_1r_2)\big) &= h\big(h(r_1)h(r_2) + h(r_1)r_2 + r_1h(r_2)\big) \\ &= h^2(r_1)h^2(r_2) + h^2(r_1)h(r_2) + h(r_1)h^2(r_2) + h^2(r_1)h(r_2) + h^2(r_1)r_2 \\ &\quad + h(r_1)h(r_2) + h(r_1)h^2(r_2) + h(r_1)h(r_2) + r_1h^2(r_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki ifadeden $2\big(h^2(r_1)h(r_2) + h(r_1)h^2(r_2) + h(r_1)h(r_2)\big) = 0$ bulunur. R, 2-burulmasız olduğundan

$$h^2(r_1)h(r_2) + h(r_1)h^2(r_2) + h(r_1)h(r_2) = 0, \forall r_1, r_2 \in R \tag{3.26}$$

olur. (3.26) denkleminde $r_3 \in R$ olmak üzere r_1 yerine r_1r_3 yazıldığında elde edilen ifade h^2 ve h homo-türev olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} &h^2(r_1)h^2(r_3)h(r_2) + h^2(r_1)r_3h(r_2) + r_1h^2(r_3)h(r_2) + h(r_1)h(r_3)h^2(r_2) + h(r_1)r_3h^2(r_2) \\ &\quad + r_1h(r_3)h^2(r_2) + h(r_1)h(r_3)h(r_2) + h(r_1)r_3h(r_2) + r_1h(r_3)h(r_2) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan ifade $r_1h^2(r_3)h(r_2) + r_1h(r_3)h^2(r_2) + r_1h(r_3)h(r_2) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$h^2(r_1)h^2(r_3)h(r_2) + h^2(r_1)r_3h(r_2) + h(r_1)h(r_3)h^2(r_2) + h(r_1)r_3h^2(r_2) + h(r_1)h(r_3)h(r_2) + h(r_1)r_3h(r_2) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R \tag{3.27}$$

bulunur. Tekrardan (3.26) denkleminde r_2 yerine r_3r_2 yazıldığında elde edilen ifade h^2 ve h homo-türev olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$h^2(r_1)h(r_3)h(r_2) + h^2(r_1)h(r_3)r_2 + h^2(r_1)r_3h(r_2) + h(r_1)h^2(r_3)h^2(r_2) + h(r_1)h^2(r_3)r_2 + h(r_1)r_3h^2(r_2) + h(r_1)h(r_3)h(r_2) + h(r_1)h(r_3)r_2 + h(r_1)r_3h(r_2) = 0$$

olur. Bu ifade $h^2(r_1)h(r_3)r_2 + h(r_1)h^2(r_3)r_2 + h(r_1)h(r_3)r_2 = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$h^2(r_1)h(r_3)h(r_2) + h^2(r_1)r_3h(r_2) + h(r_1)h^2(r_3)h^2(r_2) + h(r_1)r_3h^2(r_2) + h(r_1)h(r_3)h(r_2) + h(r_1)r_3h(r_2) = 0, \ \forall r_1, r_2, r_3 \in R \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.27) ve (3.28) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde $h^2(r_1)h^2(r_3)h(r_2) - h^2(r_1)h(r_3)h(r_2) + h(r_1)h(r_3)h^2(r_2) - h(r_1)h^2(r_3)h^2(r_2) = 0$ olur. Bu ifade

$$h^2(r_1)h(h(r_3) - r_3)h(r_2) - \ h(r_1)h(h(r_3) - r_3)h^2(r_2) = 0$$

şeklinde yazılır. h, R halkası üzerinde sıfır güç değerli homo-türev olduğundan r_3 yerine $r_3 + h(r_3) + h^2(r_3) + h^3(r_3) + \cdots + h^{n(r_3)-1}(r_3)$ yazıldığında $h^2(r_1)h(-r_3)h(r_2) - h(r_1)h(-r_3)h^2(r_2) = 0$ olur. Bir başka deyişle,

$$h^2(r_1)h(r_3)h(r_2) - h(r_1)h(r_3)h^2(r_2) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

sonucuna varılır. $h_{|_{Z_R}} \neq 0$ olduğundan en az bir $0 \neq z \in Z_R$ vardır öyle ki $h(z) \neq 0$dır. Son ifadede r_3 yerine z yazıldığında elde edilen ifade $h(z) \in Z_R$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$\big(h^2(r_1)h(r_2) - h(r_1)h^2(r_2)\big)h(z) = 0, \forall r_1, r_2 \in R$$

bulunur. Buradan her $r_1, r_2 \in R$ için $\big(h^2(r_1)h(r_2) - h(r_1)h^2(r_2)\big)Rh(z) = 0$ elde edilir. R halkasının asallığı ve $h(z) \neq 0$ olması kullanılarak her $r_1, r_2 \in R$ için

$$h^2(r_1)h(r_2) - h(r_1)h^2(r_2) = 0$$

olur. (3.26) denklemi $h^2(r_1)h(r_2) - h(r_1)h^2(r_2) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$2h(r_1)h^2(r_2) + h(r_1)h(r_2) = 0, \forall r_1, r_2 \in R$$

sonucuna varılır. Bu ifade bir başka deyişle $h(r_1)(2h^2(r_2) + h(r_2)) = 0$ şeklinde yazılır. Burada r_1 yerine z yazıldığında elde edilen ifade $h(x) \in Z_R$ kullanılarak düzenlendiğinde $h(z)R(2h^2(r_2) + h(r_2)) = 0$ bulunur. R halkasının asallığı ve $h(z) \neq 0$ olması kullanılarak

$$h(r_2) = -2h^2(r_2), \quad \forall r_2 \in R$$

elde edilir. h ve h^2 homo-türevler olduğundan

$$h^2([r_1, r_2]) = [h^2(r_1), h^2(r_2)] + [h^2(r_1), r_2] + [r_1, h^2(r_2)] \tag{3.29}$$

$$h([r_1, r_2]) = [h(r_1), h(r_2)] + [h(r_1), r_2] + [r_1, h(r_2)] \tag{3.30}$$

ifadeleri sağlanır. $0 = 0 + 0 + 0$ ifadesinden yola çıkarak

$$\begin{aligned}(h^2([r_1, r_2]) + (-h^2([r_1, r_2]))) \\ &= \big([h^2(r_1), h^2(r_2)] + (-[h^2(r_1), h^2(r_2)])\big) \\ &+ \big([h^2(r_1), r_2] + (-[h^2(r_1), r_2])\big) + \big([r_1, h^2(r_2)] + (-[r_1, h^2(r_2)])\big)\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade (3.29) denklemi kullanılarak düzenlenirse

$$-h^2([r_1, r_2]) = -[h^2(r_1), h^2(r_2)] - [h^2(r_1), r_2] - [r_1, h^2(r_2)] \tag{3.31}$$

bulunur. (3.31) denklemini iki kere kendisi ile topladığımızda

$$-2h^2([r_1, r_2]) = -[2h^2(r_1), h^2(r_2)] - [2h^2(r_1), r_2] - [r_1, 2h^2(r_2)]$$

olur. Bu ifade $h(r_2) = -2h^2(r_2)$ yardımı ile düzenlendiğinde

$$(-2h^2)([r_1,r_2]) = [(-2h^2)(r_1),h^2(r_2)] + [(-2h^2)(r_1),r_2] + [r_1,(-2h^2)(r_2)]$$

elde edilir. Elde edilen ifade $h(r_2) = -2h^2(r_2)$ yardımıyla tekrar düzenlendiğinde

$$h([r_1,r_2]) = [h(r_1),h^2(r_2)] + [h(r_1),r_2] + [r_1,h(r_2)] \tag{3.32}$$

bulunur. (3.32) ve (3.30) denklemlerini birlikte düşündüğümüzde

$$[h(r_1),h^2(r_2) - h(r_2)] = 0, \forall r_1,r_2 \in R$$

olur. $0 = [h(r_1),h(h(r_2) - r_2)]$ şeklinde düzenlenir. Burada h sıfır güç değerli bir homo türev olduğundan r_2 yerine $r_2 + h(r_2) + h^2(r_2) + h^3(r_2) + \cdots + h^{n(r_2)-1}(r_2)$ yazıldığında $0 = \big[h(r_1),h\big(h(r_2 + h(r_2) + h^2(r_2) + h^3(r_2) + \cdots + h^{n(r_2)-1}(r_2)\ \big) - r_2 - h(r_2) - h^2(r_2) - h^3(r_2) - \cdots - h^{n(r_2)-1}(r_2)\ )\big] = [h(r_1),h(-r_2)] = -[h(r_1),h(r_2)]$ elde edilir. Yani,

$$[h(r_1),h(r_2)] = 0, \forall r_1,r_2 \in R$$

dir. **Teorem 2.62** gereğince R değişmelidir.

Lemma 3.2.1.6 R bir asal halka ve h, R halkasının sıfır güç değerli homo-türevi olsun. $h(R) \subset Z_R$ koşulu sağlanıyorsa R değişmeli bir halka veya $h_{|_{Z_R}} = 0$ dır. Ek olarak, $char(R) \neq 2,\ h(R) \subset Z_R$ ve $h_{|_{Z_R}} = 0$ ise $h = 0$ dır.

