



T.C.

**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA KUADRATİK BEZİER
PH EĞRİLER ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

HAVVA DOĞAN ALTIN

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET GÜMÜŞ

ÇANAKKALE – 2023



T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM/ANASANAT DALI

**ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA KUADRATİK BEZİER PH
EĞRİLER ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAVVA DOĞAN ALTIN

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET GÜMÜŞ

ÇANAKKALE – 2023



T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



Havva DOĞAN ALTIN tarafından Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ yönetiminde hazırlanan ve **02/06/2023** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Öklid Ve Minkowski Uzaylarında Kuadratik Bezier PH Eğriler Üzerine**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ
(Danışman)

Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

.....

.....

.....

Tez No :

Tez Savunma Tarihi : 02/06/2023

Prof. Dr. Ahmet Evren ERGİNAL

Enstitü Müdürü

02/06/2023

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Havva DOĞAN ALTIN

02.06.2023

TEŐEKKÖRLER

İlk olarak yüksek lisansa başladığım günden tezimi tamamlama sürecime kadar daima bana destek olan, hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen, her ihtiyaç duyduğumda ulaşabildiğim kıymetli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Bu süreçte benden yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Süleyman Şenyurt'a teşekkürlerimi sunuyorum. Hayatımın her döneminde sonsuz bir sevgi ve güvenle beni büyütüp bugünlere getiren ve her daim her konuda bana destek olan annem Hamiye DOĞAN'a ve babam Ömer Ali DOĞAN'a çok teşekkür ediyorum. Bir matematikçi olmamda en büyük etkisi olan, daha ilk okul dönemimde elimden tutup bana yol gösteren bu mesleği ve matematiği bana sevdiren ve üzerimde çok fazla emeği olan çok değerli öğretmenim Şule YAVUZ'a sonsuz teşekkürler. Son olarak, tam da bu süreçte hayatlarımızı birleştirdiğimiz, bana her konuda destek olan, büyük bir sevgi, saygı ve sabırla yaklaşan ve bu tezin tamamlanmasında büyük emeği olan biricik eşim Süleyman ALTIN'a sonsuz teşekkürler.

Havva DOĞAN ALTIN

Çanakkale, Mayıs 2023

ÖZET

ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA KUADRATİK BEZİER PH EĞRİLER ÜZERİNE

Havva DOĞAN ALTIN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ

02.06.2023, 46

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş bölümüdür. Bu bölümde, Bezier eğriler ve Pythagorean Hodograph (PH) eğriler ile ilgili bugüne kadar yapılmış çalışmalar araştırılmış ve bunlar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde Öklid uzayı, Minkowski uzayı, Bezier eğriler ve PH-eğriler hakkında temel tanımlar, kavramlar ve bazı teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 2-boyutlu ve 3-boyutlu Öklid uzayında kuadratik Bezier bir eğriden PH-eğri elde etmenin yöntemi araştırılmış ve kuadratik Bezier bir eğrinin PH-eğri olması için kontrol noktalarının sağlaması gereken parametre verilmiştir. Elde edilen parametreler için bazı örnekler verilmiş ve eğrilerin grafikleri çizilmiştir.

Dördüncü bölümde ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu Minkowski uzayında kuadratik Bezier bir eğriden PH-eğri elde etmenin yöntemi araştırılmış ve kuadratik Bezier bir eğrinin PH-eğri olması için kontrol noktalarının sağlaması gereken parametreler verilmiştir. Elde edilen parametreler için çeşitli örnekler verilmiş ve eğrilerin grafikleri çizilmiştir.

Beşinci ve tezin son bölümünde elde edilen karakterizasyonlar ile ilgili sonuçlar tartışılmıştır. Oluşturulan bu yeni eğri ile ilgili başka neler yapılabileceğine ve hangi alanlardaki çalışmalara destek olabileceğine dair önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Minkowski Uzayı, Bezier Eğri, PH-eğri.

