T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

S-MANİFOLDLARDA VEKTÖREL ÇARPIM VE EĞRİLER TEORİSİNE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

SANİYE CAN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. ÇETİN CAMCI

ÇANAKKALE – 2023

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

***S*-MANİFOLDLARDA VEKTÖREL ÇARPIM VE EĞRİLER TEORİSİNE UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

SANİYE CAN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. ÇETİN CAMCI

Bu çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

Proje No: 3520

ÇANAKKALE – 2023

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Saniye CAN tarafından Doç. Dr. Çetin CAMCI yönetiminde hazırlanan ve **11/07/2023** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan **"S-Manifoldlarda Vektörel Çarpım ve Eğriler Teorisine Uygulamaları"** başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Doç. Dr. ÇETİN CAMCI (Danışman)	
Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR	
Prof. Dr. Salim YÜCE	
Doç. Dr. Can AKTAŞ	
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ	

Tez No 10555557

Tez Savunma Tarihi : 11/07/2023

Prof. Dr. Ahmet Evren ERGİNAL

Enstitü Müdürü

../../20..

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları’na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Saniye CAN
11/07/2023

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında desteğini bir an olsun esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Çetin CAMCI ’ya, umutsuzluğa düştüğüm her anda beni yüreklendiren Arş. Gör. Büşra BATARAY’a, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen eşim Tamer CAN’a, beni ilk günden bu yana saygıyla destekleyen kızım Öykü CAN’a ve oğlum Onat CAN’a ve de beni bu günlere getiren annem ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Saniye CAN

Çanakkale, Temmuz 2023

ÖZET

S-MANİFOLDLARDA VEKTÖREL ÇARPIM VE EĞRİLER TEORİSİNE UYGULAMALARI

Saniye CAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Çetin CAMCI

11/07/2023, 80

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde çalışmanın içinde gerekli olan kavramlar kaynaklarıyla birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde, S-manifoldlarla ilgili temel tanımlar, lemmalar ve teoremler kaynaklarıyla birlikte verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $\mathbb{R}^{2+s}$ çatılandırılan metrik manifoldlarda yeni bir vektörel çarpım tanımlanmıştır ve bu vektörel çarpım yardımıyla Legendre eğrilerin eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca, $\mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ uzay formunda silindirde yatan 1-tipten Legendre eğrinin eğrilikleri hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde, elde edilen bulgular özetlenerek bir sonuç bölümü oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş vektörel çarpım, S-manifold, S-uzay formu, Legendre eğri, Sonlu Tipten Eğriler.

ABSTRACT

VECTOR PRODUCT IN S-MANİFOLDS AND APPLICATIONS TO CURVES THEORY

Saniye CAN
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Doctoral Dissertation in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Çetin CAMCI
11/07/2023, 80

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second part, the necessary concepts in the study are given together with their sources.

In the third chapter, basic definitions, lemmas and theorems about S-manifolds are given with their sources.

The fourth chapter constitutes the original part of this thesis. In this section, a new vector product is defined in $\mathbb{R}^{2+s}$ framed metric manifolds and the curvatures of Legendre curves are calculated with the help of this vector product. In addition, the curvatures of the 1-type Legendre curve lying on the cylinder in the $\mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ space form was calculated.

In the fifth chapter, a conclusion section was formed by summarizing the findings.

Keywords: Generalized Cross Product, S-manifold, S-space Form, Legendre Curve, Finite Type Curves.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

M	Manifold
η	Kontak Form
ϕ	(1,1) Tensör Alanı
ξ	Karakteristik Vektör Alanı
g	Metrik Tensör
$T_P M$	Tanjant Uzay
$\chi(M)$	Vektör Alanları Uzayı
∇	Riemann Konneksiyonu
J	Hemen Hemen Kompleks Yapı
N_F	Nijenhuis Tensör Alanı
R	Riemann Eğrilik Tensör Alanı
K	Kesitsel Eğrilik
H	Ortalama Eğrilik Tensör Alanı
$M(c)$	Uzay Formu
F, Φ	Temel İki Form
Δ	Laplace Dönüşümü
$N(r)$	Silindir

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Yano, 1963 yılında M^{2n+s} manifoldlarda f-yapı kavramını tanımlayarak S-manifoldların alt yapısını oluşturmuştur. Hemen hemen kompleks $(s=0)$ ve hemen hemen kontak $(s=1)$ yapılar f-yapıya örnek olarak verilebilir. Golberg ve Yano 1970 yılında f-yapı kavramını genişletip çatılandırılan metrik manifold kavramını tanımlamışlardır ve bu yapıların normallik koşullarını inceleyerek bu alanda yapılacak çalışmalara öncülük etmişlerdir. Blair, 1970 yılında normal çatılandırılan metrik yapılara bazı yeni koşullar ekleyerek S- manifold kavramını tanımlamıştır. S- manifoldlar hemen hemen hermityen durumda Kaehler yapıların, hemen hemen kontak durumunda Sasaki yapıların bir genellemesidir. 2007 yılında Kim J.S., Dwidedi M.K. ve Tripathi M.M. S-manifoldlarda integral alt manifold kavramını vermişlerdir. Günümüzde giderek önem kazanan S-manifoldlarla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Fernandez L.M, Fernandez M., Kobayashi, Carriazo A., Fuentes A.M., Cabrerizo J.L., bu alanda çalışmalar yapan bilim insanlarından bazılarıdır. Özgür C. ve Güvenç Ş. ülkemizde S-manifoldlarda eğriler teorisi üzerine birçok çalışma yapmıştır. Bunlardan biri 2014 yılında yaptıkları S-uzay formunda biharmonik Legendre eğriler ile ilgilidir. Bu çalışmalarında S-uzay formunda Legendre eğri (1-boyutlu integral alt manifold) kavramını tanımlamışlardır ve bu eğrilerin karakterizasyonlarını 4 farklı durumda incelemişlerdir. Günümüzde ise pek çok matematikçi bu konu ile ilgili çalışmalar yapmaya devam etmektedir.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde S-manifoldlar tanıtılmış ve S-manifoldların geometrisi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu bölümde ayrıca Golberg ve Yano tarafından tanım olarak verilen bazı ifadelerin ispatlanabileceğini gösterdik ve Lemma 3.1.1 de ayrıntılı bir şekilde ispatını yaptık.

Çalışmamızın dördüncü bölümü orijinal kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde ilk olarak Camcı' nın 2012 yılında 3-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifoldlarda tanımladığı vektörel çarpımı $(2n+s)$-boyutlu metrik manifoldlarda $n=1$ olması hali için genelleştirdik. Genelleştirdiğimiz bu vektörel çarpım yardımıyla Legendre eğrilerin k_2 ve k_3 eğrilikleri ile V_2 ve V_3 Frenet vektörlerini hesapladık. Özgür ve Güvenç'in biharmonik Legendre eğriler için elde ettikleri sonuçların benzerlerine ulaştık. Dolayısıyla S-manifoldlarda Legendre eğrilerin aynı zamanda biharmonik olduğu sonucuna vardık.

$(2+2)$-boyutlu S-manifoldlarda bir Legendre eğrinin V_4 Frenet vektörünü elde ettik. Tüm bu teorileri örneklerle destekledik. Ayrıca, $(2+3)$-boyutlu S-manifoldlarda bir Legendre eğrinin 3-boyutlu K-kontak uzayına imbedding yaptığını gördük. Bu bölümün son kısmında ise $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ uzay formunda sonlu tipte eğri kavramını ve $n=1$ için $(2+s)$ de $N^{1+s}(r)$ silindirini tanımladık. $\mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ uzay formunda silindirde yatan bir Legendre eğrinin k_1, k_2, k_3 ve V_2, V_3 Frenet elemanlarını hesapladık ve silindirde yatan 1-tipten Legendre eğrisinin eğriliklerinin sabit olduğunu gördük.

İKİNCİ BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldu ve Konneksiyonu

Tanım 2.1.1 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde tanımlı diferansiyellenebilir vektör alanların kümesi $\chi(M)$ olmak üzere,

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye Riemann metriği ve (M, g) ikilisine **Riemann manifoldu** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.2 M bir diferansiyellebilir manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü

i. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
ii. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
iii. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
iv. $\nabla_X fY = f \nabla_X Y + X(f) Y$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde bir **afin konneksiyon** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.3 (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

ii. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M nin **Levi-Civita konneksiyonu** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.4 (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$g(\nabla_Y \xi, Z) + g(\mathrm{Y}, \nabla_Z \xi) = 0$$

olacak şekilde $\xi \in \chi(M)$ varsa, bu ξ vektör alanına **Killing vektör alanı** denir (Blair, 2002).

Tanım 2.1.5 M Riemann manifoldu üzerinde afin konneksiyon ∇ olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlı tensöre **Riemann eğrilik tensörü** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.6 (M, g) Riemann manifoldu ve M üzerinde afin konneksiyon ∇ olsun.

$$K: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to K(X, Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}$$

ile tanımlı dönüşüme $\{X, Y\}$ tarafından gerilen düzlemin **kesitsel eğriliği** denir (Hacısalihoğlu, 1983). Eğer M manifoldunun kesitsel eğriliği bir c sabitine eşit ise M ye **reel uzay form** denir ve $M(c)$ ile gösterilir (Blair, 2002).

2.2 Riemann Alt Manifoldu ve Sonlu Tipte Eğriler

Tanım 2.2.1 M, m-boyutlu ve N, n-boyutlu Riemann manifoldları verilsin. Eğer

$$f: N \to M$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise N manifolduna M manifoldu **Riemann alt manifoldu** denir (Blair, 1976).

Tanım 2.2.2 N manifoldu M manifoldunun Riemann alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(N)$ için

$$F: \chi(N) \times \chi(N) \to \chi(N)$$

$$(X, Y) \to F(X, Y)$$

biçiminde tanımlı simetrik bilineer F dönüşümüne **ikinci temel form** denir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.3 N, n-boyutlu manifoldu M, m-boyutlu manifoldunun Riemann alt manifoldu olsun. N manifoldunun ortonormal bir tabanı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere,

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(e_i, e_i)$$

biçiminde tanımlı H vektör alanına N manifoldunun **ortalama eğrilik vektör alanı** denir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.4 (M, g) Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki diferansiyellenebilir f fonksiyonu için

$$\Delta f = div(gradf)$$

ile tanımlı Δ dönüşümüne f fonksiyonunun **Laplace dönüşümü** denir (Kobayashi ve Nozimu, 1996).

Tanım 2.2.5 $M \subset \mathbb{E}^n$ bir alt manifold olsun. M nin ortalama eğrilik vektör alanı H olmak üzere, $\Delta H = 0$ şartını sağlayan M alt manifolduna Öklid uzayının bir **biharmonik alt manifoldu** denir (Chen, 1996).

Tanım 2.2.6 M manifoldu kompakt C^∞ Riemann manifoldu ve $x: M \to E^m$ bir izometrik immersiyon olsun. Burada x in koordinat fonksiyonları $A = 1, \dots, m$ için x_A ise $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ olarak yazılabilir. Burada,

$$x_A - (x_A)_0 = \sum_{t=p_A}^{q_A} (x_A)_t \tag{2.1}$$

olmak üzere $p_A = \{inft\colon (x_A)_t \neq 0\}$ ve $q_A = \{sup\ t\colon (x_A)_t \neq 0\}$ olarak tanımlanıyor. Eğer $p = \inf\ \{p_A\}$, $q = \sup\ \{q_A\}$ ise o halde (2.1) denkleminin spektral ayrışımı

$$x - x_0 = \sum_{t=p}^{q} (x)_t \quad , \quad \Delta x_t = \lambda_t x_t \tag{2.2}$$

olur. Burada q sonlu ise E^m de M ye **sonlu tipte alt manifold** denir. (2.2) deki spektral ayrışımda x_t lerden k tane varsa E^m de M ye ***k*-tipte alt manifold** denir (Chen, 1984).

2.3 İntegral Alt Manifoldu ve Dağılım

Tanım 2.3.1 $M, m = (n+k)$-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ noktasında T_pM nin n-boyutlu alt uzayı D_p ve D_p nin bir kolleksiyonu $D = \{D_p\}$ olmak üzere p noktasını içeren bir V komşuluğu üzerinde C^∞ sınıfından $\{X_1, \dots, X_n\}$ vektör alanları her $q \in V$ noktasında D_q nin bir tabanı oluyorsa, D ye M üzerinde n-boyutlu **dağılım** denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.3.2 $m = n + k$ boyutlu M manifoldunun C^∞ n-boyutlu dağılımı D olsun. N manifoldu M manifoldunun bağlantılı C^∞ alt manifoldu olmak üzere $\forall q \in Q$ için $T_pN \subset D_q$ oluyorsa N manifolduna D dağılımının **integral alt manifoldu** denir (Boothby, 1986).

2.4 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Üçlü Çarpım ve Eğriler Teorisi

Tanım 2.4.1 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sistemi $\mathbb{R}^4$ ün standart tabanı olsun.

$$a \otimes b \otimes c = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlı vektöre, $a=\sum_{i=1}^{4} a_i e_i$, $b=\sum_{i=1}^{4} b_i e_i$, $c=\sum_{i=1}^{4} c_i e_i$ vektörlerinin **üçlü çarpımı** denir (Williams ve Stein, 1964).

Lemma 2.4.1 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sistemi $\mathbb{R}^4$ ün standart tabanı olmak üzere

$$e_i \otimes e_j \otimes e_k = \sum_{m=1}^{4} \varepsilon_{ijkm} e_m \quad , \; i, j, k = 1,2,3,4$$

dir. Burada,

$$\varepsilon_{ijkm} = \begin{cases} -1 \;, & (ijkm)\ (1234)\ \text{ün}\ çift\ permütasyonu\ ise \\ \;\;1 \;, & (ijkm)\ (1234)\ \text{ün}\ tek\ permütasyonu\ ise \\ \;\;0 \;, & (ijkm)\ \ permütasyon\ değilse \end{cases}$$

dir (Yüce, 2018).