İspat: Keyfi $r_1,r_2 \in R$ alalım. Hipotezden $h(r_1r_2) \in Z_R$ dir. Bu ise $h(r_1)h(r_2) + h(r_1)r_2 + r_1h(r_2) \in Z_R$ demektir. Halkanın merkezi alt halka olduğundan $h(r_1)h(r_2) \in Z_R$ olur, bu bilgi ışığında

$$h(r_1)r_2 + r_1h(r_2) \in Z_R, \forall r_1,r_2 \in R$$

elde edilir. Son ifadede $z \in Z_R$ olmak üzere r_2 yerine r_2z yazıldığında

$$h(r_1)r_2z + r_1h(r_2z) = h(r_1)r_2z + r_1h(r_2)h(z) + r_1h(r_2)z + r_1r_2h(z)$$
$$= \big(h(r_1)r_2 + r_1h(r_2)\big)z + r_1(h(r_2) + r_2)h(z)$$

bulunur. $\big(h(r_1)r_2 + r_1h(r_2)\big)z + r_1(h(r_2) + r_2)h(z) \in Z_R$ ve $\big(h(r_1)r_2 + r_1h(r_2)\big)z \in Z_R$ olduğundan $r_1(h(r_2) + r_2)h(z) \in Z_R$ elde edilir. Son ifadede r_2 yerine $r_2 - h(r_2) + h^2(r_2) - h^3(r_2) + \cdots + (-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)-1}(r_2)$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
r_1\Big[h\Big(r_2 - h(r_2) + h^2(r_2) - h^3(r_2) + \cdots + (-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)-1}(r_2)\Big) + r_2 - h(r_2) \\
+ h^2(r_2) - h^3(r_2) + \cdots + (-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)-1}(r_2)\Big]h(z) \\
= r_1\big[h(r_2) - h^2(r_2) + h^3(r_2) - h^4(r_3) + \cdots + (-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)}(r_2) + r_2 \\
- h(r_2) + h^2(r_2) - h^3(r_2) + \cdots + (-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)-1}(r_2)\big]h(z) \\
= r_1\Big(r_2 + (-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)}(r_2)\Big)h(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. h, R halkasının sıfır güç değerli homo-türevi olduğu için $h^{n(r_2)}(r_2) = 0$ dır. Bu durumda $r_1\Big(r_2 + (-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)}(r_2)\Big)h(z) \in Z_R$ ifadesi $(-1)^{n(r_2)-1}h^{n(r_2)}(r_2) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$r_1r_2h(z) \in Z_R, \ \forall r_1, r_2 \in R, z \in Z_R$$

sonucuna varılır. **Lemma 2.58** gereğince her $r_1, r_2 \in R, z \in Z_R$ için $r_1r_2 \in Z_R$ veya $h(z) = 0$ bulunur. Bu aşamada ispat iki aşamada incelenecektir.

1.Durum: Her $r_1, r_2 \in R$ için $r_1r_2 \in Z_R$ olsun. Keyfi $r_3, r_4 \in R$ alalım. R halka olduğundan $(r_1r_2)r_3 \in Z_R$dir. Buradan $[(r_1r_2)r_3, r_4] = 0$ yazılır. Bu ifade $\boldsymbol{L_3}$ özelliği ve $r_1r_2 \in Z_R$ ifadesi kullanılarak düzenlendiğinde

$$0 = [(r_1r_2)r_3, r_4] = (r_1r_2)[r_3, r_4] + \underbrace{[(r_1r_2), r_4]r_3}_{=0,\ \text{çünkü}\ r_1r_2 \in Z_R}$$

elde edilir. Bu ise

$$(r_1r_2)[r_3, r_4] = 0, \forall\, r_1, r_2, r_3, r_4 \in R$$

demektir. R halkasının asallığı kullanılarak her $r_1, r_3, r_4 \in R$ $r_1 = 0$ veya $[r_3, r_4] = 0$ elde edilir. R halkası sıfır halkasından farklı olduğu için her $r_3, r_4 \in R$ için $[r_3, r_4] = 0$ dır. Dolayısıyla R halkası değişmelidir.

2.Durum: Her $z \in Z_R$ için $h(z) = 0$ olsun. Keyfi $r_1 \in R$ alalım.

$$h(r_1 z) = h(r_1)\underbrace{h(z)}_{=0} + h(r_1)z + r_1\underbrace{h(z)}_{=0} = h(r_1)z \overset{z \in Z_R}{\cong} zh(r_1)$$

sağlanır. Bu durumda her $r_1 \in R$ ve $z \in Z_R$ için $h(r_1 z) = h(r_1)z = zh(r_1) = h(zr_1)$ bulunur. Her $r_1, r_2 \in R$ için $h(r_1)r_2 + r_1 h(r_2) \in Z_R$ olduğu biliniyor. Bu durumda, $0 = h\big(h(r_1)r_2 + r_1 h(r_2)\big) = h^2(r_1)h(r_2) + h^2(r_1)r_2 + h(r_1)h(r_2) + h(r_1)h^2(r_2) + h(r_1)h(r_2) + r_1 h^2(r_2) = 2h(r_1)h(r_2)$ olur. Başka bir deyişle her $r_1, r_2 \in R$ için

$$2h(r_1)h(r_2) = 0$$

yazılır. Kabul edelim ki $charR \neq 2$ olsun. Bu durumda son eşitlikten $h(r_1)h(r_2) = 0$ yazılır. $h(R) \subset Z_R$ olduğundan her $r_1, r_2 \in R$ için $h(r_1)Rh(r_2) = 0$ dır. R halkasının asallığından $h = 0$ dır.

Teorem 3.2.1.7 R bir asal halka olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$h_1(r_1)h_2(r_2) = h_3(r_1)h_4(r_2)$$

olacak şekilde R halkasının sıfır güç değerli sıfır dönüşümünden farklı h_1, h_2, h_3, h_4 homotürevleri olsun.

i. $h_{1|_{Z_R}} \neq 0$ ise $h_1 = h_3$ ve $h_2 = h_4$ olur. Ek olarak, $h_{1|_{Z_R}} = 0$ ancak ve ancak $h_{3|_{Z_R}} = 0$ dır.

ii. $h_{2|_{Z_R}} \neq 0$ ise $h_1 = h_3$ ve $h_2 = h_4$ olur. Ek olarak, $h_{2|_{Z_R}} = 0$ ancak ve ancak $h_{4|_{Z_R}} = 0$ dır.

İspat:

i) Kabul edelim ki $h_{1_{|Z_R}} \neq 0$ olsun. O halde, en az bir $0 \neq z \in Z_R$ için $h_1(z) \neq 0$ vardır ve **Lemma 2.61** gereğince $h_1(z) \in Z_R$ dir. Hipotezde r_1 yerine $r_1 z$ alınırsa $h_1(r_1 z)h_2(r_2) = h_3(r_1 z)h_4(r_2)$ bulunur. h_1 ve h_3 homo-türev olduğundan,

$$h_1(r_1)h_1(z)h_2(r_2) + h_1(r_1)zh_2(r_2) + r_1h_1(z)h_2(r_2)$$
$$= h_3(r_1)h_3(z)h_4(r_2) + h_3(r_1)zh_4(r_2) + r_1h_3(z)h_4(r_2)$$

elde edilir. Bu ifade,

$$h_1(r_1)zh_2(r_2) \overset{z\in Z_R}{\cong} h_1(r_1)h_2(r_2)z \overset{h_1(r_1)h_2(r_2)=h_3(r_1)h_4(r_2)}{\cong} h_3(r_1)h_4(r_2)z \overset{z\in Z_R}{\cong} h_3(r_1)zh_4(r_2)$$

ve $r_1h_1(z)h_2(r_2) = r_1h_3(z)h_4(r_2)$ ifadeleri yardımıyla düzenlendiğinde $h_1(r_1)h_1(z)h_2(r_2) = h_3(r_1)h_3(z)h_4(r_2)$ bulunur. Son bulunan ifade $h_3(z)h_4(r_2) = h_1(z)h_2(r_2)$ ifadesi yardımıyla düzenlendiğinde

$$\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_1(z)h_2(r_2) = 0, \qquad \forall r_1, r_2 \in R$$

elde edilir. $h_1(z) \in Z_R$ olduğundan yukarıdaki ifadeden $\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2)Rh_1(z) = 0$ yazılır. R halkasının asal halka olması ve $h_1(z) \neq 0$ ifadesi birlikte düşünüldüğünde her $r_1, r_2 \in R$ için $\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2) = 0$ elde edilir. Burada $r_3 \in R$ olmak üzere r_2 yerine r_2r_3 yazıldığında $\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2r_3) = 0$ olur. Bu ise

$$0 = \big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2r_3) = \underbrace{\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2)h_2(r_3)}_{=0,\text{çünkü } (h_1(r_1)-h_3(r_1))h_2(r_2)=0} +$$

$$\underbrace{\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2)r_3}_{=0,\text{çünkü}(h_1(r_1)-h_3(r_1))h_2(r_2)=0} + \big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)r_2h_2(r_3) = \big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)r_2h_2(r_3)$$

demektir. Yani her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)r_2h_2(r_3)$=0 olur. Burada R halkasının asallığı ve h_2 homo-türevinin sıfırdan farklı olduğu birlikte düşüldüğünde her $r_1 \in R$ için $h_1(r_1) - h_3(r_1) = 0$ bulunur. Bu ise $h_1 = h_3$ demektir. Hipotez $h_1 = h_3$ ifadesi kullanılarak düzenlendiğinde

$$h_1(r_1)\big(h_2(r_2) - h_4(r_2)\big) = 0, \;\; \forall r_1, r_2 \in R$$

bulunur. $r_3 \in R$ içi bulunan ifadede r_1 yerine r_1r_3 yazıldığında $0 = h_1(r_1r_3)\big(h_2(r_2) - h_4(r_2)\big) = \underbrace{h_1(r_1)h_1(r_3)\big(h_2(r_2) - h_4(r_2)\big)}_{=0,\text{çünkü } h_1(r_3)(h_2(r_2)-h_4(r_2))=0} + h_1(r_1)r_3\big(h_2(r_2) - h_4(r_2)\big) +$

$\underbrace{r_1 h_1(r_3)\big(h_2(r_2) - h_4(r_2)\big)}_{=0, \text{çünkü } h_1(r_3)(h_2(r_2)-h_4(r_2))=0} = h_1(r_1) r_3 \big(h_2(r_2) - h_4(r_2)\big)$ bulunur. Burada R halkasının asallığı ve h_1 homo-türevinin sıfırdan farklı olduğu birlikte düşüldüğünde her $r_1 \in R$ için $h_2(r_1) - h_4(r_1) = 0$ bulunur. Bu ise $h_2 = h_4$ demektir.