ABSTRACT

ON QUADRATIC BEZIER PH-CURVE IN EUCLIDEAN AND MINKOWSKI SPACES

Havva DOĞAN ALTIN

Canakkale Onsekiz Mart University

School of Graduate Studies

Master of Science Thesis in Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Mehmet GÜMÜŞ

02.06.2023, 46

This thesis has five chapters. In the first chapter that is *Introduction* part, is presented some informations about Bezier curves and Pythagorean Hodograph (PH) curves that have been done so far are researched. In the second part, basic concepts, definitions and some theorems about Minkowski and Euclidean spaces, Bezier and PH-curves are given.

The third chapter investigates in method of obtaining a PH-curve from a quadratic Bézier curve in 2-dimensional and 3-dimensional Euclidean spaces. For a quadratic Bézier curve to be a PH-curve, the parameter that the control points must satisfy is given. The graphs of the curves were drawn by giving some examples for the parameters obtained. In the fourth chapter, the method of obtaining a PH-curve from a quadratic Bezier curve in 2-dimensional and 3-dimensional Minkowski space is investigated. Thus, for a quadratic Bézier curve to be PH-curve, the parameter that the control points must satisfy is given. The graphs of the curves were drawn by giving various examples for the parameters obtained.

In the fifth chapter which is last part of the thesis, the results of the characterizations are discussed. Suggestions have been made about what else can be done about this new curve created and in which areas it can support studies.

Key Words: Euclidean Space, Minkowski Space, Bezier Curve, PH-Curve.

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN	ii
TEŞEKKÜRLER.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
KISALTMALAR	viii
TABLO VE GRAFİKLER.....	ix

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

İKİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Öklid Uzayı ile İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler	4
2.2. Minkowski Uzayı ile İlgili Temel Kavramlar ve Teoremler	8
2.3. Bezier Eğrisi ile İlgili Temel Kavramlar ve Teoremler.....	13
2.4. Pythagorean -Hodograf Eğrileri ile İlgili Temel Kavramlar ve Teoremler.....	18

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ÖKLİD UZAYINDA KUADRATİK BEZİER PYTHAGOREAN HODOGRAPH EĞRİLER

3.1.2- Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler	21
3.2.3-Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler	26

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

MINKOWSKİ UZAYINDA KUADRATİK BEZİER PYTHAGOREAN HODOGRAPH EĞRİLER

4.1. 2-Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler	36
4.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler	42

BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ

KAYNAKÇA	54
ÖZGEÇMİŞ.....	I

KISALTMALAR

$\alpha(t)$	Polinom eğrisi
α'	α eğrisinin hodografi
\mathbb{E}_i^n	n-boyutlu i indisli Minkowski uzayı
MPH	Minkowski Pythagorean Hodograph
PH	Pythagorean Hodograph
$P(t)$	Kuadratik Bezier Eğri
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{E}^n	n-boyutlu Öklid uzayı
SBF	Simetrik Bilineer Form
$\ , \ $	Norm
T	Teğet vektör alanı
N	Normal vektör alanı
B	Binormal vektör alanı
\langle, \rangle	İç çarpım fonksiyonu

TABLO VE GRAFİKLER

Şekil 1: 2 Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	25
Şekil 2: 2-Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	26
Şekil 3: 3 Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	33
Şekil 4: 3-Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	35
Şekil 5: 2 Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	41
Şekil 6: 2-Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	42
Şekil 7: 3 Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	50
Şekil 8: 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri	52

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Bilgisayar destekli tasarımların temelini parametrik eğriler ve bu eğrilerle oluşturulan yüzeyler oluşturmaktadır. Bezier eğrileri ve yüzeyleri, Coons yamaları, B-Spline metodları, Pythagorean Hodograph (PH) ve Minkowski uzayına genelleştirilmiş Pythagorean Hodograph (MPH) eğrileri, bilgisayar destekli geometrik tasarımda oldukça önemlidir.