Lemma 2.4.2 $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^4$ için

$$d \otimes e \otimes (a \otimes b \otimes c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \langle a, e\rangle & \langle b, e\rangle & \langle c, e\rangle \\ \langle a, d\rangle & \langle b, d\rangle & \langle c, d\rangle \end{vmatrix}$$

vektörü $a, b, c \in \mathbb{R}^4$ vektörlerinin uzayında yatan bir vektördür (Williams ve Stein, 1964).

Teorem 2.4.1 $\alpha: I \to \mathbb{R}^4$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α nın Frenet vektörleri V_1, V_2, V_3, V_4 olsun. O halde

$$V_1 = \alpha'$$

$$V_2 = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$$V_4 = -\frac{\alpha' \otimes \alpha'' \otimes \alpha'''}{\|\alpha' \otimes \alpha'' \otimes \alpha'''\|}$$

$$V_3 = V_4 \otimes V_1 \otimes V_2$$

şeklindedir ve $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ sistemi 4-boyutlu Öklid uzayında bir ortonormal sistemdir (Alessio, 2009).

Lemma 2.4.3 $\alpha: I \to \mathbb{R}^4$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri V_1, V_2, V_3, V_4 olduğuna göre,

$$V_1 = V_2 \otimes V_3 \otimes V_4$$

$$V_2 = -V_3 \otimes V_4 \otimes V_1$$

$$V_4 = -V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

dir.

İspat: Lemma 2.4.2 ve Teorem 2.4.1 den ispat kolayca yapılabilir.

2.5 Hemen Hemen Kontak Manifoldlar

Tanım 2.5.1 $M, 2n+1$ boyutlu manifoldu üzerinde ϕ, ξ ve η tesör alanları verilsin. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\left.\begin{array}{r} \eta(\xi) = 1 \\ \phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \end{array}\right\}$$

koşulları sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η) ye M üzerinde hemen hemen kontak yapı ve üzerinde kontak yapı tanımlı manifolda **hemen hemen kontak manifold** denir (Blair, 1976).

Teorem 2.5.1 $(2n+1)$-boyutlu (M, ϕ, ξ, η), hemen hemen kontak manifold olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \phi(\xi) = 0 \\ ii)\ \eta(\phi) = 0 \\ iii)\ rank\phi = 2n \end{array}\right\}$$

dir (Blair, 1976).

Tanım 2.5.2 (M, ϕ, ξ, η) hemen hemen kontak manifold olsun. g, M üzerinde Riemann metriği olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g\big(\phi(X), \phi(Y)\big) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliği sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen kontak metrik yapı ve (M, ϕ, ξ, η, g) ye de **hemen hemen kontak metrik manifold** denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.5.2 (M, ϕ, ξ, η), $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontak manifoldunda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g\big(\phi(X), \phi(Y)\big) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır (Blair, 1976).

Sonuç 2.5.1 $(M, \phi, \xi, \eta), (2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontak manifoldunda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi(X), Y) + g(X, \phi Y) = 0$$

dır. Yani ϕ ye karşılık gelen matris antisimetriktir (Blair, 1976).

Sonuç 2.5.2 (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik manifold olsun. O halde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi(X), X) = 0$$

dır (Blair, 1976).

Tanım 2.5.3 $(2n+1)$-boyutlu diferansiyellenebilir M manifoldu verilsin. Eğer bu manifold üzerinde her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlayan bir η 1-formu varsa η ya **kontak form**, (M,η) ikilisine de **kontak manifold** denir. Burada $(d\eta)^n$ ifadesi $d\eta$ nın kendisiyle n defa dış çarpımını gösterir (Blair, 1976).

Tanım 2.5.4 $(M,\eta), (2n+1)$-boyutlu kontak manifold olsun.

$$D = \{X \in \chi(M) \colon \eta(X) = 0\}$$

kümesine M manifoldunun **kontak dağılımı** denir (Blair, 1976).

Tanım 2.5.5 $(M,\eta), (2n+1)$-boyutlu kontak manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ için

$$\left.\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1 \\ d\eta(\xi, X) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

koşullarını sağlayan bir $\xi \in \chi(M)$ varsa, ξ ye η kontak yapısının **karakteristik vektör alanı** denir (Blair, 1976).

Teorem 2.5.3 M, $(2n+1)$-boyutlu η kontak yapısı ile verilen bir kontak manifold olsun. Bu η 1-formu yardımıyla

$$d\eta(X,Y) = g(X,\phi Y)$$

olacak şekilde (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısı vardır. Tersine, (M,ϕ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde Φ temel 2-formunu

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi(Y))$$

biçiminde tanımlarsak $\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$ dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.5.6 $(M,\phi,\eta,\xi,g), (2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer $d\eta(X,Y) = \Phi(X,Y)$ ise (ϕ,η,ξ,g) yapısına da **kontak metrik yapı** ve üzerinde tanımlı manifolda **kontak metrik manifold** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.5.7 $(M,\phi,\eta,\xi,g), (2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer ξ killing vektör alanı ise M ye K-kontak manifold, (ϕ,η,ξ,g) yapısına da ***K*-kontak yapı** denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.5.4 $(M,\phi,\eta,\xi,g), (2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir.

i. M bir K-kontak manifolddur.

ii. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 0$$

iii. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = -\phi(X)$$

dir (Blair, 1976).

Tanım 2.5.8 $(M, \phi, \eta, \xi, g), (2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. $\mathbb{R}$ reel eksen olmak üzere $M \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpım uzayı $(2n+2)$-boyutlu çarpım manifoldudur. Burada vektör alanları

$$\chi(\mathbb{R}) = \left\{f \frac{d}{dt} : f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})\right\}$$

$$\chi(M \times \mathbb{R}) = \left\{(X, f \frac{d}{dt}) : X \in \chi(M)\right\}$$

şeklindedir.

$$J : \chi(M \times \mathbb{R}) \to \chi(M \times \mathbb{R})$$

$$\left(X, f \frac{d}{dt}\right) \to J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\phi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanan J kompleks dönüşümüne $M \times \mathbb{R}$ üzerinde **hemen hemen kompleks yapı** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.5.9 Bir M manifoldu üzerinde tanımlı (1,1) tipinde bir tensör alanı F olmak üzere,

$$N_F: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

ve

$$N_F(X,Y) = F^2([X,Y]) + [F(X),F(Y)] - F([F(X),Y]) - F([X,F(Y)])$$

eşitliğini sağlayan (1,2) tipindeki tensör alanına F nin **Nijenhuis torsiyon tensör alanı** denir. Burada $F = J$ alınırsa,

$$N_J(X,Y) = -[X,Y] + [J(X),J(Y)] - J([J(X),Y]) - J([X,J(Y)]$$

elde edilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.5.10 N_J, Nijenhuis torsiyon tensörü özdeş olarak sıfır ise J hemen hemen kompleks yapısına **integrallenebilirdir** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.5.11 $M \times \mathbb{R}$ de J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısına **normal yapı** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.5.12 M manifoldu (ϕ,ξ,η,g) normal kontak metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda M manifolduna **Sasaki manifoldu** ve (ϕ,ξ,η,g) yapısına da **Sasaki yapı** denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.5.5 M manifoldu (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda M manifoldunun Sasaki manifold olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y) - \eta(Y)X$$

olmasıdır (Blair, 1976).

2.6 Hemen Hemen Kontak Manifoldlarda Vektörel Çarpım

Tanım 2.6.1 $M^3 = (M, \phi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\wedge$ **vektörel çarpımı**

$$X \wedge Y = -g(X, \phi Y)\xi - \eta(Y)\phi X + \eta(X)\phi Y$$

ile tanımlanır (Camcı, 2012).

Teorem 2.6.1 $M^3 = (M, \phi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in TM$ için vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar (Camcı, 2012):

i. $X \wedge Y = -Y \wedge X$
ii. $X \wedge Y$ hem X hem de Y ye diktir.
iii. $Y \wedge \phi X = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$
   $\phi(X) = \xi \wedge X$
iv. $(X, Y, Z) = g(X \wedge Y, Z)$ karma çarpımı tanımlanırsa,
   $(X, Y, Z) = -g\big(X, \phi(Y)\big)\eta(Z) + g\big(Y, \phi(Z)\big)\eta(X) + g(Z, \phi(X))\eta(Y)$ ve

$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y)$

v. $g\big(X, \phi(Y)\big)Z + g(Y, \phi(Z))X + g\big(Z, \phi(X)\big)Y = -\det(X, Y, Z)\xi$

vi. $(X \wedge Y) \wedge Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$

vii. $g(X \wedge Y, Z \wedge W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)$

viii. $\|X \wedge Y\|^2 = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2$

ix. $(X \wedge Y) \wedge Z + (Y \wedge Z) \wedge X + (Z \wedge X) \wedge Y = 0$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

S-MANİFOLDLAR VE S-UZAY FORMU

3.1 S-Manifoldlar

Tanım 3.1.1 : $M, (2n + s)$-boyutlu C^{∞}diferansiyellenebilir manifold olsun. M manifoldu üzerinde

$$f^3 + f = 0 \ , \qquad rankf = 2n$$

koşulunu sağlayan (1.1) tipindeki f tensör alanına ***f*-yapı** denir. Üzerinde f-yapı tanımlı manifolda ***f*-manifold** denir (Yano,1963).

$s = 0$ olması halinde f-yapı hemen hemen kompleks yapıdır.

$s = 1$ olması halinde ise f-yapı hemen hemen kontak yapıdır.

Tanım 3.1.2 $M, (2n + s)$-boyutlu f-manifold olsun.

i.

$$\begin{aligned} &f : \chi(M) \to \chi(M) \\ &f^2 X = -X + \eta_1 (X)\, \xi_1 + \cdots + \eta_s (X)\, \xi_s \end{aligned} \tag{3.1}$$

ii.

$$\eta_i \circ f = 0 \tag{3.2}$$

iii.

$$f \circ \xi_i = 0 \tag{3.3}$$

iv.

$$\eta_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases} \tag{3.4}$$

olacak şekilde $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ vektör alanları ve $\eta_1, \dots, \eta_s : \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ 1-formları varsa (f, η_i, ξ_j) $(i, j = 1,2, \dots, s)$ $(2s + 1)$-lisine **global çatılandırılan yapı** ya da kısaca **çatılandırılan yapı** denir. (M, f, η_i, ξ_j) $(i, j = 1,2, \dots, s)$ $(2s + 2)$-lisine **çatılandırılan manifold** denir (Goldberg ve Yano,1970).

Lemma 3.1.1 (M, f, η_i, ξ_j) $(i, j = 1,2, \dots, s)$ çatılandırılan manifold olsun.

$$\eta_{ij} = \eta_i(f\xi_j) = -\eta_j(f\xi_i) = -\eta_{ji} \tag{3.5}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

i. $f \circ \xi_i = 0$
ii. $\eta_i \circ f = 0 \ , \forall X \in \chi(M)$
iii. $Kerf = Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$
iv. $rankf = 2n$

dir.

İspat:

i. (3.1) eşitliğinden

$$\left.\begin{aligned} f^3X &= f^2(fX) = -fX + \eta_1\,(fX)\xi_1 + \cdots + \eta_s\,(fX)\xi_s \\ f^3X &= f(f^2X) = -fX + \eta_1\,(X)\,f\xi_1 + \cdots + \eta_s\,(X)f\,\xi_s \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

olur. (3.6) eşitliğinden

$$\eta_1\,(fX)\xi_1 + \cdots + \eta_s\,(fX)\xi_s = \eta_1\,(X)\,f\xi_1 + \cdots + \eta_s\,(X)f\,\xi_s \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.4), (3.5) ve (3.7) eşitliklerinden

$$\left.\begin{aligned} f\xi_1 &= \eta_{11}\xi_1 + \eta_{21}\xi_2 + \cdots + \eta_{s1}\xi_s \\ f\xi_2 &= \eta_{12}\xi_1 + \eta_{22}\xi_2 + \cdots + \eta_{s2}\xi_s \\ &\vdots \\ f\xi_s &= \eta_{1s}\xi_1 + \eta_{2s}\xi_2 + \cdots + \eta_{ss}\xi_s \end{aligned}\right\} \text{ veya } \begin{bmatrix} f\xi_1 \\ f\xi_2 \\ \vdots \\ f\xi_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} \cdots & \eta_{s1} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \cdots & \eta_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{1s} & \eta_{2s} & \eta_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_s \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada

$$M = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} \cdots & \eta_{s1} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \cdots & \eta_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{1s} & \eta_{2s} & \eta_{ss} \end{bmatrix}$$

olmak üzere $detM \neq 0$ ise (3.8) eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_s \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} f\xi_1 \\ f\xi_2 \\ \vdots \\ f\xi_s \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\xi_i = \mu_{i1} f \xi_1 + \cdots + \mu_{is} f \xi_s \ (i = 1,2,\ldots,s) \tag{3.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (3.4) eşitliğinden $f^2 \xi_j = 0 \ (j = 1,2,\ldots,s)$ olduğundan (3.9) eşitliğinden

$$f\xi_i = \mu_{i1} f^2 \xi_1 + \cdots + \mu_{is} f^2 \xi_s \ = 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,s)$$

elde edilir. Kabul edelim ki $detM = 0$ olsun. Bu durumda en az biri sıfırdan farklı $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda_1 f \xi_1 + \lambda_2 f \xi_2 + \cdots + \lambda_s f \xi_s = 0 \tag{3.10}$$

olur. f lineer olduğundan (3.10) eşitliği

$$f(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_s \xi_s) = 0 \tag{3.11}$$

dir. Burada $X = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_s \xi_s \neq 0$ ise $\lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_s^2 \neq 0$ için