Şimdi ise $h_{1|_{Z_R}} = 0$ olsun. Keyfi $z \in Z_R$ alalım. Hipotezde r_1 yerine z yazıldığında $\underbrace{h_1(z)}_{=0} h_2(r_2) = h_3(z) h_4(r_2)$ olur. Buradan her $r_2 \in R, z \in Z_R$ için $h_3(z) h_4(r_2) = 0$ dır. En son ifadede $r_3 \in R$ olmak üzere r_2 yerine $r_2 r_3$ yazıldığında

$$
\begin{aligned}
0 = h_3(z) h_4(r_2 r_3) &= \underbrace{h_3(z) h_4(r_2)}_{=0} h_4(r_3) + \underbrace{h_3(z) h_4(r_2)}_{=0} r_3 + h_3(z) r_2 h_4(r_3) \\
&= h_3(z) r_2 h_4(r_3)
\end{aligned}
$$

bulunur. Her $r_2, r_3 \in R, z \in Z_R$ için $h_3(z) r_2 h_4(r_3) = 0$ dır. R halkasının asallığından ve h_4 homo-türevinin sıfır dönüşümünden farklı olduğundan her $z \in Z_R$ için $h_3(z) = 0$ sonucuna varılır. Böylece,

$$h_{1|_{Z_R}} = 0 \Rightarrow h_{3|_{Z_R}} = 0$$

dır. Şimdi ise $h_{3|_{Z_R}} = 0$ olsun. Keyfi $z \in Z_R$ alalım. Hipotezde r_1 yerine z yazıldığında $h_1(z) h_2(r_2) = \underbrace{h_3(z)}_{=0} h_4(r_2)$ olur. Buradan her $r_2 \in R, z \in Z_R$ için $h_1(z) h_2(r_2) = 0$ dır. $r_3 \in R$ olmak üzere en son ifedede r_2 yerine $r_2 r_3$ yazıldığında

$$
\begin{aligned}
0 = h_1(z) h_2(r_2 r_3) &= \underbrace{h_1(z) h_2(r_2)}_{=0} h_2(r_3) + \underbrace{h_1(z) h_2(r_2)}_{=0} r_3 + h_1(z) r_2 h_2(r_3) \\
&= h_1(z) r_2 h_2(r_3)
\end{aligned}
$$

bulunur. Her $r_2, r_3 \in R, z \in Z_R$ için $h_1(z) r_2 h_2(r_3) = 0$ dır. R halkasının asallığından ve h_2 homo-türevinin sıfır dönüşümünden farklı olduğundan her $z \in Z_R$ için $h_1(z) = 0$ bulunur. Böylece,

$$h_{3|_{Z_R}} = 0 \Rightarrow h_{1|_{Z_R}} = 0$$

dır. O halde,

$$h_{1|_{Z_R}} = 0 \Leftrightarrow h_{3|_{Z_R}} = 0$$

sonucuna varılır.

ii) Varsayalım ki $h_{2}|_{Z_R} \neq 0$ olsun. O halde, $h_2(z) \neq 0$ koşulunu sağlayan en az bir $0 \neq z \in Z_R$ vardır. **Lemma 2.61** gereğince $h_2(z) \in Z_R$ dir. Hipotezde r_2 yerine $r_2 z$ yazıldığında $h_1(r_1)h_2(r_2 z) = h_3(r_1)h_4(r_2 z)$ olur. Bu ifade h_2 ve h_4 dönüşümlerinin homo-türev olmaları kullanılarak düzenlediğinde $h_1(r_1)h_2(r_2)h_2(z) + h_1(r_1)h_2(r_2)z + h_1(r_1)r_2h_2(z) = h_3(r_1)h_4(r_2)h_4(z) + h_3(r_1)h_4(r_2)z + h_3(r_1)r_2h_4(z)$ bulunur. Bu ifade $h_1(r_1)h_2(r_2)z = h_3(r_1)h_4(r_2)z$ ve $h_1(r_1)r_2h_2(z) \overset{h_2(z)\in Z_R}{\triangleq} h_1(r_1)h_2(z)r_2 \overset{h_1(r_1)h_2(z)=h_3(r_1)h_4(z)}{\triangleq} h_3(r_1)h_4(z)r_2$ ifadeleri kullanılarak düzenlendiğinde her $r_1, r_2 \in R$ için $h_1(r_1)h_2(r_2)h_2(z) = h_3(r_1)h_4(r_2)h_4(z)$ elde edilir. Burada $h_2(z), h_4(z) \in Z_R$ olduğundan $h_1(r_1)h_2(z)h_2(r_2) = h_3(r_1)h_4(z)h_4(r_2)$ olur ve bu ifadede $h_3(r_1)h_4(z) = h_1(r_1)h_2(z)$ ifadesi kullanılarak tekrar düzenlendiğinde

$h_1(r_1)h_2(z)h_2(r_2) = h_1(r_1)h_2(z)h_4(r_2)$ elde edilir. Yani her $r_1, r_2 \in R$ için

$$h_1(r_1)h_2(z)(h_2(r_2) - h_4(r_2)) = 0$$

dır. $h_2(z) \in Z_R$ olduğundan yukarıdaki ifade $h_2(z)h_1(r_1)(h_2(r_2) - h_4(r_2)) = 0$ şeklinde yazılır. Bu ifadeden her $r_1, r_2 \in R$ için $h_2(z)Rh_1(r_1)(h_2(r_2) - h_4(r_2)) = 0$ elde edilir. R halkasının asallığı ve $h_2(z) \neq 0$ ifadesi kullanılarak her $r_1, r_2 \in R$ için $h_1(r_1)(h_2(r_2) - h_4(r_2)) = 0$ bulunur. Bu ifadede $r_3 \in R$ olmak üzere $r_1 = r_1 r_3$ yazıldığında $h_1(r_1 r_3)(h_2(r_2) - h_4(r_2)) = 0$ olur. Buradan

$$0 = \underbrace{h_1(r_1)h_1(r_3)(h_2(r_2) - h_4(r_2))}_{=0, \text{çünkü } h_1(r_3)(h_2(r_2)-h_4(r_2))=0} + h_1(r_1)r_3(h_2(r_2) - h_4(r_2))$$
$$+ \underbrace{r_1h_1(r_3)(h_2(r_2) - h_4(r_2))}_{=0, \text{ çünkü } h_1(r_3)(h_2(r_2)-h_4(r_2))=0} = h_1(r_1)r_3(h_2(r_2) - h_4(r_2))$$

dır. Yani,

$$h_1(r_1)r_3(h_2(r_2) - h_4(r_2)) = 0, \forall r_1, r_2, r_3 \in R$$

olur. Burada R halkasının asallığı ve h_1 homo-türevinin sıfırdan farklı olması kullanılarak her $r_2 \in R$ için $h_2(r_2) - h_4(r_2) = 0$ bulunur. Bu ise $h_2 = h_4$ demektir. Hipotez $h_2 = h_4$ ifadesi kullanılarak düzenlendiğinde

$$\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2) = 0, \forall r_1, r_2 \in R$$

bulunur. Bulunan son ifadede $r_3 \in R$ olmak üzere r_2 yerine $r_2 r_3$ yazıldığında $0 = \big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2 r_3) = \underbrace{\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2)h_2(r_3)}_{=0, çünkü\ (h_1(r_1)-h_3(r_1))h_2(r_2)=0} +$

$$\underbrace{\big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)h_2(r_2)r_3}_{=0, çünkü\ (h_1(r_1)-h_3(r_1))h_2(r_2)=0} + \big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)r_2 h_2(r_3) = \big(h_1(r_1) - h_3(r_1)\big)r_2 h_2(r_3)$$

elde edilir. Burada R halkasının asallığı ve h_2 homo-türevinin sıfırdan farklı olması kullanılarak her $r_1 \in R$ için $h_1(r_1) - h_3(r_1) = 0$ bulunur. Bu ise $h_1 = h_3$ demektir.

Şimdi ise $h_{2|_{Z_R}} = 0$ olsun. Keyfi $z \in Z_R$ alalım. Hipotezde r_2 yerine z yazıldığında $h_1(r_1)\underbrace{h_2(z)}_{=0} = h_3(r_1)h_4(z)$ olur. Buradan her $r_1 \in R, z \in Z_R$ için $h_3(r_1)h_4(z) = 0$ bulunur. En son ifadede $r_3 \in R$ olmak üzere r_1 yerine $r_1 r_3$ yazıldığında

$$0 = h_3(r_1 r_3)h_4(z) = \underbrace{h_3(r_1)h_3(r_3)h_4(z)}_{=0,\ çünkü\ h_3(r_3)h_4(z)=0} + h_3(r_1)r_3 h_4(z) + \underbrace{r_1 h_3(r_3)h_4(z)}_{=0,\ çünkü\ h_3(r_3)h_4(z)=0}$$

bulunur. Her $r_1, r_3 \in R, z \in Z_R$ için $h_3(r_1)r_3 h_4(z) = 0$ dır. R halkasının asallığından ve h_3 homo-türevinin sıfır dönüşümünden farklı olduğu birlikte düşünüldüğünde her $z \in Z_R$ için $h_4(z) = 0$ olur. Böylece,

$$h_{2|_{Z_R}} = 0 \Rightarrow h_{4|_{Z_R}} = 0$$

dır. Şimdi ise $h_{4|_{Z_R}} = 0$ olsun. Keyfi $z \in Z_R$ alalım. Hipotezde r_2 yerine z yazıldığında $h_1(r_1)h_2(z) = h_3(r_1)\underbrace{h_4(z)}_{=0}$ olur. Buradan her $r_1 \in R, z \in Z_R$ için $h_1(r_1)h_2(z) = 0$ bulunur. Bulunan ifadede $r_3 \in R$ olmak üzere r_1 yerine $r_1 r_3$ yazıldığında

$$\begin{aligned} 0 = h_1(r_1 r_3)h_2(z) &= \underbrace{h_1(r_1)h_1(r_3)h_2(z)}_{=0, çünkü\ h_1(r_3)h_2(z)=0} + h_1(r_1)r_3 h_2(z) + \underbrace{r_1 h_1(r_3)h_2(z)}_{=0, çünkü\ h_1(r_3)h_2(z)=0} \\ &= h_1(r_1)r_3 h_2(z) \end{aligned}$$

bulunur. Her $r_1, r_3 \in R, z \in Z_R$ için $h_1(r_1)r_3 h_2(z) = 0$ dır. R halkasının asallığından ve h_1 homo-türevinin sıfır dönüşümünden farklı olduğu birlikte düşünüldüğünde her $z \in Z_R$ için $h_2(z) = 0$ dır. Böylece,

$$h_{4|_{Z_R}} = 0 \Rightarrow h_{2|_{Z_R}} = 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$h_{2|_{Z_R}} = 0 \Leftrightarrow h_{4|_{Z_R}} = 0$$

sonucuna varılır. Yapılanlar aşağıda özetlenmiştir.