Eğrileri tanımlamak için rasyonel, trigonometrik ve köklü ifade içeren fonksiyonlar veya polinomlar kullanılmaktadır. Bilgisayar destekli geometrik tasarım, robotik ve navigasyonda özellikle polinomsal eğriler tercih edilmektedir. Çünkü polinomsal eğriler yay uzunluğu hesaplamada diğer eğri ailelerine göre cebirsel kullanımlarda kolaylıklar sağlamaktadır.

Matematiksel araştırmaların farklı dönemlerinde bu konunun teorik ve pratik açılarından merkeze alındığı birçok alan ve çalışma mevcuttur. Hem çalışmamızın sınırlarını belirleme hem de önemine dair açıklamalarda bulunma adına bu konunun teoride ve pratikte hangi alanlarda kullanıldığına kısaca değinmekte fayda vardır. Böylelikle çalışmamızın amacı da daha sağlıklı şekilde ortaya konabileceği kanaatindeyiz. Konunun temelleri literatürde uzun bir geçmişe sahip olsa da aslında kullanım alanı açısından oldukça yeni sayılabilecek bir yapıya sahiptir. Tez çalışmamızın merkez konusundan sapmamak adına konuya ve mevcut çalışmalara sadece ana hatlarıyla değinmek daha doğru olacaktır.

Bu alanda ilk olarak Kubato, 1972'de Pisagor koşulunu vermiş ve böylece uzunluğu bir polinoma eşit olan eğri düşüncesi ortaya çıkmıştır. Farouki ve Sakkalis (1990), Kubato'nun çalışmasından esinlenerek PH eğrilerini tanımlamışlar ve düzlemsel PH-eğrilerin karakterizasyonunu ortaya koymuşlardır. Daha sonra, 1992'de Farouki tasarım ve yaklaşım geometrisi için düzlemsel PH-eğrilerinin nasıl kullanılacağını

göstermiştir. Ardından Dietz ve arkadaşları (1993), üç boyutlu uzayda polinomlar için kısmi Pisagor koşulunu vermişlerdir. Farouki ve Sakkalis (1994) ise, uzaysal PH-eğrinin karakterizasyonunu yapmışlardır. Bu karakterizasyonun geometrik yorumunu Hamilton yapmıştır. Farouki (2008), PH-eğrilerin helis eğriler ile ilişkisini ortaya koymuştur. PH-eğrileri Minkowski uzayında karakterize ederek Minkowski Pythagorean Hodograph kavramını tanımlayan Moon (1999)'dur.

Bezier eğrileri ve yüzeyleri, 1950'li yılların sonlarında birbirlerinden bağımsız şekilde çalışan iki farklı kişi tarafından geliştirilmiştir. Bunlardan biri, matematikçi olan Paul de Faget de Casteljau'dur. Diğeri ise makine ve endüstri mühendisi olan Pierre Etienne Bezier'dir. Her ne kadar ikisi de aynı çalışmaları yapmış olsa da Citroen şirketinin Casteljau'nun çalışmalarını gizli tutmasından dolayı ilk olarak kabul gören ve günümüzde kendi adıyla anılan Bezier'dir. Kariyerine 1933'te başlayan Bezier, 30 yıl çalıştıktan sonra araç gövde ve tasarımı alanında çalışmalar yapmıştır. Bu süreçte polinomsal eğri ve yüzeyleri Bersntein denklemleriyle ilişkilendirerek geliştirmiştir. Bu teori, otomobil kaporta yüzeylerini tanımlamada az sayıda parametrenin değiştirilmesiyle kontrol edilebilen eğriler olarak geliştirilmiştir.