$\overline{\xi_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \xi_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} \xi_2 + \cdots + \frac{\lambda_s}{\lambda} \xi_s \neq 0$ ve (3.11) denkleminden $f\overline{\xi_1} = 0$ olur. Burada $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda_s}{\lambda} \in \mathbb{R}$ olduğundan $\overrightarrow{u_1} = (\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda_s}{\lambda}) \in \mathbb{R}^s$ dir. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olduğundan $\overrightarrow{u_1} \neq \vec{0}$ dır. Bu durumda $\mathbb{R}^s$ nin $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ ortonormal tabanı olacak şekilde $u_2, u_3, \ldots, u_s$ vektörleri vardır. Eğer

$$u_1 = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1s}) = \sum_{t=1}^{s} u_{1t} \frac{\partial}{\partial x_t}$$

$$u_2 = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2s}) = \sum_{t=1}^{s} u_{2t} \frac{\partial}{\partial x_t}$$

$$\vdots$$

$$u_s = (u_{s1}, u_{s2}, \dots, u_{ss}) = \sum_{t=1}^{s} u_{st} \frac{\partial}{\partial x_t}$$

denilirse $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ ortonormal olduğundan

$$N = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1s} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s1} & u_{s2} & \cdots & u_{ss} \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_s]$$

matrisi ortonormal matristir. Burada

$$v_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{s1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{s2} \end{bmatrix}, \dots, v_s = \begin{bmatrix} u_{1s} \\ u_{2s} \\ \vdots \\ u_{ss} \end{bmatrix}$$

veya $v_i = \sum_{t=1}^{s} u_{ti} \frac{\partial}{\partial x_t}$, $(i = 1,2, \dots, s)$ olarak tanımlarsak, N ortonormal olduğundan

$$\langle u_i, u_j \rangle = \sum_{t=1}^{s} u_{it} u_{jt} = \begin{cases} 1 \ , \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} \ , \ (i, j = 1,2, \dots, s) \qquad (3.12)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{t=1}^{s} u_{ti} u_{tj} = \begin{cases} 1 \ , \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} \ , \ (i, j = 1,2, \dots, s) \qquad (3.13)$$

dir. Böylece $\overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}, \dots, \overline{\xi_s}$ vektör alanları aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$\left.\begin{aligned}\overline{\xi_1} &= u_{11}\xi_1 + u_{12}\xi_2 + \cdots + u_{1s}\xi_s\\ \overline{\xi_2} &= u_{21}\xi_1 + u_{22}\xi_2 + \cdots + u_{2s}\xi_s\\ &\vdots\\ \overline{\xi_s} &= u_{s1}\xi_1 + u_{s2}\xi_2 + \cdots + u_{ss}\xi_s\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\overline{\xi_1}\\ \overline{\xi_2}\\ \vdots\\ \overline{\xi_s}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1s}\\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ u_{s1} & u_{s2} & \cdots & u_{ss}\end{bmatrix}}_{N}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_s\end{bmatrix} \tag{3.14}$$

yazılabilir. Burada N ortonormal olduğundan (3.14) eşitliğinden

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{s1}\\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{s2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ u_{1s} & u_{2s} & \cdots & u_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\xi_1}\\ \overline{\xi_2}\\ \vdots\\ \overline{\xi_s}\end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ 1-formlarını

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= u_{11}\eta_1 + u_{12}\eta_2 + \cdots + u_{1s}\eta_s\\ \omega_2 &= u_{21}\eta_1 + u_{22}\eta_2 + \cdots + u_{2s}\eta_s\\ &\vdots\\ \omega_s &= u_{s1}\eta_1 + u_{s2}\eta_2 + \cdots + u_{ss}\eta_s\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_s\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1s}\\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ u_{s1} & u_{s2} & \cdots & u_{ss}\end{bmatrix}}_{N}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_s\end{bmatrix}$$

olarak tanımlanabilir. Burada

$$\overline{\xi_\iota} = u_{i1}\xi_1 + u_{i2}\xi_2 + \cdots + u_{is}\xi_s = \textstyle\sum_{t=1}^{s} u_{it}\xi_t \;, i = 1,2,\dots,s \tag{3.15}$$

$$\omega_j = u_{j1}\eta_1 + u_{j2}\eta_2 + \cdots + u_{js}\eta_s = \sum_{r=1}^{s} u_{jr}\eta_r \;, j = 1,2,\dots,s \tag{3.16}$$

olarak yazabiliriz. Böylece

$$\omega_j(\overline{\xi_\iota}) = \omega_j(\sum_{t=1}^{s} u_{it}\xi_t) = \sum_{t=1}^{s} u_{it}\omega_j(\xi_t)$$

$$= \sum_{t=1}^{s} u_{it} \sum_{r=1}^{s} u_{jr}\eta_r(\xi_t) = \sum_{t,r=1}^{s} u_{it}u_{jr}\delta_{rt} \quad , i,j = 1,2,\dots,s$$

olur. Burada $\delta_{rt} = \begin{cases} 1 \ , & r = t \\ 0 \ , & r \neq t \end{cases}$ dir. (3.12) eşitliğinden,

$$\omega_j(\overline{\xi_\iota}) = \sum_{t=1}^{s} u_{it}u_{jt} = \langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases} \quad , i,j = 1,2,\dots,s$$

elde edilir. Ayrıca (3.15) denkleminden $f\overline{\xi_\iota} = \sum_{t=1}^{s} u_{it} f\xi_t$ olur. Sonuç olarak

$$\omega_j(f\overline{\xi_\iota}) = \sum_{t=1}^{s} u_{it}\omega_j(f\xi_t) = \sum_{t,r=1}^{s} u_{it}u_{jr}\eta_r(f\xi_t) = \sum_{t,r=1}^{s} u_{it}u_{jr}\eta_{rt}$$

dir. Burada (3.5) eşitliğinden $\eta_{rt} = -\eta_{tr}$ eşitliğini kullanırsak

$$\omega_{ji} = \omega_j(f\overline{\xi_\iota}) = -\sum_{t,r=1}^{s} u_{it}u_{jr}\eta_{tr} = \sum_{r,t=1}^{s} u_{it}u_{jr}\eta_t(f\xi_r) = -\omega_i(f\overline{\xi_\jmath}) = -\omega_{ij}$$

olur. (3.15) ve (3.16) denklemlerinden

$$\omega_1\,(X)\overline{\xi_1} + \cdots + \omega_s\,(X)\overline{\xi_s} = \sum_{i=1}^{s} \omega_i(X)\overline{\xi_\iota} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{r,t=1}^{s} u_{ir}u_{it}\eta_r(t)\xi_t$$

olur. (3.13) eşitliğinden

$$\omega_1\,(X)\overline{\xi_1} + \cdots + \omega_s\,(X)\overline{\xi_s} = \eta_1\,(X)\,\xi_1 + \cdots + \eta_s\,(X)\,\xi_s$$

elde edilir. Böylece,

$$f^2\,X = -X + \omega_1\,(X)\,\overline{\xi_1} + \cdots + \omega_s\,(X)\,\overline{\xi_s}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $(M, f, \omega_i, \overline{\xi_j})$, $(i, j = 1,2, \dots, s)$ çatılandırılan manifold olur ve $f\overline{\xi_1} = 0$ dır. Burada (M, f, η_i, ξ_j) yapısında

$f\xi_1 = 0$ kabul edersek genelden bir şey kaybedilmez. O halde $\eta_{11} = \eta_{21} = \eta_{12} = \cdots = \eta_{s1} = \eta_{1s} = 0$ olur. Ayrıca (3.8) eşitliğinden

$$\left.\begin{array}{c} f\xi_1 = 0 \\ f\xi_2 = \eta_{22}\xi_2 + \cdots + \eta_{s2}\xi_s \\ f\xi_3 = \eta_{23}\xi_2 + \cdots + \eta_{s3}\xi_s \\ \vdots \\ f\xi_s = \eta_{2s}\xi_2 + \cdots + \eta_{ss}\xi_s \end{array}\right\} \text{veya} \begin{bmatrix} f\xi_2 \\ f\xi_3 \\ \vdots \\ f\xi_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{22} & \dots & \eta_{s2} \\ \eta_{23} & \dots & \eta_{s3} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_{2s} & \cdots & \eta_{ss} \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_s \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $detM_2 \neq 0$ iken $f\xi_2 = \cdots = f\xi_s = 0$ olur. Eğer $detM_2 = 0$ ise $\{f\xi_2, \dots, f\xi_s\}$ lineer bağımlıdır. Bu durumda $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ ve en az bir λ_i sıfırdan farklı olmak üzere

$$\lambda_2 f\xi_2 + \cdots + \lambda_s f\xi_s = 0$$

ve

$$f(\lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_s\xi_s) = 0$$

olur. Burada $0 \neq X_2 = \lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_s\xi_s \in Sp\{\xi_2, \dots, \xi_s\}$ dır. $\lambda = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \cdots + \lambda_s^2$ olmak üzere $\overline{\xi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda}\xi_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda}\xi_3 + \cdots + \frac{\lambda_s}{\lambda}\xi_s$ denilirse, I. adımdakine benzer olarak

$u_2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}, \frac{\lambda_3}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda_s}{\lambda}\right) = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2s}) \in \mathbb{R}^{s-1}$ sıfırdan farklıdır ve $\mathbb{R}^{s-1}$ de ortonormal olacak şekilde $\{u_2, u_3, \dots, u_s\}$ vektörleri vardır.

$$u_2 = u_{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + u_{2s}\frac{\partial}{\partial x_{s-1}}$$

$$u_3 = u_{31}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + u_{3s}\frac{\partial}{\partial x_{s-1}}$$

$$\vdots$$

$$u_s = u_{s1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + u_{ss}\frac{\partial}{\partial x_{s-1}}$$

yazılır ve I. adımdakine benzer işlemler yapılırsa $\left(M, f, \omega_i, \overline{\xi_j}\right)$ $(i, j = 1,2, \dots, s)$ çatılandırılan manifold olur. Üstelik burada $f\overline{\xi_1} = f\overline{\xi_2} = 0$ dır. Bu durumda $\left(M, f, \eta_i, \xi_j\right)$ $(i, j = 1,2, \dots, s)$ çatılandırılan manifoldunda $f\xi_1 = f\xi_2 = 0$ almakla genelden bir şey kaybedilmez. Benzer işlemler $s-2$ defa tekrarlanırsa $\left(M, f, \eta_i, \xi_j\right)$ $(i, j = 1,2, \dots, s)$ çatılandırılan manifoldunda $f\xi_1 = f\xi_2 = \cdots = f\xi_k = 0$ elde edilir.

ii. $f\xi_1 = f\xi_2 = \cdots = f\xi_s = 0$ olduğunda (3.7) eşitliğinden

$$\eta_1(fX)\xi_1 + \eta_2(fX)\xi_2 + \cdots + \eta_s(fX)\xi_s = 0$$

olur. Burada $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ lineer bağımsız olduğundan $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\eta_1(fX) = \eta_2(fX) = \cdots = \eta_k(fX) = 0$$

elde edilir.

iii. Her $X \in Kerf = \{Y \in \chi(M) | fY = 0\}$ için $fX = 0$ dır. Bu durumda (3.1) denkleminden

$$f^2 X = -X + \eta_1 (X)\xi_1 + \eta_2 (X)\xi_2 + \cdots + \eta_s (X)\xi_s = 0$$

dolayısıyla

$$X = \eta_1 (X)\xi_1 + \eta_2 (X)\xi_2 + \cdots + \eta_s (X)\xi_s$$

ve

$$X = Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$$

dır. O halde

$$Kerf \subset Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\} \tag{3.17}$$

olur. Tersine her $X = \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_s \xi_s \in Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ için

$$f\, X = \lambda_1 f \xi_1 + \cdots + \lambda_s f \xi_s = 0$$

olur. O halde, $X \in Kerf$ dir. Dolayısıyla

$$Sp\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subset Kerf \tag{3.18}$$

dir. (3.17) ve (3.18) denklemlerinden

$$Kerf = Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$$

elde edilir.

iv. $f: \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$ lineer olduğundan

$$rankf + nullf = boy\big(\chi(M)\big) = 2n + s$$

dır. Bu durumda $nullf = \dim(Kerf) = s$ olduğundan

$$rankf = 2n$$

elde edilir.

Lemma 3.1.2 (M, f, η_i, ξ_j) $(2n + s)$-boyutlu çatılandırılan manifold olsun. f'ye karşılık gelen matris

$$f = \begin{bmatrix} [0]_{n\times n} & -I_n & [0]_{n\times s} \\ I_n & [0]_{n\times n} & [0]_{n\times s} \\ [0]_{s\times n} & [y_i]_{s\times n} & [0]_{s\times s} \end{bmatrix}_{(2n+s)\times(2n+s)} \tag{3.19}$$

dir. Burada $[y_i]_{s\times n} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}_{s\times n}$ dir (İshihara ve Yano, 1964).

Örnek 3.1.1 $\mathbb{R}^{2n+s}$ de $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots z_s)$ standart koordinatlar olsun.

$$\eta_j = \frac{1}{2}\left(dz_j + \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i\right) \ , j = 1,2, \dots, s$$

1-formlarını ve $\xi_j = 2\frac{\partial}{\partial z_j}$ vektör alanları olmak üzere (3.19) eşitliğinden

$$f^2X = \begin{bmatrix} 0 & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & y_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & y_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ y_i & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_i & 0 & -I_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+j} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_{2n+1} + \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \\ \vdots \\ X_{2n+s} + \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_{2n+1} + \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_{2n+s} + \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} X_i \\ X_{n+i} \\ X_{2n+j} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(X_{2n+1} + \sum_{i=1}^{n} y_i X_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \frac{1}{2}(X_{2n+s} + \sum_{i=1}^{n} y_i X_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $X = X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + X_{n+i} \frac{\partial}{\partial y_i} + X_{2n+j} \frac{\partial}{\partial z_j}$, $i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots, s$

dir. O halde

$$\eta_j(X) = \frac{1}{2}(X_{2n+j} + \sum_{i=1}^{n} y_i X_i)$$

olur. Ayrıca,

$$f^2 X = -X + \eta_1(X)\xi_1 + \eta_2(X)\xi_2 + \cdots + \eta_s(X)\xi_s$$

ve $f \circ \xi_i = 0$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $(\mathbb{R}^{2n+s}, f, \eta_j, \xi_j)$ bir çatılandırılan manifolddur.