$$\begin{bmatrix} & h_{1|_{Z_R}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ h_{1|_{Z_R}} = 0 & & h_{1|_{Z_R}} \neq 0 \\ \Updownarrow & & \Downarrow \\ h_{3|_{Z_R}} = 0 & & h_1 = h_3 \; ve \; h_2 = h_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & h_{2|_{Z_R}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ h_{2|_{Z_R}} = 0 & & h_{2|_{Z_R}} \neq 0 \\ \Updownarrow & & \Downarrow \\ h_4(Z_R) = 0 & & h_2 = h_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & h_{3|_{Z_R}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ h_{3|_{Z_R}} = 0 & & h_{3|_{Z_R}} \neq 0 \\ \Updownarrow & & \Downarrow \\ h_{1|_{Z_R}} = 0 & & h_{1|_{Z_R}} \neq 0 \\ & & \Downarrow \\ & & h_1 = h_3 \; ve \; h_2 = h_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & h_{4|_{Z_R}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ h_{4|_{Z_R}} = 0 & & h_{4|_{Z_R}} \neq 0 \\ \Updownarrow & & \Downarrow \\ h_{2|_{Z_R}} = 0 & & h_{2|_{Z_R}} \neq 0 \\ & & \Downarrow \\ & & h_1 = h_3 \; ve \; h_2 = h_4 \end{bmatrix}$$

Örnek 3.2.1.8 R sıfırdan farklı sıfır böleni bulunmayan birimli bir halka ve

$$\kappa = \{r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22} | r_{11}, r_{12}, r_{22} \in R\}$$

bileşenleri R halkasının elemanı olan 2×2 tipindeki matrislerin halkası olan $M_2(R)$ nin alt halkası olsun. $0_\kappa \neq 1_R e_{22}, 1_R e_{11} \in \kappa$ ve keyfi bir $r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22} \in \kappa$ için $1_R e_{22}(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})1_R e_{11} = 0_\kappa$ dır. O halde, κ **asal halka değildir.**

$$Z_\kappa = \{z_{11}e_{11} + z_{11}e_{22} | z_{11} \in R\}$$

şeklinde tanımlanan küme κ halkasının merkezidir.

$$h_1 : \kappa \to \kappa, h_1(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = -r_{11}e_{11} - r_{12}e_{12}$$

ve

$$h_2 : \kappa \to \kappa, h_2(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = -r_{12}e_{11} - r_{22}e_{22}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümlerin kapalı ve iyi tanımlı olduğu kolayca görülür. Keyfi $r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}, s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22} \in \kappa$ alalım.

$$\begin{aligned}
&h_1(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22}+s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\\
&\qquad=h_1\big((r_{11}+s_{11})e_{11}+(r_{12}+s_{12})e_{12}+(r_{22}+s_{22})e_{22}\big)\\
&\qquad=-(r_{11}+s_{11})e_{11}-(r_{12}+s_{12})e_{12}\\
&\qquad=(-r_{11}e_{11}-r_{12}e_{12})+(-s_{11}e_{11}-s_{12}e_{12})\\
&\qquad=h_1(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})+h_1(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})
\end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından h_1 toplamayı korur.

$$\begin{aligned}
&h_1\big((r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\big)\\
&\qquad=h_1(r_{11}s_{11}e_{11}+(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{22})e_{12}+r_{22}s_{22}e_{22})\\
&\qquad=-r_{11}s_{11}e_{11}-(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&h_1(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})h_2(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\\
&\qquad+h_1(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\\
&\qquad+(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})h_1(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\\
&\qquad=(-r_{11}e_{11}-r_{12}e_{12})(-s_{11}e_{11}-s_{12}e_{12})\\
&\qquad+(-r_{11}e_{11}-r_{12}e_{12})(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\\
&\qquad+(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})(-s_{11}e_{11}-s_{12}e_{12})\\
&\qquad=-r_{11}s_{12}e_{11}-(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{22})e_{12}
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından h_1 toplamsal dönüşümü homo-türevdir.

$$\begin{aligned}
&h_2\big((r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})+(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\big)\\
&\qquad=h_2\big((r_{11}+s_{11})e_{11}+(r_{12}+s_{12})e_{12}+(r_{22}+s_{22})e_{22}\big)\\
&\qquad=-(r_{12}+s_{12})e_{11}-(r_{22}+s_{22})e_{22}\\
&\qquad=(-r_{12}e_{11}-r_{22}e_{22})+(-s_{12}e_{11}-s_{22}e_{22})\\
&\qquad=h_2(r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})+h_2(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})
\end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından h_2 toplamayı korur.

$$\begin{aligned}
&h_2\big((r_{11}e_{11}+r_{12}e_{12}+r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11}+s_{12}e_{12}+s_{22}e_{22})\big)\\
&\qquad=h_2(r_{11}s_{11}e_{11}+(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{22})e_{12}+r_{22}s_{22}e_{22})\\
&\qquad=-(r_{11}s_{12}+r_{12}s_{22})e_{12}-r_{22}s_{22}e_{22}
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
h_2(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})&h_2(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\
&+ h_2(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\
&+ (r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})h_1(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\
&= (-r_{12}e_{11} - r_{22}e_{22})(-s_{12}e_{11} - s_{22}e_{22}) \\
&+ (-r_{12}e_{11} - r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\
&+ (r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(-s_{12}e_{11} - s_{22}e_{22}) \\
&= -(r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} - r_{22}s_{22}e_{22}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlandığından h_2 toplamsal dönüşümü homo-türevdir. Bu bilgiler doğrultusunda $\kappa \times \kappa$ halkası üzerinde keyfi $x = r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}, y = s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22} \in \kappa$ olmak üzere,

$$
\begin{array}{llcl}
H_1 & : \kappa \times \kappa & \rightarrow & \kappa \times \kappa \\
 & \quad (x, y) & \rightarrow & (h_1(x), 0_\kappa) \\
H_2 & : \kappa \times \kappa & \rightarrow & \kappa \times \kappa \\
 & \quad (x, y) & \rightarrow & (0_\kappa, h_1(y)) \\
H_3 & : \kappa \times \kappa & \rightarrow & \kappa \times \kappa \\
 & \quad (x, y) & \rightarrow & (h_2(x), 0_\kappa) \\
H_4 & : \kappa \times \kappa & \rightarrow & \kappa \times \kappa \\
 & \quad (x, y) & \rightarrow & (0_\kappa, h_2(y))
\end{array}
$$

şeklinde tanımlansın. H_1, H_2, H_3 ve H_4 dönüşümleri h_1 ve h_2 homo-türevleri ile belirli olduğundan kapalı, iyi tanımlı ve $\kappa \times \kappa$ halkasının homo-türevleridir. $\kappa \times \kappa$ halkası asal halka değildir ve merkezi $Z_{\kappa\times\kappa} = \{(z_{11}e_{11} + z_{11}e_{22}, \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{11}e_{22} | z_{11}, \alpha_{11} \in Z_\kappa\}$ şeklindedir. Keyfi $X, Y \in \kappa \times \kappa$ için,

$$H_1(X)H_2(Y) = H_3(X)H_4(Y)$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür. Fakat ne $H_1 = H_3$ ve $H_2 = H_4$ ne de ${H_1}_{|Z_{\kappa\times\kappa}} = 0$, ${H_2}_{|Z_{\kappa\times\kappa}} = 0, {H_3}_{|Z_{\kappa\times\kappa}} = 0$ ve ${H_4}_{|Z_{\kappa\times\kappa}} = 0$ eşitlikleri sağlanır. O halde, **Teorem 4.1.7** nın ön koşulunda bulunan seçilen halkanın asallığı veya seçilen homo-türevlerin sıfır güç değerli olması **Teorem 3.2.1.7** için kaldırılamaz hipotezlerdir.

Sonuç 3.2.1.9 R bir asal halka olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$h_1(r_1)h_1(r_2) = h_2(r_1)h_2(r_2)$$

olacak şekilde R halkasının sıfır güç değerli sıfır dönüşümünden farklı h_1 ve h_2 homo-türevleri olsun. Bu durumda, $h_1 = h_2$ veya $h_{1|_{Z_R}} = h_{2|_{Z_R}} = 0$ dır.

Sonuç 3.2.1.10 R bir asal halka olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için

$$h_1(r_1)h_2(r_2) = h_2(r_1)h_1(r_2)$$

olacak şekilde R halkasının sıfır güç değerli sıfır dönüşümünden farklı h_1 ve h_2 homo-türevleri olsun. Bu durumda, $h_1 = h_2$ veya $h_{1|_{Z_R}} = h_{2|_{Z_R}} = 0$ dır.

Teorem 3.2.1.11 R bir asal halka, h_1 ve h_2, R halkasının sıfır güç değerli sıfır dönüşümünden farklı homo-türevleri olsun. $a, b \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için

$$ah_1(r) + h_2(r)b = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $a = -b \in Z_R$ veya $h_{1|_{Z_R}} = h_{2|_{Z_R}} = 0$ dır.