Tanım 3.1.3 (M, f, η_i, ξ_j), $i, j = 1,2, \dots, s$ $(2n + s)$-boyutlu çatılandırılan manifold olsun. Eğer M üzerinde (0,2) Riemann metriği var ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \eta_1(X)\eta_1(Y) - \eta_2(X)\eta_2(Y) - \cdots - \eta_s(X)\eta_s(Y) \qquad (3.20)$$

koşulunu sağlıyorsa (f, η_i, ξ_j, g) $(2s + 2)$-lisine **çatılandırılan metrik yapı** ve (M, f, η_i, ξ_j, g) $(2s + 3)$-lüsüne **çatılandırılan metrik manifold** denir (Yano,1963).

Lemma 3.1.3 (f, η_i, ξ_j), $i, j = 1,2, \ldots, s$ yapısı ile verilen $(2n + s)$-boyutlu bir çatılandırılan M manifoldunda

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \eta_1(X)\eta_1(Y) - \eta_2(X)\eta_2(Y) - \cdots - \eta_s(X)\eta_s(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği vardır (Yano,1963).

İspat: Her düzgün manifold üzerinde bir Riemann metriği tanımlanabilir. O halde h', M de herhangi bir Riemann metrik olsun ve h metriği de $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$h(X, Y) = h'(f^2X, f^2Y) + \eta_1(X)\eta_1(Y) + \eta_2(X)\eta_2(Y) + \cdots + \eta_s(X)\eta_s(Y) \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlansın. h metriğinin Riemann metriği olduğunu gösterelim.

h (0,2) formunun simetrik olduğu açıktır.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} h(aX + bY, Z) &= h'\big(f^2(aX + bY), f^2(Z)\big) + \eta_1(aX + bY)\eta_1(Z) \\ &\quad + \cdots + \eta_s(aX + bY)\eta_s(Z) \\ &= a(h'(f^2(X), f^2(Z)) + \eta_1(X)\eta_1(Z) + \eta_2(X)\eta_2(Z) \\ &\quad + \cdots + \eta_s(X)\eta_s(Z)) + b((h'(f^2(Y), f^2(Z) \\ &\quad + \eta_1(Y)\eta_1(Z) + \eta_2(Y)\eta_2(Z) + \cdots + \eta_s(Y)\eta_s(Z)) \\ &= ah(Z, X) + bh(Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. h simetrik olduğundan bilineerdir. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$h(X,X) = h'\big(f^2(X), f^2(X)\big) + \eta_1^2(X) + \eta_2^2(X) + \cdots + \eta_2^2(X) \tag{3.22}$$

dir. h' Riemann metriği olduğundan $X \neq 0$ için $h'\big(f^2(X), f^2(X)\big) > 0$ dır. O halde $h(X,X) > 0$ olur. Ayrıca $h(X,X) = 0$ ise (3.22) denkleminden her $i = 1,2, \dots, s$ için $\eta_i(X) = 0$ ve $h'\big(f^2(X), f^2(X)\big) = 0$ dolayısıyla h' Riemann metriği olduğundan

$$f^2(X) = 0$$

$$-X + \eta_1\,(X)\xi_1 + \cdots + \eta_s\,(X)\xi_s = 0$$

$$X = 0$$

elde edilir. Böylece h' Riemann metriği ise h da Riemann metriği olur. Eğer g

$\forall X, Y \in \chi(M)$

$$g(X,Y) = \tfrac{1}{2}\big(h(X,Y) + h(fX,fY) + \eta_1(X)\eta_1(Y) + \cdots + \eta_s(X)\eta_s(Y)\big) \tag{3.23}$$

biçiminde tanımlanırsa g nin simetrik ve bilineer olduğu kolayca görülür. $\forall X \in \chi(M)$ için h Riemann metriği olduğundan $g(X,X) > 0$ olur. $g(X,X) = 0$ için (3.23) denkleminden $h(X,X) = 0$ dolayısıyla $X = 0$ bulunur. O halde g Riemann metriği olur. (3.23) denkleminde X yerine fX ve Y yerine fY alınırsa

$$\begin{aligned} g(fX,fY) = \frac{1}{2}\big(&h(fX,fY) + h(f^2X,f^2Y) + \eta_1(fX)\eta_1(fY) \\ &+ \cdots + \eta_s(fX)\eta_s(fY)\big) \end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.21) eşitliğinde Y yerine ξ_i alınırsa (3.3) ve (3.4) eşitliklerinden

$$\eta_i(X) = h(X, \xi_i) \tag{3.25}$$

bulunur. (3.1), (3.2) ve (3.25) denklemlerini (3.24) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} g(fX, fY) &= \tfrac{1}{2}(h(fX, fY) \\ &\quad + h(-X + \eta_1(X)\xi_1 + \cdots + \eta_s(X)\xi_s, -Y + \eta_1(Y)\xi_1 + \cdots + \eta_s(Y)\xi_s)) \\ &= \frac{1}{2}(h(X,Y) + h(fX, fY) - \eta_1(X)\eta_1(Y) - \cdots - \eta_s(X)\eta_s(Y)) \end{aligned}$$

olur. O halde (3.23) denkleminden

$$g(fX, fY) = g(X,Y) - \eta_1(X)\eta_1(Y) - \cdots - \eta_s(X)\eta_s(Y)$$

bulunur. Ayrıca (3.23) ve (3.25) denklemlerinden

$$\eta_i(X) = g(X, \xi_i) \tag{3.26}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.1 M manifoldu $(2n+s)$-boyutlu çatılandırılan manifold olsun. Bu durumda Lemma 3.1.3 gereği

$$g(fX, fY) = g(X,Y) - \eta_1(X)\eta_1(Y) - \cdots - \eta_s(X)\eta_s(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği vardır. Dolayısıyla Tanım 3.1.3 den (M, f, η_i, ξ_j, g) çatılandırılan metrik manifolddur (Yano,1963).

Lemma 3.1.4 (M, f, η_i, ξ_j, g), $i, j = 1,2, \ldots, s$ çatılandırılan metrik manifold olsun. g Riemann metriği

$$g(fX, Y) + g(X, fY) = 0 \tag{3.27}$$

koşulunu sağlar. Yani f ye karşılık gelen matris antisimetriktir (Yano,1963).

İspat: (3.20) eşitliğinde Y yerine fY yazılırsa

$$g(fX, f^2Y) = g(X, fY) - \eta_1(X)\eta_1(fY) - \cdots - \eta_s(X)\eta_s(fY) \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden (3.28) denklemi

$$\begin{gathered} g(fX, -Y + \eta_1(Y)\xi_1 + \cdots + \eta_s(Y)\xi_s) = g(X, fY) \\ -g(fX, Y) + \eta_1(Y)g(fX, \xi_1) + \cdots + \eta_s(Y)g(fX, \xi_s) = g(X, fY) \end{gathered} \tag{3.29}$$

olur. (3.26) eşitliğinden $g(fX, \xi_i) = \eta_i(fX) = 0$ olduğundan (3.29) denklemi

$$g(fX, Y) + g(X, fY) = 0$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.1.4 $(M, f, \xi_i, \eta_j), i, j = 1,2, \ldots, s,$ $(2n + s)$-boyutlu çatılandırılan metrik manifold olsun.

$$N_f(X, Y) = f^2[X, Y] + [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY]$$

ile tanımlı tensör alanına f nin **Nijenhuis tensör alanı** denir (Nakagawa, 1966).

Tanım 3.1.5 $(M, f, \xi_i, \eta_j),$ $i, j = 1,2, \ldots, s$ çatılandırılan metrik manifoldunda N_f Nijenhuis tensör alanı olmak üzere

$$S_f = N_f + 2 \sum_{i=1}^{s} \xi_i \otimes d\eta_i$$

ile tanımlı tensör alanı özdeş olarak sıfır ise M çatılandırılan manifolduna **normaldir** denir (Nakagawa, 1966).

Tanım 3.1.6 $(M, f, \eta_i, \xi_j),$ $i, j = 1,2, \ldots, s,$ $(2n + s)$-boyutlu çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \Phi &: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ &(X, Y) \to \Phi(X, Y) = g(X, fY) \end{aligned} \tag{3.30}$$

olmak üzere Φ ye M manifoldun **temel iki formu** denir (Yano,1963).

Tanım 3.1.7 Temel iki formu kapalı $(d\Phi = 0)$ olan normal çatılandırılmış metrik yapıya $\mathcal{K}$-yapı, üzerinde tanımlı manifolda **$\mathcal{K}$-manifold** denir (Blair,1970).

Tanım 3.1.8 $(M, f, \eta_i, \xi_j, g), i, j = 1,2, \ldots, s$, bir $\mathcal{K}$-manifold olsun.

$$\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \ldots \wedge \eta_s \wedge (\Phi)^n \neq 0$$

ise $\mathcal{K}$-manifolduna **yönlendirilebilirdir** denir (Blair,1970).

Tanım 3.1.9 $(M, f, \eta_i, \xi_j, g), i, j = 1,2, \ldots, s$, $(2n + s)$-boyutlu bir $\mathcal{K}$-manifold olsun. Eğer

$$\Phi(X, Y) = d\eta_i(X, Y)$$

oluyorsa (f, η_i, ξ_j, g) yapısına S-yapı ve üzerinde S-yapı tanımlı manifolda ***S*-manifold** denir. Burada

$$d\eta_1 = d\eta_2 = \cdots = d\eta_s$$

ve

$$\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \ldots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$$

dir (Blair,1970).

Bundan böyle f yerine ϕ kullanılacaktır.

Lemma 3.1.5 $(M,\phi,\eta_i,\xi_j,g), i,j=1,2,\ldots,s$, $(2n+s)$-boyutlu bir S-manifold olsun. O halde

$$(\nabla_X\phi)Y=\sum_{i=1}^{s}\{g(\phi X,\phi Y)\xi_i-\eta_i(Y)\phi^2X\}$$

ve

$$\nabla_X\xi_i=-\phi X \tag{3.31}$$

dir (Blair,1970).

Eğer $s=1$ ise çatılandırılan metrik manifold hemen hemen kontak metrik manifolddur ve bir S-manifold da Sasaki manifolddur.

Tanım 3.1.10 M, $(2n+s)$-boyutlu S-manifold olsun. $\forall X\in\chi(M)$ için

$\eta_i(X)=0, i=1,2,\ldots,s,$ şartını sağlayan S-manifoldunun alt manifolduna **integral alt manifold** denir (Kim ve Dwivedi, 2007).

Tanım 3.1.11 $(M^{2n+s},\phi,\xi_i,\eta_j,g), i,j=1,2,\ldots,s,$ S-manifoldunun 1-boyutlu integral alt manifolduna M nin **Legendre eğrisi** denir. Bir başka deyişle, $\gamma: I\to M$ eğrisinin teğet vektör alanı V_1 olmak üzere her $i=1,2,\ldots,s$ için $\eta_i(V_1)=0$ şartını sağlayan γ eğrisine **Legendre eğri** denir (Özgür ve Güvenç, 2012).

3.2 S-Uzay Formu

Tanım 3.2.1 $(2n+s)$-boyutlu M manifoldu $\left(\phi,\xi_i,\eta_j,g\right), i,j=1,2,\dots,s$, S-yapısı ile verilsin. M nin her noktasındaki düzlem kesitleri için kesitsel eğriliği bir c sabitine eşit ise M, S-manifolduna ***S*-uzay formu** denir ve $M(c)$ ile gösterilir (Blair, 2002).

Teorem 3.2.1 $M(c)$, $(2n+s)$-boyutlu bir S-uzay formu olsun. M nin Riemann eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z=\sum_{i,j=1}^{s}\left\{\eta_i(X)\eta_j(Z)\phi^2Y-\eta_i(Y)\eta_j(Z)\phi^2X-g(\phi X,\phi Z)\eta_i(Y)\xi_j+g(\phi Y,\phi Z)\eta_i(X)\xi_j\right\}+\frac{c+3s}{4}\{-g(\phi Y,\phi Z)\phi^2X+g(\phi X,\phi Z)\phi^2Y\}+\frac{c-s}{4}\{g(X,\phi Z)\phi Y-g(Y,\phi Z)\phi X+2g(X,\phi Y)\}$$

dir (Cabrerizo, Fernandez ve Fernandez, 1993).

Teorem 3.2.2 $\gamma,\left(M^{2n+s},\phi,\xi_i,\eta_j,g\right)$, $i,j=1,2,\dots,s$, S-uzay formunda bir Legendre eğri, $c\neq s$ ve $\phi V_1 \parallel V_2$ olsun. O halde

$$\left\{V_1,\phi V_1,\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{i=1}^{s}\xi_i\right\}$$

γ nın Frenet çatısıdır ve γ nın has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $k_1=\sqrt{c-s}$ eşitliğini sağlayan bir helis ve $c>s$ olmak üzere $k_2=\sqrt{s}$ olmasıdır (Özgür ve Güvenç, 2012).

3.3 $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ Uzayı

$M = \mathbb{R}^{2n+s}$ uzayı, $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_s\}$ koordinat fonksiyonları ile verilsin. $X \in \chi(M)$ için

$$X = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right) + \sum_{j=1}^{s} Z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

olmak üzere

$$\xi_j = 2\frac{\partial}{\partial z_i}, (j = 1,2, \dots, s)$$

$$\eta_j = \frac{1}{2}(dz_j - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i), (j = 1,2, \dots, s)$$

$$\phi X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial y_i} + (\sum_{i=1}^{n} Y_i y_i)\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial z_j}\right)$$

$$g = \sum_{j=1}^{s} \eta_j \otimes \eta_j + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2 + (dy_i)^2$$

eşitlikleri verilsin. Bu durumda, $(\mathbb{R}^{2n+s}, \phi, \xi_j, \eta_j, g)$ sabit $c = -3s$ ϕ-kesitsel eğriliğine sahip bir uzay formudur. Bu uzay formu kısaca $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ ile gösterilir (Hasegawa ve Okuyama, 1986).