İspat: $a = b = 0$ olması durumunda ispat gerçeklenir. Dolayısıyla, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olması durumunu inceleceğiz. Varsayalım ki $h_{1|_{Z_R}} = 0$ olsun. Hipotezde $z \in Z_R$ olmak üzere r yerine z yazıldığında $ah_1(z) + h_2(z)b = 0$ olur. Bu ifade $h_1(z) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde $h_2(z)b = 0$ bulunur. **Lemma 2.61** gereğince $h_2(z) \in Z_R$dir. Dolayısıyla, $h_2(z)Rb = 0$ bulunur. R halkasının asallığı ve $b \neq 0$ olması kullanılarak $h_2(z) = 0$ dır. Keyfi bir $z \in Z_R$ için gerçeklendiğinden her $z \in Z_R$için gerçeklenir. O halde $h_{2|_{Z_R}} = 0$ dır. Bu durumda

$$h_{1|_{Z_R}} = 0 \Rightarrow h_{2|_{Z_R}} = 0$$

sonucuna varılır. Şimdi ise $h_{2|_{Z_R}} = 0$ olsun. Keyfi $z \in Z_R$ alalım. Hipotezde r yerine z yazıldığında elde edilen ifade $h_2(z) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde $ah_1(z) = 0$ bulunur. **Lemma 2.61** gereğince $h_1(z) \in Z_R$dir. Bu bilgiler ışığında $aRh_1(z) = 0$ elde edilir. R halkasının asallığı ve $a \neq 0$ olması kullanıldığında $h_1(z) = 0$ dır. Bu durum her $z \in Z_R$ için gerçekleneceğinden $h_{2_{|Z_R}} = 0$ bulunur. O halde

$$h_{2_{|Z_R}} = 0 \Rightarrow h_{1_{|Z_R}} = 0$$

bulunur. Bu iki durumdan

$$h_{1_{|Z_R}} = 0 \Leftrightarrow h_{2_{|Z_R}} = 0$$

sonucuna varılır.

Varsayalım ki $h_{1_{|Z_R}} \neq 0$ olsun. O halde, en az bir $0 \neq z \in Z_R$ vardır öyle ki $h_1(z) \neq 0$ dır. **Lemma 2.61** gereğince $h_1(z), h_2(z) \in Z_R$ dir. Hipotezde r yerine rz yazıldığında $ah_1(rz) + h_2(rz)b = 0$ olur. Son ifade h_1 ve h_2 dönüşümlerinin homo-türev olması kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 = {} & ah_1(r)h_1(z) + ah_1(r)z + arh_1(z) + h_2(r)h_2(z)b + h_2(r)zb \\ & + rh_2(z)b \overset{b\in Z_R}{\cong} \underbrace{(ah_1(r) + h_2(r)b)z}_{=0, çünkü\ ah_1(r)+h_2(r)b=0} + ah_1(r)h_1(z) + h_2(r)h_2(z)b \\ & + arh_1(z) + rh_2(z) = ah_1(r)h_1(z) + h_2(r)h_2(z)b + arh_1(z) + rh_2(z)b \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a(h_1(r) + r)h_1(z) + (h_2(r)+r)h_2(z)b = 0$$

yazılır. Son ifadede $h_2(z)b = -ah_1(z)$ yazıldığında elde edilen ifade $h_1(z) \in Z_R$ olması kullanıldığında

$$(a(h_1(r) + r) - (h_2(r) + r)a)h_1(z) = 0$$

olur. Buradan $(a(h_1(r) + r) - (h_2(r) + r)a)Rh_1(z) = 0$ olur. R halkasının asallığı ve $h_1(z) \neq 0$ olması kullanılarak her $r \in R$ için $(a(h_1(r) + r) - (h_2(r) + r)a) = 0$ bulunur. $h_{1_{|Z_R}} \neq 0$ olduğu için $h_{1_{|Z_R}} \neq 0$ olduğu bulunur. Dolayısıyla, $0 \neq z \in Z_R$ için $h_2(z) \neq 0$ dır. $(a(h_1(r) + r) - (h_2(r) + r)a) = 0$ ifadesinde r yerine z yazıldığında,

$$ah_1(z) - h_2(z)a = 0 \tag{3.33}$$

demektir. Burada $h_2(z)b = -ah_1(z)$ olması kullanıldığında

$$h_2(z)(a+b) = 0$$

elde edilir. $h_2(z) \in Z_R$ olduğundan son ifadeden $h_2(z)R(a+b) = 0$ yazılır. R halkasının asallığı ve $h_2(z) \neq 0$ olması kullanıldığında $a + b = 0$ bulunur. Bu ise $a = -b$ demektir. Keyfi $r \in R$ alalım. Hipotezi $a = -b$ ifadesi kullanılarak düzenlendiğinde

$$ah_1(r) - h_2(r)a = 0$$

elde edilir. Burada $z \in Z_R$ olmak üzere $r = rz$ yazıldığında $ah_1(rz) - h_2(rz)a = ah_1(r)h_1(z) + ah_1(r)z + arh_1(z) - h_2(r)h_2(z)a - h_2(r)za - rh_2(z)a = 0$ bulunur. Bulunan bu ifade $h_2(r)za = h_2(r)az$ ve $h_2(z) \in Z_R$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 0 &= ah_1(r)h_1(z) + ah_1(r)z + arh_1(z) - h_2(r)h_2(z)a - h_2(r)az - rh_2(z)a \\ &= \underbrace{(ah_1(r) + h_2(r)a)z}_{=0} + (ar - ra)h_2(z) + ah_1(r)h_1(z) - h_2(r)h_2(z)a \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede $h_2(r)h_2(z)a = h_2(r)ah_1(z) = ah_1(r)h_1(z)$ olması kullanıldığında $0 = (ar - ra)h_2(z) + ah_1(r)h_1(z) - h_2(r)h_2(z)a = (ar - ra)h_2(z) + ah_1(r)h_1(z) - ah_1(r)h_1(z)$ bulunur. Bu ise her $r \in Z_R$ için $0 = (ar - ra)h_2(z)$ demektir. Buradan $h_2(z) \in Z_R$ olduğundan $0 = (ar - ra)Rh_2(z)$ yazılır. R halkasının asallığı ve $h_2(z) \neq 0$ olması kullanıldığında $a \in Z_R$ elde edilir. $h_{1_{|Z_R}} \neq 0$ durumunda $h_{2_{|Z_R}} \neq 0$ dır. Dolayısıyla $h_{2_{|Z_R}}$ olması durumunda da ispat tamamlanmış oldu.

Örnek 3.2.1.12 R sıfırdan farklı sıfır böleni bulunmayan birimli bir halka ve

$$\kappa = \{r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22} | r_{11}, r_{12}, r_{22} \in R\}$$

bileşenleri R halkasının elemanı olan 2×2 tipindeki matrislerin halkası olan $M_2(R)$ nin alt halkası olsun. $\begin{bmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{bmatrix} \in \kappa$ ve keyfi bir $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0_R & r_{22} \end{bmatrix} \in \kappa$ için $\begin{bmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0_R & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{bmatrix}$ dır. O halde, κ **asal halka değildir.**

$$Z_\kappa = \{z_{11}e_{11} + z_{12}e_{12} + z_{22}e_{22} | z_{11}, z_{12}, z_{22} \in R\}$$

κ halkasının merkezidir.

$$h_1 : \kappa \to \kappa, h_1(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = -r_{11}e_{11} - r_{12}e_{12}$$

Ve

$$h_2 : \kappa \to \kappa, h_2(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) = -r_{12}e_{11} - r_{22}e_{22}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümlerin kapalı ve iyi tanımlı olduğu kolayca görülür. Keyfi $r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}, s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22} \in \kappa$ alalım.

$$\begin{aligned} h_1(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22} + s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &= h_1\big((r_{11} + s_{11})e_{11} + (r_{12} + s_{12})e_{12} + (r_{22} + s_{22})e_{22}\big) \\ &= -(r_{11} + s_{11})e_{11} - (r_{12} + s_{12})e_{12} \\ &= (-r_{11}e_{11} - r_{12}e_{12}) + (-s_{11}e_{11} - s_{12}e_{12}) \\ &= h_1(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) + h_1(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından h_1 toplamayı korur.

$$\begin{aligned} h_1\big((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\big) \\ &= h_1(r_{11}s_{11}e_{11} + (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} + r_{22}s_{22}e_{22}) \\ &= -r_{11}s_{11}e_{11} - (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_1(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})h_2(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &+ h_1(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &+ (r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})h_1(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &= (-r_{11}e_{11} - r_{12}e_{12})(-s_{11}e_{11} - s_{12}e_{12}) \\ &+ (-r_{11}e_{11} - r_{12}e_{12})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &+ (r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(-s_{11}e_{11} - s_{12}e_{12}) \\ &= -r_{11}s_{12}e_{11} - (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından h_1 toplamsal dönüşümü homo-türevdir.

$$\begin{aligned} h_2\big((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) + (s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\big) \\ &= h_2\big((r_{11} + s_{11})e_{11} + (r_{12} + s_{12})e_{12} + (r_{22} + s_{22})e_{22}\big) \\ &= -(r_{12} + s_{12})e_{11} - (r_{22} + s_{22})e_{22} \\ &= (-r_{12}e_{11} - r_{22}e_{22}) + (-s_{12}e_{11} - s_{22}e_{22}) \\ &= h_2(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22}) + h_2(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından h_2 toplamayı korur.

$$\begin{aligned} h_2\big((r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22})\big) \\ &= h_2(r_{11}s_{11}e_{11} + (r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} + r_{22}s_{22}e_{22}) \\ &= -(r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} - r_{22}s_{22}e_{22} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_2(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})h_2(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &+ h_2(r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &+ (r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})h_2(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &= (-r_{12}e_{11} - r_{22}e_{22})(-s_{12}e_{11} - s_{22}e_{22}) \\ &+ (-r_{12}e_{11} - r_{22}e_{22})(s_{11}e_{11} + s_{12}e_{12} + s_{22}e_{22}) \\ &+ (r_{11}e_{11} + r_{12}e_{12} + r_{22}e_{22})(-s_{12}e_{11} - s_{22}e_{22}) \\ &= -(r_{11}s_{12} + r_{12}s_{22})e_{12} - r_{22}s_{22}e_{22} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından h_2 toplamsal dönüşümü homo-türevdir. $\alpha = -1_R e_{11}$ ve $\beta = 1_R e_{11} + 1_R e_{22}$, κ halkasının belirli elemanları olsun.

$$\alpha h_1(X) + h_2(X)\beta = 0$$

Sağlanır. Fakat $\alpha = -\beta$ ve $h_{1_{|Z_\kappa}} = 0$, $h_{2_{|Z_\kappa}} = 0$ eşitlikleri sağlanmaz. Dolayısı ile **Teorem 3.2.1.11** ön koşullarını oluşturan asallık veya homo-türevlerin sıfır güç değerli olması kaldırılamaz koşuldur.

3.2.2. Asal Halkaların Lie İdealleri Üzerine Homo-Türevler

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R, $char(R) \neq 2$ koşulunu sağlayan bir asal halkadır.