$i, k = 1,2, \dots n, j = 1,2, \dots s$ için $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ uzay formu üzerinde

$$X_i = 2\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$X_{n+i} = \phi X_i = 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial z_j}\right)$$

$$\xi_j = 2\frac{\partial}{\partial z_j}$$

olmak üzere

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{2n}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$$

bir ortonormal tabandır. Bu tabana göre Levi-Civita konneksiyonu

$$\nabla_{X_i} X_k = \nabla_{X_{n+i}} X_{n+k} = 0$$

$$\nabla_{X_i} X_{n+k} = \delta_{ik} \textstyle\sum_{j=1}^{s} \xi_j$$

$$\nabla_{X_{n+i}} X_k = -\delta_{ik} \textstyle\sum_{j=1}^{s} \xi_j$$

$$\nabla_{X_i} \xi_j = \nabla_{\xi_j} X_i = -X_{n+k}$$

$$\nabla_{X_{n+i}} \xi_j = \nabla_{\xi_j} X_{n+i} = -X_i$$

dir (Hasegawa ve Okuyama, 1986).

Yukarıdaki sonuçlar $n = 1$ için tekrar düzenlenirse aşağıdakiler elde edilir: $M = \mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ uzay formu $\{x, y, z_1, z_2, \dots, z_s\}$ koordinat fonksiyonu ile verilsin. Bu uzay formu üzerinde

$$X = e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{s} \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in \chi(M)$$

olmak üzere,

$$\xi_i = 2\frac{\partial}{\partial z_i},\ (i = 1,2,\dots,s) \tag{3.32}$$

$$\eta_j = \frac{1}{2}\left(dz_j - y dx\right),\ (j = 1,2,\dots,s) \tag{3.33}$$

$$g = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) + \sum_{j=1}^{s}\eta_j \otimes \eta_j \tag{3.34}$$

olur. $\mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ üzerinde $i = 1,2,\dots,s$ için

$$e_1 = e = 2\frac{\partial}{\partial x},\ e_2 = \phi e = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\sum_{i=1}^{s}\xi_i\right),\ \xi_i = 2\frac{\partial}{\partial z_i} \tag{3.35}$$

olmak üzere $\{e, \phi e, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ bir ortonormal tabandır. Bu tabana göre Levi-Civita konneksiyonu

$$\begin{aligned}
&\nabla_e e = \nabla_{\phi e}\phi e = 0\\
&\nabla_e \phi e = \sum_{i=1}^{s}\xi_i\\
&\nabla_{\phi e} e = -\sum_{i=1}^{s}\xi_i\\
&\nabla_e \xi_i = \nabla_{\xi_i} e = -\phi e\\
&\nabla_{\phi e}\xi_i = \nabla_{\xi_i}\phi e = e
\end{aligned} \tag{3.36}$$

dir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

S-MANİFOLDLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ VEKTÖREL ÇARPIM VE LEGENDRE EĞRİLERİ

4.1. $(2+s)$-Boyutlu Çatılandırılmış Metrik Manifoldlarda Genelleştirilmiş Vektörel Çarpım

Tanım 4.1.1 A, $s \times (s+1)$ tipinde bir matris olsun.

- $\tilde{A}_{ijk}, i = 1,2, \ldots s, j = i+1, i+2, \ldots, s+1, k = 1,2, \ldots, s$, matrisi A matrisinin $i.$ ve $j.$ sütunları ile $k.$ satırının silinmesi ile elde edilen matristir.
  Özel olarak, $s = 1$ için $det\tilde{A}_{121} = 1$ dir.
- $\tilde{\tilde{A}}_{mn}$, $m = 2,3, \ldots, s, n = m+1, m+2, \ldots, s+1$, matrisi A matrisinin $i.$ ve $j.$ sütunlarının kaldırılıp ilk sütunun soluna A matrisinin ilk sütununun yeni bir sütun olarak eklenmesiyle elde edilen matristir.

Örneğin $s = 3$ alınırsa $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ matrisi için,

$$\tilde{A}_{231} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{bmatrix}$$

ve

$$\tilde{\tilde{A}}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{31} & a_{34} \end{bmatrix}$$

elde edilir. (Can ve Camcı, 2023)

Tanım 4.1.2 $M = \left(M^{2+s}, \phi, \eta_i, \xi_j, g\right)$ $(i,j = 1,2,\dots,s)$ $(2+s)$-boyutlu çatılandırılan metrik manifold olsun. M^{2+s} deki **vektörel çarpımı**

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{s+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=i+1}^{s+1} (-1)^{i+j+k} \Phi\left(X_i, X_j\right) \det \tilde{A}_{ijk} \right) \xi_k$$
$$+ \begin{vmatrix} \phi X_1 & \phi X_2 & \cdots & \phi X_{s+1} \\ \eta_1(X_1) & \eta_1(X_2) & \cdots & \eta_1(X_{s+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_s(X_1) & \eta_s(X_2) & \cdots & \eta_s(X_{s+1}) \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $X_1, X_2, X_3, \dots X_{s+1} \in \chi(M)$ ve

$$A = \begin{bmatrix} \eta_1(X_1) & \eta_1(X_2) & \cdots & \eta_1(X_{s+1}) \\ \eta_2(X_1) & \eta_2(X_2) & \cdots & \eta_2(X_{s+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_s(X_1) & \eta_s(X_2) & \cdots & \eta_s(X_{s+1}) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

olmak üzere $\tilde{A}_{ijk}, i = 1,2, \dots s, j = i+1, i+2, \dots, s+1, k = 1,2, \dots, s$ matrisi Tanım 4.1.1 de tanımlandığı gibidir. (Can ve Camcı, 2023)

Örneğin $s = 1$ için $X_1 \wedge X_2 = -g(X_1, \phi X_2)\xi_1 - \eta(X_2)\phi X_1 + \eta(X_1)\phi X_2$ elde edilir ki bu da bize Tanım 2.6.1'deki Camcı'nın 3- boyutlu hemen hemen kontak metrik manifoldlarda tanımladığı vektörel çarpımı verir.

Örnek 4.1.1 $\mathbb{R}^{2+2}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 4-boyutlu Öklid uzayında $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 0,0)$ olacak şekilde izdüşüm fonksiyonu ve $J(x_1, x_2, x_3, x_4)$=$(x_2, -x_1, -x_4, x_3)$ hemen hemen kompleks dönüşümü vardır.

$$\phi = J \circ \pi$$

dönüşümü tanımlanırsa $((\mathbb{R}^{2+2}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \phi, \xi_i, \eta_j, g) \quad (i,j = 1,2)$ yedilisi çatılandırılan metrik manifolddur. Burada $\xi_1 = (0,0,1,0)$, $\xi_2 = (0,0,0,1)$, $\eta_1 = dx_3$, $\eta_2 = dx_4$ ve g de 4-boyutlu Öklid uzayında standart Öklid metriğidir.

$X_1, X_2, X_3 \in T(\mathbb{R}^{2+2})$ olmak üzere $X_1 \times X_2 \times X_3 = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$ elde edilir ki

$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$, $\mathbb{R}^{2+2}$ deki alışılmış vektörel çarpımdır.

Gerçekten, $(M^{2+2}, \phi, \xi_i, \eta_j, g)$ $(i,j = 1,2)$ çatılandırılan metrik manifoldunda

$X_1, X_2, X_3 \in M^{2+2}$ için (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden $A = \begin{bmatrix} \eta_1(X_1) & \eta_1(X_2) & \eta_1(X_3) \\ \eta_2(X_1) & \eta_2(X_2) & \eta_2(X_3) \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3+1} (-1)^{i+j+k} \Phi(X_i, X_j) det\tilde{A}_{ijk} \right) \xi_k + \begin{vmatrix} \phi X_1 & \phi X_2 & \phi X_3 \\ \eta_1(X_1) & \eta_1(X_2) & \eta_1(X_3) \\ \eta_2(X_1) & \eta_2(X_2) & \eta_2(X_3) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 \times X_3 = & \left(\Phi(X_1, X_2)\eta_2(X_3) - \Phi(X_1, X_3)\eta_2(X_2) + \Phi(X_2, X_3)\eta_2(X_1) \right) \xi_1 \\ & + \left(-\Phi(X_1, X_2)\eta_1(X_3) + \Phi(X_1, X_3)\eta_1(X_2) - \Phi(X_2, X_3)\eta_1(X_1) \right) \xi_2 \\ & + \begin{vmatrix} \phi X_1 & \phi X_2 & \phi X_3 \\ \eta_1(X_1) & \eta_1(X_2) & \eta_1(X_3) \\ \eta_2(X_1) & \eta_2(X_2) & \eta_2(X_3) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

$J^2 = -I$ olduğunu gösterelim.

$$J^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = J\big(J(x_1, x_2, x_3, x_4)\big)$$

$$= J(x_2, -x_1-, x_4, x_3)$$

$$= (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

dir. O halde $J^2 = -I$ olur. $\phi = J \circ \pi$ olarak tanımlandığından $\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \chi(M)$ için

$$\phi X = (J \circ \pi)(X) = J\big(\pi(X)\big) = J(x_1, x_2, 0{,}0) = (x_2, -x_1, 0{,}0)$$

$$\phi^2 X = \phi(\phi(X) = \phi(x_2, -x_1, 0{,}0) = (-x_1, -x_2, 0{,}0)$$

$$= -(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_3(0{,}0{,}1{,}0) + x_4(0{,}0{,}0{,}1)$$

olur. O halde $\phi^2 X = -X + \eta_1(X)\xi_1 + \eta_2(X)\xi_2$ dir. Ayrıca $\eta_1(\xi_1) = \eta_2(\xi_2) = 1$ ve $\eta_1(\xi_2) = \eta_2(\xi_1) = 0$ olduğu kolayca görülür. $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in T\mathbb{R}^{2+2}$ olmak üzere

$$g(\phi X, \phi Y) = g((x_2, -x_1, 0{,}0), (y_2, -y_1, 0{,}0)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} g(X,Y) - \eta_1(X)\eta_1(Y) - \eta_2(X)\eta_2(Y) \\ = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.3) ve (4.4) eşitliklerinden

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta_1(X)\eta_1(Y) - \eta_2(X)\eta_2(Y)$$

elde edilir. O halde $((\mathbb{R}^{2+2}(x_1, x_2, x_3, x_4), \phi, \xi_i, \eta_j, g)$ $(i,j = 1{,}2)$, $n = 1$ için çatılandırılan metrik manifolddur. $X_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $X_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $X_3 = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in T\mathbb{R}^{2+2}$ için

$$\Phi(X_1, X_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$\Phi(X_1, X_3) = x_1 z_2 - x_2 z_1$$

$$\Phi(X_2, X_3) = y_1 z - y_2 z_1$$

$$\eta_1(X_1) = x_3 \ , \ \ \eta_2(X_1) = x_4$$

$$\eta_1(X_2) = y_3 \ , \ \ \eta_2(X_2) = y_4$$

$$\eta_1(X_3) = z_3 \ , \ \ \eta_2(X_3) = z_4$$

değerleri (4.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{e_4} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$$

bulunur.

Teorem 4.1.1 $M = \left(M^{2+s}, \phi, \xi_i, \eta_j, g\right), (i, j = 1,2, \dots, s)$ $(2+s)$-boyutlu uzayda çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X_1, X_2, \dots, X_{s+1} \in TM$ için (4.1) vektörel çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. Vektörel çarpım lineer ve antisimetriktir.

ii. $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_{s+1}$ çarpımı $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{s+1}$ vektörlerinin herbirine diktir.

iii. $\phi X = \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_s \times X$ dir. (Can ve Camcı, 2023)

İspat: i. Φ temel iki formu ve determinant fonksiyonu lineer ve antisimetrik olduğundan ispatı açıktır.

ii. $g(X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_{s+1}, X_t) = 0,\ (t = 1,2, \dots, s+1)$ olduğunu göstermeliyiz.

$t = 1$ için ispatı yapalım. (4.1) eşitliğinden

$$g(X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_{s+1}, X_1) = \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i+1}^{s+1}(-1)^{i+j+k}\Phi(X_i, X_j) det\tilde{A}_{ijk}\right)\eta_k(X_1) + \begin{vmatrix} 0 & g(\phi X_2, X_1) & \cdots & g(\phi X_{s+1}, X_1) \\ \eta_1(X_1) & \eta_1(X_2) & \cdots & \eta_1(X_{s+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_s(X_1) & \eta_s(X_2) & \cdots & \eta_s(X_{s+1}) \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

(4.5) denklemindeki determinantı 1. satıra göre açılırsa

$$\textstyle\sum_{k=1}^{s}(\sum_{j=2}^{s+1}(-1)^{2+j+k}\Phi(X_1, X_j) det\tilde{A}_{1jk}\, \eta_k(X_1) \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) eşitliğini (4.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$g(X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_{s+1}, X_1) = \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=2}^{s}\sum_{j=i+1}^{s+1}(-1)^{i+j+k}\Phi(X_i, X_j) det\tilde{A}_{ijk}\right)\eta_k(X_1) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) denklemini açarsak

$$g(X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_{s+1}, X_1) = \sum_{i=2}^{s}\sum_{j=i+1}^{s+1}(-1)^{i+j}\Phi(X_i, X_j) det\,\tilde{\tilde{A}}_{ij} \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada $\tilde{\tilde{A}}_{ij}$, $i = 2,3, \ldots, s$, $j = i + 1, i + 2, \ldots, s + 1$ matrisi Tanım 4.1.1 de tanımlandığı gibidir. Kolayca görülür ki $\det\tilde{\tilde{A}}_{ij} = 0$ dır. O halde

$$g(X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_{s+1}, X_1) = 0$$

bulunur. Benzer yolla $g(X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_{s+1}, X_t) = 0\ (t = 2, \ldots, s+1)$ olduğu ispatlanabilir.

iii. $\forall X, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s \in TM$ için $\xi_i = Y_i$, $i = 1,2,..,s$ ve $X = Y_{s+1}$ dersek (4.1) eşitliğinden

$$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_s \wedge X = Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_{s+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i+1}^{s+1}(-1)^{i+j+k}\Phi\left(Y_i, Y_j\right) det\tilde{A}_{ijk}\right)\xi_k + \begin{vmatrix} \phi Y_1 & \phi Y_2 & \cdots & \phi Y_{s+1} \\ \eta_1(Y_1) & \eta_1(Y_2) & \cdots & \eta_1(Y_{s+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_s(Y_1) & \eta_s(Y_2) & \cdots & \eta_s(Y_{s+1}) \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

elde edilir. (3.3), (3.4) ve (3.27) eşitliklerinden (4.9) eşitliğinde

$$\Phi\left(Y_i, Y_j\right) = 0\,,\ i, j = 1,2, \ldots, s+1 \tag{4.10}$$

dır. $\phi Y_i = \phi \xi_i = 0$, $Y_{s+1} = X$ ifadelerini ve (4.10) eşitliğini (4.9) denkleminde yerine yazarsak (3.3) eşitliğinden

$$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_s \wedge X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi X \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \eta_1(X) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \eta_s(X) \end{vmatrix} = \phi X$$

bulunur.