Lemma 3.2.2.1 $(0) \neq L, R$ halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer h, R nin bir homo-türevi olmak üzere her $x_1 \in L$ için $h(x_1) = 0$ koşulu sağlanıyorsa o zaman $L \subset Z_R$dir.

İspat: Keyfi $x_1 \in L, r_1 \in R$ alalım. h, R halkasının homo-türevi olduğundan

$$h([x_1,r_1]) = [h(x_1),h(r_1)] + [h(x_1),r_1] + [x_1,h(r_1)]$$

ifadesi sağlanır. Bu ifade $h(L) = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$[x_1,h(r_1)] = 0, \qquad \forall x_1 \in L, r_1 \in R$$

bulunur. Elde edilen son ifadede $x_2 \in L$ olmak üzere r_1 yerine r_1x_2 yazıldığında $0 = [x_1,h(r_1x_2)] = [x_1,h(r_1)h(x_2) + h(r_1)x_2 + r_1h(x_2)] = \underbrace{[x_1,h(r_1)h(x_2)]}_{=0,\text{çünkü } h(x_2)=0} + [x_1,h(r_1)x_2] + \underbrace{[x_1,r_1h(x_2)]}_{=0,\text{çünkü } h(x_2)=0} = h(r_1)[x_1,x_2] + \underbrace{[x_1,h(r_1)]x_2}_{=0,(4.2)\,ifadesinden}$ olur. Buradan

$$h(r_1)[x_1,x_2] = 0, \qquad \forall x_1,x_2 \in L, r_1 \in R$$

elde edilir. Bu ifadede $r_2 \in R$ olmak üzere $r_1 = r_1r_2$ yazıldığında

$$0 = h(r_1r_2)[x_1,x_2] = h(r_1)h(r_2)[x_1,x_2] + h(r_1)r_2[x_1,x_2] + r_1h(r_2)[x_1,x_2]$$

bulunur. Bu ifade $h(r_1)[x_1,x_2] = 0$ olması kullanılarak düzenlendiğinde

$$h(r_1)r_2[x_1,x_2] = 0, \qquad \forall x_1,x_2 \in L, r_1,r_2 \in R$$

olur. R halkasının asallığı ve h sıfır dönüşümünden farklı homo-türev olması birlikte düşündüğümüzde

$$[x_1,x_2] = 0, \qquad \forall x_1,x_2 \in L$$

elde edilir. Bu ifadede $r_1 \in R$ olmak üzere x_2 yerine $[x_2,r_1]$ yazıldığında $[x_1,[x_2,r_1]\,] = 0$ bulunur. $I_{x_1}: R \to R,\ I_{x_1}(r) = [x_1,r]$ ve $I_{x_2}: R \to R,\ I_{x_2}(r) = [x_2,r]$ şeklinde tanımlanan iki iç türev olmak üzere $[x_1,[x_2,r_1]\,] = 0$ ifadesi iç türev tanımları kullanılarak her $r_1 \in R$ için $I_{x_1}I_{x_2}(r_1) = 0$ şeklinde yazılır. Buradan **Teorem 2.60** gereğince $I_{x_1} = 0$ veya $I_{x_2} = 0$ elde edilir. Her iki durumda her $x_1 \in L, r_1 \in R$ için $[x_1,r_1] = 0$ sonucunu verir. Bu ise $L \subset Z_R$ olması demektir.

Lemma 3.2.2.2 L, R halkasının sıfır idealinden farklı bir kare kapalı Lie ideali olsun. Eğer h, R halkasının bir homo-türevi olmak üzere her $x_1 \in L$ için $h(x_1) \in Z_R$ koşulu sağlanıyorsa, o zaman $L \subset Z_R$dir.

İspat: Keyfi $x_1 \in L$ ve $r_1 \in R$ alalım. Hipotez kullanılarak

$$[h(x_1), r_1] = 0$$

yazılır. Son eşitlikte x_1 yerine x_1^2 yazıldığında $[h(x_1^2), r_1] = [h(x_1)h(x_1) + h(x_1)x_1 + x_1h(x_1), r_1] = [h(x_1)h(x_1), r_1] + [h(x_1)x_1, r_1] + [x_1h(x_1), r_1] = 0$ elde edilir. $h(x_1) \in Z_R$ ifadesi kullanılarak son elde edilen eşitlik düzenlendiğinde $2h(x_1)[x_1, r_1] = 0$ bulunur. Char(R)≠2 olduğundan

$$h(x_1)[x_1, r_1] = 0$$

dır. $h(x_1)[x_1, r_1] = 0$ ifadesinde $r_2 \in R$ olmak üzere r_1 yerine r_1r_2 yazıldığında

$h(x_1)[x_1, r_1r_2] = h(x_1)r_1[x_1, r_2] + \underbrace{h(x_1)[x_1, r_1]r_2}_{=0,\ \text{çünkü}\ h(x_1)[x_1,r_1]=0} = h(x_1)r_1[x_1, r_2] = 0$ olur. Yani her $x_1 \in L, r_1, r_2 \in R$ için $h(x_1)r_1[x_1, r_2] = 0$ bulunur. Buradan R halkasının asallığı kullanılarak her $x_1 \in L$ için $h(x_1) = 0$ veya $x_1 \in Z_R$ elde edilir. Şimdi $S_1 = \{x_1 \in L: h(x_1) = 0\}$ ve $S_2 = \{x_1 \in L: x_1 \in Z_R\}$ şeklinde iki küme tanımlayalım. Bu tanımlardan yola çıkarak $(S_1, +)$ ve $(S_2, +)$ nin $(S_1, +) \cup (S_2, +) = (L, +)$ koşulunu sağlayan $(L, +)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu kolayca görülür. Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $S_1 = L$ yada $S_2 = L$ olması sonucuna varılır. Şimdi $S_1 = L$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, her $x_1 \in L$ için $h(x_1) = 0$ yazılır. **Lemma 3.2.2.1** den $L \subset Z_R$ elde edilir. Şimdi ise $S_2 = L$ olması durumunu inceleyelim. Bu ise, her $x_1 \in L$ için $x_1 \in Z_R$ demektir. Bu durumdan da $L \subset Z_R$ elde edilir. Böylece, her iki durumdan da $L \subset Z_R$ sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.2.2.3 R_1, R_2 sıfırdan farklı sıfır böleni olmayan, birimli ve değişmeli olmayan halkalar olmak üzere Char$R_1 \neq 2$ ve Char$R_2 \neq 2$ olsun. $R_1 \times R_2$ halkasını düşünelim. $(1_{R_1}, 0_{R_2}), (0_{R_1}, 1_{R_2}) \neq (0_{R_1}, 0_{R_2})$ ve keyfi $(r_1, r_2) \in R_1 \times R_2$ için $(1_{R_1}, 0_{R_2})(r_1, r_2)(0_{R_1}, 1_{R_2}) = (0_{R_1}, 0_{R_2})$ dır. O halde, $R_1 \times R_2$ asal halka değildir. Z_{R_1}, R_1 halkasının merkezi olmak üzere $L = Z_{R_1} \times R_2$, $R_1 \times R_2$ halkasının toplamsal alt grubudur. Keyfi $(z, s_1) \in L, (r, s_2) \in R_1 \times R_2$ için

$$[(z, s_1), (r_1, s_2)] = (zr - rz, s_1s_2 - s_2s_1) \underbrace{=}_{z \in Z_{R_1}} (0_{R_1}, s_1s_2 - s_2s_1) \in L$$

ve

$$(z, s_1)(z, s_1) = (z^2, s_1^2) \in L$$

eşitlikleri sağlandığından L, $R_1 \times R_2$ halkasının kare kapalı Lie idealidir ve üstelik R_2 değişmeli olmayan bir halka olduğundan $L \nsubseteq Z_{R_1 \times R_2}$ koşulunu sağlar. $h: R_1 \times R_2 \to R_1 \times R_2$, $h(r_1, s_1) = (-r_1, 0_{R_2})$ şeklinde bir dönüşüm tanımlanan dönüşüm bir fonksiyondur. Keyfi $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R_1 \times R_2$ alalım.

$$\begin{aligned} h\big((r_1, s_1) + (r_2, s_2)\big) &= h(r_1 + r_2, s_1 + s_2) = \big(-r_1 - r_2, 0_{R_2}\big) = \big(-r_1, 0_{R_2}\big) + \big(-r_2, 0_{R_2}\big) \\ &= h(r_1, s_1) + h(r_2, s_2) \end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından h toplamayı koruyan bir dönüşümdür.

$$h\big((r_1, s_1)(r_2, s_2)\big) = h(r_1 r_2, s_1 s_2) = (-r_1 r_2, 0_{R_2})$$

ve

$$\begin{aligned} &h(r_1, s_1)h(r_2, s_2) + h(r_1, s_1)(r_2, s_2) + (r_1, s_1)h(r_2, s_2) \\ &\quad = \big(-r_1, 0_{R_2}\big)\big(-r_2, 0_{R_2}\big) + \big(-r_1, 0_{R_2}\big)(r_2, s_2) + (r_1, s_1)\big(-r_2, 0_{R_2}\big) \\ &\quad = (-r_1 r_2, 0_{R_2}) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından toplamsal h homo-türevdir. Keyfi $(z, s_1) \in L$ için $h(z, s_1) = (-z, 0_{R_2}) \in Z_{R_1 \times R_2}$dir.

Görüldüğü gibi **Lemma 3.2.2.2** deki asallık ön koşulu kaldırılamaz bir koşuldur.

3.3. Jordan Homo-Türevler Üzerine

Bir halka üzerinde tanımlı Jordan homo-türev kavramını ilk olarak (Rehman ve Alnoghashi, 2022) tarafından verilmiştir. İlk olarak Jordan homo-türev tanımını hatırlayalım.

R bir halka ve $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere, her $w_1 \in R$ için,

$$f({w_1}^2) = f(w_1)^2 + f(w_1)w_1 + w_1 f(w_1)$$

koşulunu sağlayan toplamsal f dönüşümüne R halkasının **Jordan homo-türevi** denir.