4.2. S-manifoldlarda Legendre Eğriler

Teorem 4.2.1 $\left(M^{2+s},\phi,\xi_i,\eta_j,g\right)$ S-manifold olsun. $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M^{2+s}$ birim hızlı eğrisinin Serret Frenet vektörleri $V_1,V_2,\dots,V_{s+1},V_{s+2}$ ve eğrilikleri $k_1,k_2,\dots,k_{s+1}$ olsun $\varepsilon=\pm1$ olmak üzere γ eğrisi Legendre eğri ise

$$V_2=\varepsilon\phi V_1$$

$$V_3=\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_s$$

$$k_2=\sqrt{s}$$

ve

$$k_3=0$$

dır. (Can ve Camcı, 2023)

İspat $\sigma_{ij}: I\to\mathbb{R}$

$$s\to\sigma_{ij}(s)=g\left(V_i,\xi_j\right)\quad,\quad 1\le i\le s+2\ \ ,\ \ 1\le i\le s$$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\xi_1&=\sigma_{11}V_1+\sigma_{21}V_2+\cdots+\sigma_{(s+2)1}V_{s+2}=\sum_{i=1}^{s+2}\sigma_{i1}V_i\\ \xi_2&=\sigma_{12}V_1+\sigma_{22}V_2+\cdots+\sigma_{(s+2)2}V_{s+2}=\sum_{i=1}^{s+2}\sigma_{i2}V_i\\ &\vdots\\ \xi_s&=\sigma_{1s}V_1+\sigma_{2s}V_2+\cdots+\sigma_{(s+2)s}V_{s+2}=\sum_{i=1}^{s+2}\sigma_{is}V_i\end{aligned}\tag{4.11}$$

olur. (4.11) denklemi kısaca

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{s+2} \sigma_{ij} V_i \quad , \quad j = 1,2,\dots,s$$

şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki γ Legendre eğri olsun. Bu durumda

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \cdots = \sigma_{1s} = 0 \tag{4.12}$$

olur. Ayrıca Teorem 4.1.1 den

$$\phi V_1 = \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_s \times V_1$$

olduğundan

$$\phi V_1 = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & \dots & V_{s+1} & V_{s+2} \\ \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} & \dots & \sigma_{(s+1)1} & \sigma_{(s+2)1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} & \dots & \sigma_{(s+1)2} & \sigma_{(s+2)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{1s} & \sigma_{2s} & \sigma_{3s} & \dots & \sigma_{(s+1)s} & \sigma_{(s+2)s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

yazılır. (4.13) determinantı son satıra göre açılırsa

$$\phi V_1 = (-1)^{s+1} \begin{vmatrix} V_2 & V_3 & \dots & V_{s+1} & V_{s+2} \\ \sigma_{21} & \sigma_{31} & \dots & \sigma_{(s+1)1} & \sigma_{(s+2)1} \\ \sigma_{22} & \sigma_{32} & \dots & \sigma_{(s+1)2} & \sigma_{(s+2)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{2s} & \sigma_{3s} & \dots & \sigma_{(s+1)s} & \sigma_{(s+2)s} \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.12) denkleminden

$$\sigma_{11} = 0 = g(V_1, \xi_1) \tag{4.15}$$

(4.15) eşitliğin türevi alınırsa (3.27) ve (3.31) denklemlerinden

$$k_1 g(V_2, \xi_1) = g(V_1, \phi V_1) = 0$$

$$k_1 \sigma_{21} = 0 \quad , \quad k_1 \neq 0$$

$$\sigma_{21} = 0 \tag{4.16}$$

elde edilir. Benzer işlemler yardımıyla (4.12) eşitliğinden

$$\sigma_{22} = \sigma_{23} = \cdots = \sigma_{2s} = 0 \tag{4.17}$$

bulunur. (4.14), (4,15) ve (4.16) denklemlerinden

$$\phi V_1 = (-1)^{s+1} \begin{vmatrix} V_2 & V_3 & \cdots & V_{s+1} & V_{s+2} \\ 0 & \sigma_{31} & \cdots & \sigma_{(s+1)1} & \sigma_{(s+2)1} \\ 0 & \sigma_{32} & \cdots & \sigma_{(s+1)2} & \sigma_{(s+2)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_{3s} & \cdots & \sigma_{(s+1)s} & \sigma_{(s+2)s} \end{vmatrix} \tag{4.18}$$

elde edilir. Burada (4.18) determinantı

$$\phi V_1 = (-1)^{s+1} \begin{vmatrix} \sigma_{31} & \cdots & \sigma_{(s+1)1} & \sigma_{(s+2)1} \\ \sigma_{32} & \cdots & \sigma_{(s+1)2} & \sigma_{(s+2)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{3s} & \cdots & \sigma_{(s+1)s} & \sigma_{(s+2)s} \end{vmatrix} V_2 \tag{4.19}$$

olur. (4.12), (4.16) ve (4.17) denklemlerinde bulunan ifadeler (4.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_{31}V_3 + \cdots + \sigma_{(s+2)1}V_{s+2} \\ \xi_2 &= \sigma_{32}V_3 + \cdots + \sigma_{(s+2)2}V_{s+2} \\ &\vdots \\ \xi_s &= \sigma_{3s}V_3 + \cdots + \sigma_{(s+2)s}V_{s+2} \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20) denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{31} & \sigma_{41} & \cdots & \sigma_{(s+2)1} \\ \sigma_{32} & \sigma_{42} & \cdots & \sigma_{(s+2)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{3s} & \sigma_{4s} & \cdots & \sigma_{(s+2)s} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{s+2} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

elde edilir. $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ ve $\{V_3, \dots, V_{s+2}\}$ sistemleri ortonormal olduğundan B matrisi ortonormaldir. Yani $B^T = B^{-1}$ dir. Bu durumda B matrisinin determinantı

$$|B| = \pm 1 \tag{4.22}$$

dir. O halde $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere (4.19) ve (4.22) eşitliklerinden

$$\phi V_1 = \varepsilon V_2 \tag{4.23}$$

elde edilir.(4.23) eşitliğinin ϕ altında görüntüsünü alınırsa

$$\phi^2 V_1 = \phi V_2 = -V_1 + \eta_1(V_1)\xi_1 + \cdots + \eta_s(V_1)\xi_s \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.12) denkleminden

$$\phi V_2 = -V_1 \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.16) eşitliğinde $\sigma_{21} = g(V_2, \xi_1) = 0$ olup bu eşitliğin türevini alırsak

$$-k_1 g(V_1, \xi_1) + k_2 g(V_3, \xi_1)\xi + g(V_2, \phi V_1) = 0$$

elde edilir. (4.12) eşitliğinden

$$k_2 \sigma_{31} = g(V_2, \phi V_1) \tag{4.26}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.17) deki eşitliklerinin türevini alırsak

$$k_2 \sigma_{32} = k_2 \sigma_{33} = \cdots = k_2 \sigma_{3s} = g(V_2, \phi V_1) \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.19) eşitliğinden,

$$g(V_2, \phi V_1) = (-1)^{s+1} \begin{vmatrix} \sigma_{31} & \cdots & \sigma_{(s+1)1} & \sigma_{(s+2)1} \\ \sigma_{32} & \cdots & \sigma_{(s+1)2} & \sigma_{(s+2)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{3s} & \cdots & \sigma_{(s+1)s} & \sigma_{(s+2)s} \end{vmatrix} \tag{4.28}$$

$$= (-1)^{s+1}|B| = (-1)^{s+1}.(-1)^{s+1}$$

elde edilir. O halde (4.28) denklemi

$$g(V_2, \phi V_1) = 1 \tag{4.29}$$

şeklinde olur. (4.29) eşitliğini (4.26) ve (4.27) denklemlerinde yerine yazarsak

$$k_2\sigma_{31} = k_2\sigma_{32} = k_2\sigma_{33} = \cdots = k_2\sigma_{3s} = 1 \tag{4.30}$$

elde edilir. Burada $k_2 \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda (4.30) denkleminden

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \cdots = \sigma_{3s} = \frac{1}{k_2} \tag{4.31}$$

elde edilir. Burada B matrisi ortonormal olduğundan

$$(\sigma_{31})^2 + (\sigma_{32})^2 + \cdots + (\sigma_{3s})^2 = 1 \tag{4.32}$$

(4.31) ve (4.32) denklemlerinde $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \cdots = \sigma_{3s} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} \tag{4.33}$$

ve

$$k_2 = \sqrt{s}$$

elde edilir. (4.32) eşitliğinden türev alırsak

$$-k_2 g(V_2, \xi_1) + k_3 g(V_4, \xi_1) + g(V_3, \phi V_1) = 0 \tag{4.34}$$

bulunur. (4.16) ve (4.17) denklemlerinden (4.34) denklemi

$$k_3 \sigma_{41} = 0 \tag{4.35}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$k_3 \sigma_{42} = k_3 \sigma_{43} = \cdots = k_3 \sigma_{4s} = 0 \tag{4.36}$$

elde edilir. Burada B matrisi ortonormal olduğundan

$$(\sigma_{41})^2 + (\sigma_{42})^2 + \cdots + (\sigma_{4s})^2 = 1 \tag{4.37}$$

dir. (4.35), (4.36) ve (4.37) denklemlerinden

$$k_3 = 0$$

elde edilir. (4.21) denkleminden

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_s \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{s+2} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

dir. $B^T = B^{-1}$ olduğundan (4.38) denklemi

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{s+2} \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_s \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

şeklinde olur. (4.21) denklemindeki B matrisinde (4.33) eşitliğindeki değerler yerine yazılırsa

$$B^T = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} & \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} & \cdots & \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \dots & \sigma_{4s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{(s+2)1} & \sigma_{(s+2)2} & \cdots & \sigma_{(s+2s,)s} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

olur. (4.40) eşitliğini (4.39) denkleminde yerine yazarsak

$V_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha$

bulunur.

Sonuç 4.2.1 Teorem 3.2.2 de Özgür ve Güvenç $\phi V_1 \parallel V_2$ olduğunu kabul ederek Teorem 4.2.1 deki sonuçların aynılarını biharmonik Legendre eğriler için elde etmişlerdir. O halde Legendre eğrilerin aynı zamanda biharmonik oldukları sonucuna varılabilir.

$\gamma: I \to \mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ birim hızlı bir Legendre eğri olsun. γ eğrisini, t yay parametresi olmak üzere

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z_1(t), \dots, z_s(t))$$

ile gösterelim. γ Legendre eğri olduğundan V_1 γ nın teğet vektör alanı olmak üzere $\eta_j(V_1) = 0, (j = 1,2, \dots s)$ dır.

$$\eta_j(V_1) = \eta_j(x'(t), y'(t), z_1'(t), \dots, z_s'(t))$$

(3.32), (3.33) ve (3.34) eşitliklerinden,

$$\begin{gathered}\eta_1(V_1) = 0 \Rightarrow z_1'(t) - y(t)x'(t) = 0 \\ \eta_2(V_1) = 0 \Rightarrow z_2'(t) - y(t)x'(t) = 0 \\ \vdots \\ \eta_s(V_1) = 0 \Rightarrow z_s'(t) - y(t)x'(t) = 0\end{gathered} \tag{4.41}$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), f(t) + c_1, f(t) + c_2, \dots, f(t) + c_s)$$

yazılır. γ eğrisinin teğet vektör alanı $\{e, \phi e, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ tabanı cinsinden yazılırsa (3.35) ve (4.41) eşitliklerinden

$$V_1 = \frac{1}{2}(y'e + x'\phi e) \tag{4.42}$$

elde edilir. Ayrıca γ birim hızlı olduğundan

$$(x')^2 + (y')^2 = 4$$

dır. O halde aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.2.1 $\theta(t) = ct + c_0$ olmak üzere,

$$x(t) = \frac{2}{c}\cos\theta + x_0$$

$$y(t) = \frac{2}{c} sin\theta + y_0$$

$$f(t) = \frac{1}{c^2} sin2\theta + \frac{2y_0}{c} cos\theta - \frac{2}{c} t$$

için $\gamma: I \to \mathbb{R}^{2+s}(-3s)$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), f(t) + c_1, f(t) + c_2, \dots, f(t) + c_s)$ eğrisi Legendre eğridir ve birim hızlıdır. $\{e, \phi e, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ tabanına göre γ eğrisinin teğet vektör alanı

$$V_1 = cos\theta e - sin\theta\phi e \tag{4.43}$$

dir. (3.32), (3.33) ve (3.34) eşitliklerinden $\eta_i(V_1) = 0, i = 1,2,\dots,s$ olduğu görülür. γ eğrisinin eğrilikleri hesaplanırsa, (3.36) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1}\phi e &= cos\theta \textstyle\sum_{i=1}^{s} \xi_i \\ \nabla_{V_1} e &= sin\theta \textstyle\sum_{i=1}^{s} \xi_i \\ \nabla_{V_1}\xi_i &= -\sin\theta\, e - \cos\theta\, \phi e,\ i = 1,2,\dots,s \end{aligned} \tag{4.44}$$

bulunur. (4.43) denkleminden

$$\nabla_{V_1} V_1 = -csin\theta e - ccos\theta\phi e + cos\theta\nabla_{V_1} e - sin\theta\nabla_{V_1}\phi e \tag{4.45}$$

elde edilir. (4.44) deki eşitlikleri (4.45) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla_{V_1} V_1 = -csin\theta e - ccos\theta\phi e \tag{4.46}$$

elde edilir. $\nabla_{V_1} V_1 = k_1 V_2$ olduğundan (4.46) denkleminden $k_1 = c$ elde edilir. O halde

$$V_2 = -(sin\theta e + cos\theta\phi e) \tag{4.47}$$

dir. (4.43) ve (4.47) denklemlerinden,

$$\phi V_1 = cos\theta\phi e + sin\theta e = -V_2$$

bulunur.