Jordan homo-türev kavramı,

$$f({w_1}^2) = f(w_1)f(w_1) + f(w_1)w_1 + w_1 f(w_1) = f(w_1)w_1 + (f(w_1) + w_1)f(r_1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazım şekli, $\beta(w_1) = f(w_1) + w_1$ olmak üzere

$$f({w_1}^2) = f(w_1)w_1 + \beta(w_1)f(w_1)$$

şeklinde düzenlenir. Keyfi $w_1, w_2 \in R$ için,

$$\begin{aligned} \beta(w_1 + w_2) = f(w_1 + w_2) + w_1 + w \overset{f\ toplamsal}{=} & f(w_1) + w_1 + f(w_2) + w_2 \\ = \beta(w_1) + \beta(w_2) & \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta({w_1}^2) = f({w_1}^2) + {w_1}^2 &= f(w_1)w_1 + (f(w_1) + w_1)f(w_1) + {w_1}^2 \\ &= (f(w_1) + w_1)w_1 + (f(w_1) + w_1)f(w_1) = (f(w_1) + w_1)(f(w_1) + w_1) \\ &= \beta(w_1)\beta(w_1) = \beta(w_1)^2 \end{aligned}$$

ifadeleri dolayısıyla β, R halkasının Jordan homomorfizmasıdır. O halde, Jordan homo-türev kavramı $f({w_1}^2) = f(w_1)id_R(w_1) + \beta(w_1)f(w_1)$ şeklinde düşünüldüğünde α, β, R halkasının birer Jordan homomorfizmaları olmak üzere Jordan (α, β)-türev kavramının özel bir halidir. Burada $id_R: R \to R, id(w) = w$ şeklinde tanımlanan birim dönüşümdür.

Uyarı 3.3.1 R bir halka ve $\jmath, R$ halkasının Jordan (α, β)-türevi olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$\jmath(r_1r_2 + r_2r_1) = \jmath(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\jmath(r_2) + \jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\jmath(r_1) \qquad (3.34)$$

sağlanır.

İspat: Keyfi $w_1, w_2 \in R$ alalım. $\jmath, R$ halkasının Jordan (α, β)-türevi olduğundan,

$$\begin{aligned}\jmath((w_1 + w_2)^2) &= \jmath(w_1 + w_2)\alpha(w_1 + w_2) + \beta(w_1 + w_2)\jmath(w_1 + w_2)\\ &= \underbrace{\jmath(w_1)\alpha(w_1) + \beta(w_1)\jmath(w_1)}_{=f(w_1{}^2)} + \underbrace{\jmath(w_2)\alpha(w_2) + \beta(w_2)\jmath(w_2)}_{=f(w_2{}^2)}\\ &+ \jmath(w_1)\alpha(w_2) + \beta(w_1)\jmath(w_2) + \jmath(w_2)\alpha(w_1) + \beta(w_2)\jmath(w_1)\\ &= \jmath(w_1{}^2) + \jmath(w_2{}^2) + \jmath(w_1)\alpha(w_2) + \beta(w_1)\jmath(w_2) + \jmath(w_2)\alpha(w)\\ &+ \beta(w_2)\jmath(w_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\jmath(w_1{}^2 + w_1w_2 + w_2w_1 + w_2{}^2) = \jmath(w_1{}^2) + \jmath(w_2{}^2) + \jmath(w_1)\alpha(w_2) + \beta(w_1)\jmath(w_2) + \jmath(w_2)\alpha(w_1) + \beta(w_2)\jmath(w)$ demektir. Son ifade $\jmath$ Jordan (α, β)-türevinin toplamsal olması kullanılarak düzenlendiğinde her $w_1, w_2 \in R$ için

$$\jmath(w_1w_2 + w_2w_1) = \jmath(w_1)\alpha(w_2) + \beta(w_1)\jmath(w_2) + \jmath(w_2)\alpha(w_1) + \beta(w_2)\jmath(w_1)$$

sonucuna varılır.

Uyarı 3.3.2 R 2-burulmasız bir halka ve $\jmath, R$ halkasının Jordan (α, β)-türevi olsun. Her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için,

i. $\jmath(r_1r_2r_1) = \jmath(r_1)\alpha(r_2r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1r_2)\jmath(r_1)$

ii. $\jmath(r_1r_2r_3 + r_3r_2r_1) = \jmath(r_1)\alpha(r_2r_3) + \jmath(r_3)\alpha(r_2r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_3) + \beta(r_3)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1r_2)\jmath(r_3) + \beta(r_3r_2)\jmath(r_1)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat:

i. (5.1) denkleminde r_2 yerine r_1r_2 yazıldığında,

$$j(r_1{}^2r_2 + r_1r_2r_1) = j(r_1)\alpha(r_1r_2) + j(r_1r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1)j(r_1r_2) + \beta(r_1r_2)j(r_1) \quad (3.35)$$

elde edilir. Yine (5.1) denkleminde r_2 yerine r_2r_1 yazıldığında,

$$j(r_1r_2r_1 + r_2r_1{}^2) = j(r_1)\alpha(r_2r_1) + j(r_2r_1)\alpha(r_1) + \beta(r_1)j(r_2r_1) + \beta(r_2r_1)j(r_1) \quad (3.36)$$

bulunur. (5.2) ve (5.3) denklemlerini birlikte düşündüğümüzde,

$$j(r_1{}^2r_2 + r_2r_1{}^2 + 2r_1r_2r_1) = j(r_1)\alpha(r_1r_2 + r_2r_1) + j(r_1r_2 + r_2r_1)\alpha(r_1) + \beta(r_1)j(r_1r_2 + r_2r_1) + \beta(r_1r_2 + r_2r_1)j(r_1) \quad (3.37)$$

elde edilir. (3.37) denklemi α, β dönüşümlerinin Jordan homomorfizma olması ve (3.34) denklemi kullanılarak düzenlendiğinde her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$j(r_1{}^2r_2 + r_2r_1{}^2 + 2r_1r_2r_1) = j(r_1)\alpha(r_1)\alpha(r_2) + j(r_1)\alpha(r_2)\alpha(r_1) + j(r_1)\alpha(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1)j(r_2)\alpha(r_1) + j(r_2)\alpha(r_1)\alpha(r_1) + \beta(r_2)j(r_1)\alpha(r_1) + \beta(r_1)j(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\beta(r_1)j(r_2) + \beta(r_1)j(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1)\beta(r_2)j(r_1) + \beta(r_1)\beta(r_2)j(r_1) + \beta(r_2)\beta(r_1)j(r_1) \quad (3.38)$$

olur. Şimdi ise $j(r_1{}^2r_2 + r_2r_1{}^2)$ ifadesini (3.34) denkleminde r_1 yerine $r_1{}^2$ yazarak elde edelim ve elde edilen ifadeyi j, R nin Jordan (α, β)-türevi olması ve α, β dönüşümlerinin Jordan homomorfizma olması kullanılarak düzenlediğimizde her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$\jmath(r_1{}^2r_2 + r_2r_1{}^2) = \jmath(r_1)\alpha(r_1)\alpha(r_2) + \beta(r_1)\jmath(r_1)\alpha(r_2) + \jmath(r_2)\alpha(r_1)\alpha(r_1) + \beta(r_1)\beta(r_1)\jmath(r_2) + \beta(r_2)\jmath(r_1)\alpha(r_1) + \beta(r_2)\beta(r_1)\jmath(r_1) \qquad (3.39)$$

bulunur. (3.38) ve (3.39) denklemleri birlikte düşündüğünde,

$$2\jmath(r_1r_2r_1) = 2(\jmath(r_1)\alpha(r_2r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1r_2)\jmath(r_1))$$

olur. R, 2-burulmasız olduğundan her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$\jmath(r_1r_2r_1) = \jmath(r_1)\alpha(r_2r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1r_2)\jmath(r_1) \qquad (3.40)$$

sonucuna varılır.

ii. Keyfi $r_3 \in R$ için (3.40) denkleminde r_1 yerine $r_1 + r_3$ yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\jmath\big((r_1+r_3)r_2(r_1+r_3)\big) &= \jmath(r_1r_2r_1 + r_1r_2r_3 + r_3r_2r_1 + r_3r_2r_3) \\
&= \jmath(r_1r_2r_1) + \jmath(r_1r_2r_3 + r_3r_2r_1) + \jmath(r_3r_2r_3) \\
&= \jmath(r_1+r_3)\alpha(r_2(r_1+r_3)) + \beta(r_1+r_3)\jmath(r_2)\alpha(r_1+r_3) \\
&\quad + \beta((r_1+r_3)r_2)\jmath(r_1+r_3) \\
&= \jmath(r_1)\alpha(r_2r_1) + \jmath(r_1)\alpha(r_2r_3) + \jmath(r_3)\alpha(r_2r_1) + \jmath(r_3)\alpha(r_2z) \\
&\quad + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_3) + \beta(r_3)\jmath(r_2)\alpha(r_1) \\
&\quad + \beta(r_3)\jmath(r_2)\alpha(r_3) + \beta(r_1r_2)\jmath(r_1) + \beta(r_3r_2)\jmath(r_1) + \beta(r_1r_2)\jmath(r_3) \\
&\quad + \beta(r_3r_2)\jmath(r_3) \\
&= \underbrace{\jmath(r_1)\alpha(r_2r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1r_2)\jmath(r_1)}_{=\jmath(r_1r_2r_1)} \\
&\quad + \jmath\,\underbrace{(r_3)\alpha(r_2r_3) + \beta(r_3)\jmath(r_2)\alpha(r_3) + \beta(r_3r_2)\jmath(r_3)}_{=\jmath(r_3r_2r_3)} + \jmath(r_1)\alpha(r_2r_3) \\
&\quad + \jmath(r_3)\alpha(r_2r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_3) + \beta(r_3)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_3r_2)\jmath(r_1) \\
&\quad + \beta(r_1r_2)\jmath(r_3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için,

$$\jmath(r_1r_2r_3 + r_3r_2r_1)$$
$$= \jmath f(r_1)\alpha(r_2r_3) + \jmath(r_3)\alpha(r_2r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_3) + \beta(r_3)\jmath(r_2)\alpha(r_1)$$
$$+ \beta(r_1r_2)\jmath(r_3) + \beta(r_3r_2)\jmath(r_1)$$

demektir.