$$E_1 = \gamma' = V_1$$

$$E_2 = \nabla_{V_1}V_1$$

$$E_3 = \nabla_{V_1}(\nabla_{V_1}V_1) - \frac{\langle\nabla_{V_1}(\nabla_{V_1}V_1),\nabla_{V_1}V_1\rangle}{\langle\nabla_{V_1}V_1,\nabla_{V_1}V_1\rangle}\nabla_{V_1}V_1 - \frac{\langle\nabla_{V_1}(\nabla_{V_1}V_1),V_1\rangle}{\langle V_1,V_1\rangle}V_1$$

olmak üzere,

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|}$$

olduğundan,

$$\nabla_{V_1}(\nabla_{V_1}V_1) = \nabla_{V_1}(-csin\theta e - ccos\theta\phi e)$$

$$= -c^2cos\theta e + c^2sin\theta\phi e - c\sum_{i=1}^{s}\xi_i$$

$$\langle\nabla_{V_1}(\nabla_{V_1}V_1),\nabla_{V_1}V_1\rangle = 0$$

$$\langle\nabla_{V_1}(\nabla_{V_1}V_1),V_1\rangle = -c^2$$

$$E_3 = -c\sum_{i=1}^{s}\xi_i$$

$$V_3 = \frac{\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\xi_i}{\sqrt{s}}$$

elde edilir. Ayrıca, $k_2 = \langle \nabla_{V_1}V_2, V_3\rangle$ denkleminde

$$\nabla_{V_1}V_2 = -(cos\theta e - sin\theta\phi e + \sum_{i=1}^{s}\xi_i)$$

denklemini yerine yazarsak $k_2 = \sqrt{s}$ bulunur. Benzer şekilde $k_3 = \langle \nabla_{V_1}V_3, V_4\rangle$ ve

$$\nabla_{V_1}V_3 = -k_2V_2 + k_3V_4$$

denklemlerinde

$$\nabla_{\mathrm{V}_1}\mathrm{V}_3 = \sqrt{s}(sin\theta e + cos\theta\phi e)$$

ifadesi yerine yazılırsa $k_3V_4 = 0$ dolayısıyla $k_3 = 0$ elde edilir.

Teorem 4.2.2 $\left(M^{2+2}, \phi, \xi_i, \eta_j, g\right)$ S −manifold olsun. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M^{2+2}$ birim hızlı eğrisinin Serret Frenet vektörleri V_1, V_2, V_3, V_4 ve eğrilikleri k_1, k_2, k_3 olsun. γ eğrisi Legendre eğri ise

$$V_4 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2)$$

dir. (Can ve Camcı, 2023)

İspat: Lemma 2.4.3 den $V_4 = -V_1 \wedge V_2 \wedge V_3$ dir. (4.1) denkleminden

$$V_4 = \big(g(V_1, \phi V_2)\eta_2(V_3) - g(V_1, \phi V_3)\eta_2(V_2) + g(V_2, \phi V_3)\eta_2(V_1)\big)\xi_1 + \\ \big(-g(V_1, \phi V_2)\eta_1(V_3) + g(V_1, \phi V_3)\eta_1(V_2) - g(V_2, \phi V_3)\eta_1(V_1)\big)\xi_2 + \\ \begin{vmatrix} \phi V_1 & \phi V_2 & \phi V_3 \\ \eta_1(V_1) & \eta_1(V_2) & \eta_1(V_3) \\ \eta_2(V_1) & \eta_2(V_2) & \eta_2(V_3) \end{vmatrix} \tag{4.48}$$

bulunur. (4.16), (4.17), (4.23), (4,25), (4,31) ve (4,48) denklemlerinden,

$$V_4 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2)$$

elde edilir.

Örnek 4.2.2 $\mathbb{R}^{2+2}(-6)$ uzayında

$\gamma(t) = (2\ln\left|\sqrt{1+t^2} + t\right|, 2\sqrt{1+t^2}, 4t + c_1, 4t + c_2)$ bir Legendre eğridir. Bu eğrinin teğet vektör alanı (4.42) denkleminden

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(te + \phi e) \tag{4.49}$$

bulunur. (3.36) denkleminden

$$\nabla_{V_1} e = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\xi_1 + \xi_2)$$
$$\nabla_{V_1} \phi e = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(\xi_1 + \xi_2) \tag{4.50}$$
$$\nabla_{V_1} \xi_i = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(-t\phi e + e), i = 1,2$$

dir. (4.49) ve (4.50) denklemlerinden

$$\nabla_{V_1} V_1 = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}(e - t\phi e)$$

$$k_1 = \left\| \nabla_{V_1} V_1 \right\| = \frac{1}{1+t^2}$$

$$V_2 = \frac{\nabla_{V_1} V_1}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(e - t\phi e)$$

ve

$$\phi V_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(e - t\phi e) = -V_2$$

elde edilir.

$$\nabla_{V_1} V_2 = -k_1 V_1 + k_2 V_3$$

eşitliği yardımıyla

$$\nabla_{V_1} V_2 = -\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}(te + \phi e) - (\xi_1 + \xi_2)$$

$$k_1V_1 = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}(te + \phi e)$$

olduğundan

$$k_2V_3 = -(\xi_1 + \xi_2) \tag{4.51}$$

dir. (4.51) eşitliğinden $k_2 = \sqrt{2}$ ve $V_3 = -\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}}$ elde edilir.

$$\nabla_{V_1}V_3 = -k_2V_2 + k_3V_4$$

eşitliği yardımıyla $k_3V_4 = 0$ bulunur. O halde $k_3 = 0$ dır. Lemma 2.4.3 den

$$V_4 = \begin{vmatrix} e & \phi e & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} & -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & 0 & 0 \\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2 - \xi_1)$$

bulunur.

Teorem 4.2.3 $\left(M^{2+3}, \phi, \xi_{j,}\eta_i, g\right)$, $(i,j = 1,2,3)$ S-manifold olsun. γ, M^{2+3} de Legendre eğri olmak üzere bu eğri 3-boyutlu K-kontak uzayına imbedding yapılır. (Can ve Camcı, 2023)

İspat: $\left(M^{2+3}, \phi, \xi_{j,}\eta_i, g\right)$, $(i,j = 1,2,3)$ S- manifold ve

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M^{2+3} \quad , s \to \gamma(s)$$

Legendre eğri olsun.

$$\theta(s) = \int k_4 ds \tag{4.52}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} U_1 &= cos\theta.V_4 - sin\theta.V_5 \\ U_2 &= sin\theta.V_4 + cos\theta.V_5 \end{aligned} \tag{4.53}$$

vektörleri tanımlansın. (4.53) denkleminden

$$\nabla_{V_1} U_1 = -\theta' sin\theta V_4 + cos\theta k_4 V_5 - \theta' cos\theta V_5 + sin\theta k_4 V_4 \tag{4.54}$$

dir. (4.52) ve (4.54) denklemlerinden

$$\nabla_{\mathrm{V}_1} \mathrm{U}_1 = 0$$

ve benzer şekilde,

$$\nabla_{\mathrm{V}_1} \mathrm{U}_2 = 0$$

dır. O halde U_1ve U_2 vektörleri sabittir. (4.53) denkleminden kolayca görülür ki

$$\{V_1, V_2, V_3, U_1, U_2\}$$

bir ortonormal tabandır.

$$f_1 : I \to \mathbb{R}$$
$$s \to f_1(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(0), U_1 \rangle$$

ve

$$f_2 : I \to \mathbb{R}$$
$$s \to f_2(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(0), U_2 \rangle$$

fonksiyonları tanımlanırsa, (4.53) ve U_1, U_2 vektörleri sabit olduğundan

$$f_1'(s) = \langle \gamma'(s), U_1 \rangle + \langle \gamma(s) - \gamma(0), u_1' \rangle = \langle V_1, U_1 \rangle = 0$$

$$f_1(s) = c\ (sabit)$$

$$f_1(0) = \langle \gamma(0) - \gamma(0), U_1 \rangle = c = 0$$

olup $\forall s \in I$ için $f_1(s) = 0$ olur. Benzer şekilde $\forall s \in I$ için $f_2(s) = 0$ olduğu görülür. O halde

$$\gamma(s) - \gamma(0) \in Sp\{V_1, V_2, V_3\}$$

dir. Şimdi

$$\omega = \{X \in \chi(M) | g(X, U_1) = 0, g(X, U_2) = 0\}$$

kümesi tanımlanırsa,

$$\omega = Sp\{V_1, V_2, V_3\}$$

olduğundan $\gamma(s) - \gamma(0) \in \omega$ dır.

$$\pi : \chi(M) \to \omega$$

$$X \quad \to \pi(X) = \bar{X} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \xi$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\bar{X} \in D = \{X \in \chi(M) | \eta_i(X) = 0, i = 1,2,3\}$ ve $X = \bar{X} + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_3$ ve $\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3}$ dir.

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \ , \tilde{\phi} = \phi \ \text{ ve } \tilde{g} = 3g$$

olarak alınırsa, $(w^3, \tilde{f}, \xi, \eta, \tilde{g})$ beşlisi K-kontak metrik manifold olur. Gerçekten, $\tilde{g} = 3g$ ise $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ dır. O halde $\tilde{\nabla} = \nabla$ olur. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X, Y) = (d\eta_1 + d\eta_2 + d\eta_3)(X, Y) = 3d\eta_1(X, Y)$$

$$= 3\Phi(X, Y) = 3g(X, \phi Y) = \tilde{g}(X, \phi Y)$$

olacağından

$$\widetilde{\Phi}(X,Y) = d\eta(X,Y)$$

dir. Ayrıca,

$$\widetilde{\nabla}_{\pi X}\xi = \nabla_{\pi X}\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{3}\right) = \frac{1}{3}(\nabla_{\pi X}\xi_1 + \nabla_{\pi X}\xi_2 + \nabla_{\pi X}\xi_3)$$

$$= \frac{-3}{3}\phi(\pi X) = -\phi(\pi X) = -\tilde{\phi}(\pi X)$$

elde edilir. $V_1(s) = \gamma'(s)$ olmak üzere,

$$\eta(V_1) = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)(V_1) = \eta_1(V_1) + \eta_2(V_1) + \eta_3(V_1) = 0$$

olduğundan γ eğrisi ω uzayında Legendre eğridir.

Sonuç 4.2.2 3-boyutlu K-kontak uzaylar Sasaki uzaylardır. O halde M^{2+3} deki Legendre eğriler Sasaki uzayına imbedding yapılabilir.

4.3. $\mathbb{R}^{2+s}$ Uzayında Silindirde Yatan Sonlu Tipte Legendre Eğriler

Tanım 4.3.1 M manifoldu $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2n+s}}(-3s)$ S-uzay formunun kompakt C^{∞} manifoldu ve $x: M \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{2n+s}}(-3s)$ bir izometrik immersiyon olsun. Burada x in koordinat fonksiyonları $A = 1, \dots, 2n$ için x_A ise $x = (x_A, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{2n+s})$ olarak yazılabilir. Bu durumda,

$$x_A - (x_A)_0 = \sum_{t=p_A}^{q_A} (x_A)_t \tag{4.55}$$

olmak üzere $p_A = \{inf t: (x_A)_t \neq 0\}$ ve $q_A = \{sup\ t: (x_A)_t \neq 0\}$ olarak tanımlanır. Eğer $p = \inf\ \{p_A\}$, $q = \sup\ \{q_A\}$, x_0 sabit bir vektör ve $x_t: M \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{2n+s}}(-3s)$ dönüşümleri de sabit olmayan düzgün dönüşümler iken (4.55) denkleminin spektral ayrışımı

$$x - x_0 = \sum_{t=p}^{q} x_t \ \ , \Delta_{x_t} = \lambda_t x_t \tag{4.56}$$

olur. (4.56) denkleminin ϕ altındaki görüntüsü alınırsa

$$\phi^2 x = \phi^2 x_0 + \sum_{t=p}^{q} \phi^2 x_t \tag{4.57}$$

spektral ayrışımı elde edilir. Burada $\Delta g(x_t, e_A) = \lambda_t g(x_t, e_A)$ dir. (4.57) spektral ayrışımında sıfırdan farklı k tane $\phi^2 x_t$ ler varsa $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2n+s}}(-3s)$ S-uzay formunda kompakt M manifolduna ***k*-tiplidir** denir.

Tanım 4.3.2 $\mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ uzayında $N^{1+s}(r)$ **silindiri**

$$N^{1+s}(r) = \{X \epsilon\ \mathbb{R}^{2+s}(-3s): g(X - X_0, X - X_0) - \sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X - X_0))^2 = r^2\} \tag{4.58}$$

veya

$$N^{1+s}(r) = \{X = (x, y, z_1, \dots, z_s): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (2r)^2\} \tag{4.59}$$

biçimde tanımlanır. Burada r sabittir.

$\gamma: I \to \mathbb{R}^{2+s}(-3s)$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z_1(t), \dots, z_s(t))$, eğrisi $N^{1+s}(r)$ silindirinde yatan bir eğri olsun. Burada t yay parametresidir. O halde (4.59) denkleminden

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4r^2$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} x(t) &= 2rcos\theta(t) + x_0 \\ y(t) &= 2rsin\theta(t) + y_0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

ve

$$\gamma(t) - \gamma_0 = (2rcos\theta(t), 2rsin\theta(t), z_1(t), \dots, z_s(t)) \tag{4.61}$$

dir. (4.61) denklemi $\{e, \phi e, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ tabanı cinsinden yazılırsa

$$\gamma(t) - \gamma_0 = rsin\theta(t)e + rcos\theta(t)\phi e + \sigma_1\xi_1 + \cdots + \sigma_s\xi_s \tag{4.62}$$

elde edilir. Burada $\sigma_i = z_i - rcos\theta(t)y$ dir.

Teorem 4.3.1 γ, $N^{1+s}(r)$ silindirinde yatan bir eğri olsun. γ eğrisinin 1-tipten olması için gerek ve yeter koşul θ' nün sabit olmasıdır.

İspat: Eğer eğri 1-tipten ise (4.57) denkleminden

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e_i) = \lambda g(\gamma - \gamma_0, e_i)\,,\ i = 1,2 \tag{4.63}$$

elde edilir. Bir eğrinin Laplace'ı

$$\Delta f = -f'' \tag{4.64}$$

dir.

$$f = g(\gamma - \gamma_0, e_1) = g(\gamma - \gamma_0, e) \tag{4.65}$$

ve

$$g = g(\gamma - \gamma_0, e_2) = g(\gamma - \gamma_0, \phi e) \tag{4.66}$$

dersek, (4.62), (4.65) ve (4.66) denklemlerinden

$$f = rsin\theta \tag{4.67}$$

ve

$$g = rcos\theta \tag{4.68}$$

olur. O halde (4.64), (4.67) ve (4.68) denklemlerinden

$$\Delta f = -r(\theta'' cos\theta - (\theta')^2 sin\theta) \tag{4.69}$$

ve

$$\Delta g = -g'' = r(\theta'' sin\theta + (\theta')^2 cos\theta\ ) \tag{4.70}$$

elde edilir. (4.63), (4.69) ve (4.70) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -r(\theta'' cos\theta - (\theta')^2 sin\theta) &= \lambda rsin\theta \\ r(\theta'' sin\theta + (\theta')^2 cos\theta\ ) &= \lambda rcos\theta \end{aligned} \tag{4.71}$$

denklemleri elde edilir. (4.71) denklem sistemi çözülürse $\theta'' = 0$ bulunur. Dolayısıyla θ' sabittir.

Tersine θ' sabit olsun. O halde $\theta(t) = ct + c_1$ yazılabilir. O halde (4.62) denkleminden

$$\begin{aligned} g(\gamma - \gamma_0, e) &= rsin\theta \\ g(\gamma - \gamma_0, fe) &= rcos\theta \end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir. (4.63) ve (4.72) denklemlerinden $\theta' = c$ olmak üzere

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, e) = rc^2 sin\theta = c^2 g(\gamma - \gamma_0, e)$$

ve

$$\Delta g(\gamma - \gamma_0, \phi e) = rc^2 cos\theta = c^2 g(\gamma - \gamma_0, \phi e)$$

elde edilir. O halde γ, 1-tiptendir.

Teorem 4.3.2 $\gamma: I \to \mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ birim hızlı eğrisinin Serret Frenet vektörleri $V_1, V_2, \dots, V_{s+1}, V_{s+2}$, eğrilikleri $k_1, k_2, \dots, k_{s+1}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere γ, $N^{1+s}(r)$ silindirinde yatan bir Legendre eğri olsun. Eğer γ eğrisi 1-tipten ise

$$k_1 = \frac{1}{r} \quad , \quad k_2 = \sqrt{s} \quad , \quad k_3 = 0 \quad , \quad V_2 = \varepsilon \phi V_1$$

ve

$$V_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_s$$

dir.

İspat: $\gamma(t) = (x(t), y(t), z_1(t), \dots, z_s(t))$, $N^{1+s}(r)$ silindirinde yatan bir Legendre eğri olsun. γ, Legendre eğri olduğundan $\eta_j(V_1) = 0, (j = 1,2. \dots, s)$ dir. (4.41) deki denklemlerden

$$z_1'(t) = z_2'(t) = \cdots = z_s'(t) = y(t)x'(t)$$

olduğundan, $z_i(t) = f(t)$ denilirse, (4.60) eşitliklerinden

$$f(t) = -r^2\big(2\theta(t) - sin2\theta(t)\big) + 2ry_0cos\theta(t)$$

bulunur. O halde

$$\gamma(t) = (2rcos\theta(t) + x_0, 2rsin\theta(t) + y_0, f(t) + c_1, \dots, f(t) + c_s)$$

$N^{1+s}(r)$ silindirinde yatan bir Legendre eğridir. (4.42) denkleminden γ eğrisinin teğet vektör alanı

$$V_1 = r\theta' cos\theta e - r\theta' sin\theta \phi e \qquad (4.73)$$

dir. (3.36) denkleminden

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} e &= r\theta' sin\theta \textstyle\sum_{i=1}^{s} \xi_i \\ \nabla_{V_1} \phi e &= r\theta' sin\theta \textstyle\sum_{i=1}^{s} \xi_i \\ \nabla_{V_1} \xi_i &= r\theta' cos\theta \phi e - r\theta' sin\theta e\,,\ i = 1,2. \dots, s \end{aligned} \qquad (4.74)$$

(4.73) ve (4.74) denklemlerinden

$$\nabla_{V_1}V_1 = (r\theta''cos\theta - r(\theta')^2 sin\theta)e - (r\theta''sin\theta + r(\theta')^2 cos\theta)\phi e \tag{4.75}$$

elde edilir. O halde, (4.75) denkleminden

$$k_1{}^2 = \left\|\nabla_{V_1}V_1\right\|^2 = r^2(\theta')^4 + r^2(\theta'')^2 \tag{4.76}$$

bulunur. γ eğrisi birim hızlı olduğundan (4.73) denkleminden

$$r^2(\theta')^2 = 1 \tag{4.77}$$

olur. γ eğrisi 1-tipten olduğundan Teorem 4.3.2, (4.76) ve (4.77) denklemlerinden

$$k_1 = \frac{1}{r} \tag{4.78}$$

bulunur. (4.77) denkleminden $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$r\theta' = \varepsilon \tag{4.79}$$

dir. (4.73) ve (4.79) denklemlerinden

$$V_1 = \varepsilon(cos\theta e - sin\theta\phi e) \tag{4.80}$$

elde edilir. (4.80) denkleminin ϕ altındaki görüntüsü alınırsa,

$$\phi V_1 = \varepsilon(cos\theta e + sin\theta\phi e) \tag{4.81}$$

elde edilir. $\nabla_{V_1} V_1 = k_1 V_2$ olduğundan (4.75), (4.77) ve (4.78) denklemlerinden

$$V_2 = -(sin\theta e + cos\theta\phi e) \tag{4.82}$$

bulunur. (4.81) ve (4.82) denklemlerinden $V_2 = \varepsilon\phi V_1$ elde edilir. (4.74) ve (4.82) denklemlerinden

$$\nabla_{V_1} V_2 = -(\theta' cos\theta e - \theta' sin\theta\phi e + r\theta' \textstyle\sum_{i=1}^{s} \xi_i) \tag{4.83}$$

dir. Ayrıca (4.73) ve (4.78) denklemlerinden

$$k_1 V_1 = \theta' cos\theta e - \theta' sin\theta\phi e \tag{4.84}$$

elde edilir.

$$\nabla_{V_1} V_2 = -k_1 V_1 + k_2 V_3 \tag{4.85}$$

olduğu biliniyor. O halde (4.83), (4.84) ve (4.85) denklemlerinden

$$k_2 V_3 = -r\theta' \textstyle\sum_{i=1}^{s} \xi_i \tag{4.86}$$

bulunur. O halde (4.79) ve (4.86) denklemlerinden

$$k_2 = \sqrt{s} \tag{4.87}$$

ve

$$V_3 = \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^{s} \xi_i}{\sqrt{s}} \tag{4.88}$$

bulunur. (4.74), (4.77), (4.79), (4.88) denklemlerinden ve Teorem 4.3.1 den

$$\nabla_{V_1} V_3 = -\sqrt{s}(cos\theta\phi e - sin\theta e) \tag{4.89}$$

elde edilir. O halde (4.82) ve (4.87) denklemlerinden

$$k_2 V_2 = \sqrt{s}(cos\theta\phi e - sin\theta e) \tag{4.90}$$

dir. (4.89), (4.90) denklemleri ve $\nabla_{V_1} V_3 = -k_2 V_2 + k_3 V_4$ eşitliği kullanılırsa

$$k_3 V_4 = 0$$

dır. Dolayısıyla $k_3 = 0$ olur.

Sonuç 4.3.1 $\mathbb{R}^{2+s}(-3s)$ S-uzay formunda $N^{1+s}(r)$ silindirinde yatan bir Legendre eğri 1-tipten ise sabit eğriliğe sahiptir.

BEŞİNCİ BÖLÜM
SONUÇ

Bu çalışmada 3-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifoldlarda tanımlanan vektörel çarpımın bir genelleştirmesi yapılmıştır ve $(2+s)$-boyutlu çatılandırılan metrik manifoldlarda genelleştirilmiş bir vektörel çarpım tanımlanmıştır. Bu tanımlanan vektörel çarpım kullanılarak $(2+s)$-boyutlu S-manifoldlarda Legendre eğrilerin eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca, $(2+s)$-boyutlu S-manifoldlarda silindirde yatan 1-tipten Legendre eğrilerin eğrilikleri elde edilmiştir.

Bu çalışmanın devamında, genelleştirilmiş vektörel çarpım kullanılarak S-manifoldlarda slant eğrilerin eğrilikleri hesaplanması planlanmaktadır.

KAYNAKÇA

Allesio, O. (2009). “Differential geometry of intersection curves in $\mathbb{R}^4$ of three implicit surfaces”. *Computer Aided Geometric Design.* 26, 455-471.

Baikousis,C. And Blair, D.E. (1991). “On Legendre curves in contact 3-manifolds”. *Geom. Dedicate*. 49, 135-142.

Blair, D.E. (1970). “Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{O}(n)$”. *J. Differential Geometry*. 4, 155-167.

Blair, D.E. (1976). *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Lectures Notes in Math. Vol. 509, Springer-Verlag: Berlin.

Blair, D.E. (2002) *Riemanniann Geometry of Contact and Simplectic Manifolds*. Birkhauser: Boston

Boothby, W.M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Akademic Press: United States of America.

Cabrerizo, J.L., Fernandez, L.M. and Fernandez, M. (1993). “On the CR-submanifolds of an S-manifolds”. *Portugaliae Mathematica*. 50, 103-113.

Camcı, Ç. (2007). Kontak Geometride Eğriler Teorisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Camcı, Ç. (2012). “Extended cross product in a 3-dimensional almost contact metric manifold with applications to curve theory”. *Turkish Journal of Mathematics.* 36, 305–318.

Can, S., Camcı, Ç. (2023). “Generalised cross product in $(2 + s)$-dimensional framed metric manifolds with application to Legendre curves”. *Journal of New Theory*. 42, 94-107.

Chen, B.Y. (1973). *Geometri of Submanifolds*. Marcel Dekker: New York.

Chen, B.Y. (1984). *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*. Word Scientific: Singapore.

Chen, B.Y. (1996). "A report on submanifolds of finite type". *Soochow J. Math*. 22, 117-137.

Fernandez, L.M. (1987). "A note of f-sectional curvatures of S-manifolds". *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza.* 42.

Goldberg, S.J. and Yano, K. (1970). "On normal globally framed f-manifold". *Tohoku Mathematical Journal*. 22, 362-370.

Güvenç, Ş. (2015). Riemann Manifoldları Üzerinde Slant Eğriler. Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Hacısalihoğlu, H.H. (1983). *Diferansiyel Geometri*. İnönü Üniversitesi Yayınları: Malatya.

Hasegawa, I. and Okuyama, Y. (1986). "On p-th Sasakian manifolds". *Journal of Hokkaida University of Education (Section II A)*. 37(1), 1-16.

Ishihara, S. And Yano, K. (1964). "On integrability conditions of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$". *Quart. J. Math. Oxford (2)*. 15, 217-222.

Kim, J.S., Dwiddedi, M.K., Tripathi, M.M. (2007). "Ricci curvature of integral submanifolds of an S-space form". *Bulletin of the Korean Mathematical society*. 44, 395-406.

Kobayashi,S. and Nomizu, K. (1996). *Foundations of Differential Geometri*. John Wiley and Sons: New York.

Nagakawa, H. (1966). "On framed f-manifolds". *Kodai Math. Sem. Rep.* 18,495-508.

Özgür, C., Güvenç, Ş. (2012). "On biharmonic Legendre curve in S-space forms". *Turkish Journal of Mathematics*. 38, 454-461.

Williams, Z. and Stein, M.F. (1964). “A triple product of vectors in four space”. *Mathematics Magazine*. 37(4), 230-235.

Yano,K. (1963). “On a structure defined by a tensör field f of type $f^3 + f = 0$”. *Tensor 14*. 14, 99-109.

Yüce, S. (2018). *Analitik Geometri*. Pegem Yayınları: Ankara