Bölümün başında dolaylı olarak, keyfi bir halka üzerinde tanımlı Jordan homo-türevlerinin kümesinin, aslında keyfi bir halka üzerinde tanımlı Jordan (α, β)-türevlerin kümesinin bir alt kümesi olduğundan bahsedildi.f, Rhalkasının Jordan homo-türevi ve $\beta(r_1) = f(r_1) + r_1$ olmak üzere $\jmath({r_1}^2) = \jmath(r_1)r_1 + \beta(r_1)\jmath(r_1) = \jmath(r_1)id_R(r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_1)$ şeklinde yazılır. O halde, $\jmath, R$ halkasının Jordan (id_R, β)-türevdir. Şimdi **Uyarı 3.3.1** ve **Uyarı 3.3.2** de elde edilen eşitliklerde $\alpha = id_R$ ve $\beta(r_1) = \jmath(r_1) + r_1$ yazarak elde edilen ifadeleri aşağıda verelim.

Lemma 3.3.3 R bir halka ve $\jmath, R$ halkasının Jordan homo-türevi olsun. Her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$\jmath(r_1r_2 + r_2r_1) = \jmath(r_1)r_2 + \jmath(r_1)\jmath(r_2) + r_1\jmath(r_2) + \jmath(r_2)r_1 + \jmath(r_2)\jmath(r_1) + r_2\jmath(r_2)$$

sağlanır.

Lemma 3.3.4 R, 2-burulmasız bir halka ve $\jmath, R$ halkasının Jordan homo-türevi olsun. Her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için,

i. $\jmath(r_1r_2r_1) = \jmath(r_1)r_2r_1 + \jmath(r_1)\jmath(r_2)r_1 + r_1\jmath(r_2)r_1 + \jmath(r_1r_2)\jmath(r_1) + r_1r_2\jmath(r_1)$

ii. $\jmath(r_1r_2r_3 + r_3r_2r_1) = \jmath(r_1)r_2r_3 + \jmath(r_3)r_2r_1 + \jmath(r_1)\jmath(r_2)r_3 + r_1\jmath(r_2)r_3 + \jmath(r_3)\jmath(r_2)r_1 + r_3\jmath(r_2)r_1 + \jmath(r_1r_2)\jmath(r_3) + r_1r_2\jmath(r_3) + \jmath(r_3r_2)\jmath(r_1) + r_3r_2\jmath(r_1)$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 3.3.5 R, 2-burulmasız değişmeli olmayan bir yarıasal halka ve $\jmath: R \to R$ Jordan homo-türev olsun. Eğer, $\jmath + id_R$ bire-bir ve örten ise $\jmath, R$ halkasının bir homo-türevidir.

İspat: Kabul edelim ki $\jmath + id_R$ bire-bir ve örten dönüşüm olsun. $\jmath, R$ halkasının Jordan homo-türevi olduğundan **Lemma 3.3.2 (i)** sağlanır. O halde, her $r_1, r_2 \in R$ için

$$\jmath(r_1 r_2 r_1) = \jmath(r_1) r_2 r_1 + \jmath(r_1)\jmath(r_2) r_1 + r_1 \jmath(r_2) r_1 + \jmath(r_1 r_2)\jmath(r_1) + r_1 r_2 \jmath(r_1)$$

sağlanır. Son ifade, $\alpha(r_1) = id_R(r_1) = r_1$ ve $\beta(r_1) = \jmath(r_1) + r_1 = \jmath(r_1) + I_R(r_1) = (\jmath + id_R)(r_1)$ ifadeleri kullanılarak düzenlendiğinde, her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$\jmath(r_1 r_2 r_1) = \jmath(r_1)\alpha(r_2 r_1) + \beta(r_1)\jmath(r_2)\alpha(r_1) + \beta(r_1 r_2)\jmath(r_1)$$

şeklinde yazılır. Her halka kendisinin kare kapalı Lie idealidir, R değişmeli olmayan bir yarıasal halka ve α, β dönüşümleri otomorfizma olduğundan **Teorem 2.57** gereğince $\jmath, R$ halkasının (α, β)-türevidir. O halde, her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$\begin{aligned} \jmath(r_1 r_2) = \jmath(r_1)\alpha(r_2) + \jmath(r_1) f(r_2) &= \jmath(r_1) r_2 + (\jmath(r_1) + r_1)\jmath(r_2) \\ &= \jmath(r_1)\jmath(r_2) + \jmath(r_1) r_2 + r_1 \jmath(r_2) \end{aligned}$$

yazılır. Başka bir deyişle $\jmath$ bir homo-türevdir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ana bölüm olan 3. bölümde asal(yarı) asal halkalar üzerinde tanımlanmış çeşitli dönüşümlerin cebirsel özellikleri incelenmiştir.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde ilk kısmında, olarak 2-burulmasız bir yarıasal halkanın, α ve β halkanın otomorfizmaları olmak üzere, sıfır dönüşümünden farklı (α, β)-ters türevinin aslında (α, β)-türevi olduğu gösterilmiştir. Sonra, sıfır idealinden farklı bir ideali olan yarıasal halkanın, α ve β homomorfizmalarından en az biri örten olmak üzere, bahsi geçen ideal üzerinde tanımlı bir (α, β)-ters türevi varsa bu (α, β)-ters türevin aslında bir (β, α)-türev olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlar sayesinde (α, β)-ters türev kavramı ile (α, β)-türev kavramının çakıştığı kümlerin var olduğu anlaşılmıştır. Yani, keyfi bir halkanın, burada α ve β halkanının dönüşümleri olmak üzere, (α, β)- ters türevleri kümesi ile (α, β)-türevlerinin kümesi ayrık değildir sonucuna varılır. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise ilk kısımda ele alınan problemleri tek yanlı genelleştirlmiş (α, β)-ters türev yardımıyla tekrardan incelenmiştir. Bir yarıasal halkanın, α ve β homomorfizmalarından en az biri örten olmak üzere, tek yanlı genelleştirlmiş (α, β)-ters türevinin var olması durumunda bu dönüşümün aslında tek yanlı genelleştirilmiş (β, α)-türev olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, α ve β dönüşümlerinin yarıasal halkanın epimorfizması olması durumunda eğer halkanın tek yanlı genelleştirlmiş (α, β)-ters türevi var ise bu yarıasal halkanın merkez tarafından kapsanan bir ideali olduğu gösterilmiştir.Böylece, α ve β dönüşümlerinin asal halkanın epimorfizması olması durumunda eğer halkanın tek yanlı genelleştirlmiş (α, β)-ters türevi var ise halkanın değişmeli olduğu sonucuna varılmıştır. Son olarak, değişmeli olmayan bir asal halkada α ve β dönüşümlerinin halkanın epimorfizmaları olması durumda halkanın genelleştirilmiş (α, β)-türevinin olmadığı gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak asal halkaların homo-türevleri ihtiva eden bir çok özellik çalışılmıştır. Her bir durumda ele alınan özdeşlikler ile özdeşliğin içerdiği homo-türevin formu ve halka yapısı karakterize edilmiştir. Böylece, daha önce türev kavramı ile ele alınarak yapılan bazı çalışmaların homo-türev uyarlamamlarının farklılık gösterdiği görülmüştür. Daha sonra, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halkanın kare kapalı Lie ideali üzerinde homo-türev içeren özdeşlikler yardımı ile homo-türevin formu belirlenmiştir.

Beşinci bölümde 2-burulmasız bir yarıasal halkanın Jordan homo-türevlerinin aslında homo-türev olduğu gösterilmiştir.Tezin ana bölümünde elde edilen sonuçlar bu konular ile ilgili literatürde var olan sonuçların genellemesi niteliğindedir.

KAYNAKÇA

Aboubakr, A., ve González, S. (2015). “Generalized reverse derivations on semiprime rings”. *Siberian Mathematical Journal*, 56(2), 199-205.

Ashraf, M., Ali, S., ve Haetinger, C. (2006). “On derivations in rings and their applications”. *The Aligarh Bull of Math*, 25(2), 79-107.

Belkadi, S., Ali, S., ve Taoufiq, L. (2023). “On nilpotent homoderivations in prime rings”. *Communications in Algebra*, 1-10.

Brešar, M. (2014). Introduction to noncommutative algebra. Springer: Berlin.

El Sofy Aly, M. M. (2000). Rings with Some Kinds of Mappings Master’s Thesis. Cairo University, Cairo.

Garg, C., ve Sharma, R. K. (2016). On generalized (α, β)-derivations in prime rings. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, 65(2), 175-184.

Herstein, I. N. (1957). Jordan derivations of prime rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 8(6), 1104-1110.

Hungerford, T. W. (2012). *Algebra (Vol. 73)*. Springer Science & Business Media: USA.

Mayne, J. H. (1984). “Centralizing mappings of prime rings”. *Canadian Mathematical Bulletin*, 27(1), 122-126.

Melaibari, A., Muthana, N., ve Al-Kenani, A. (2016). “Homoderivations on rings”. *Gen. Math. Notes*, 35(1), 1-8.

Ozdemir, M., ve Aydın, N. (2018). “(α,β)-Reverse derivations on prime and semiprime rings”. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 11(3).

Posner, E. C. (1957). “Derivations in prime rings”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(6), 1093-1100.

Samman, M., ve Alyamani, N. (2007). “Derivations and reverse derivations in semiprime rings”. *In International Mathematical Forum*, 2(39), 1895-1902.

Söğütçü, E. K. ve Ur Rehman, N. (2020). “Lie ideals and Jordan triple (α,β)-derivations in rings”. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics,* 69(1), 528-539.

Ur Rehman, N., ve Alnoghashi, H. M. (2022). “Jordan homo-derivations on triangular matrix rings”. *An. Ştiint. Al. I. Cuza laşi. Mat.(N.S.)*, 68(2), 203-216.

YÖK

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

İsim SOYİSİM :
Doğum Yeri :
Doğum Tarihi :

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi :
Yüksek Lisans Öğrenimi :
Doktora Öğrenimi :
Bildiği Yabancı Diller :

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

1) SCI

xxx

2) Diğer

xxx

b) Bildiriler

1) Uluslararası

xxx

2) Ulusal

xxx

c) Katıldığı Projeler

xxx

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

İLETİŞİM

E-posta Adresi :
ORCID :