“Rasyonel Bezier Eğrileri” başlıklı tez çalışmasında Dişibüyük (2005), rasyonel Bezier eğrilerini q-Bernstein Bezier polinomlarını kullanarak geliştirmiş ve bu eğrileri matris formunda göstermiştir. “Bezier Eğrileri ve Yüzeyleri” başlıklı tez çalışmasında Yılmaz (2009), Bezier yüzeylerinin eğriliklerini ve şekil operatörünü kontrol noktaları cinsinden incelemiştir. Bir diğer tez çalışması olan “Bezier Eğrileri ile Deforme El Modelinin Geliştirilmesi”nde Şimşek (2016), bu eğrilerinin tıp alanındaki kullanımlarına dair önceki çalışmaları incelemiştir. Aynı yıl bir başka yüksek lisans tez çalışması olan “Minkowski Uzayında Bezier Eğrilerin Karakterizasyonu”nda Yeşilmen(2016) Minkowski uzayında Bezier eğrilerin karakterizasyonunu vermiştir.

“Kübik Bezier Eğrileri ile Yüz İfade Tanıma” başlıklı tez çalışmasında Özmen (2017), fotoğraflardan yedi farklı yüz ifadesi tanıma işlemi gerçekleştirmiştir. Bir başka uygulama alanını hedefleyen Luzum (2018), “ \mathbb{R}^3 deki Yüzey Eğrilerinin Bezier Eğrileri ve

Matlab Uygulamaları” başlıklı tez çalışmasında yüzey üzerinde bir eğri ve bu eğriye ait ikiden fazla noktayı alarak bu yüzeye ait Bezier eğrisini hesaplamıştır. Öklid uzayında Bezier eğrisinin Serret-Frenet elemanlarını düzlemsel ve uzaysal olarak hesaplamasını ise “Öklid Düzleminde ve Öklid Uzayında Bezier Eğrileri” başlıklı tez çalışmasıyla Erkan (2019) ortaya koymuştur. Aynı yıl Kılıçoğlu ve Şenyurt, “On The Cubic Bezier Curves in \mathbb{E}^3 ” başlıklı çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında kontrol noktalarına bağlı matris formulu kübik Bezier eğrisini incelemiştir. Aynı isimler sonraki yılda, “On The Involute of the Cubic Bezier Curve by Using Matrix Representation in \mathbb{E}^3 ” adlı çalışmalarında önceki araştırmalarında üzerinde çalıştıkları bu kübik Bezier eğrisinin involütünü incelemiştir.

Bizim çalışmamızla birçok noktada ortak konulara yer veren Altınordu (2021) ise, “Bezier Eğrileri ve Bazı Uygulamaları” adlı tez çalışmasında \mathbb{E}^3 de başlangıç noktasını ve birim vektörlerini kontrol noktası olarak kübik Bezier eğrisini oluşturmuş ve bu eğrinin Frenet ve Darboux vektörlerini hesaplamıştır. Ayrıca Frenet çatıları ve alternatif çatı vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrilerini tanımlamıştır.

Bu çalışmada ise bilgisayar destekli geometrik tasarımda, programlamada, grafik tasarımda, navigasyonda, başta otomatik olmak üzere farklı mühendislik alanlarında ve diğer alanlarda kullanılan bu iki önemli eğri bir arada ele alınmıştır. 2-boyutlu ve 3-boyutlu Öklid uzaylarında alınan bir kuadratik Bezier eğrinin PH-eğri olması için kontrol noktalarının karakterleri belirlenmiştir. Böylece Öklid uzayında kuadratik Bezier PH-eğri kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca benzer metodlar izlenerek 2-boyutlu ve 3-boyutlu Minkowski uzaylarında ele alınan bir kuadratik Bezier eğriden PH-eğri elde edilmiştir. Böylece Minkowski uzayında Bezier PH-eğri kavramı tanımlanmıştır.

İKİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Öklid Uzayı ile İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. (Afin Uzay):

B boş kümeden farklı bir küme ve V ise bir K cismi üstünde bir vektör uzayı olsun. $B \times B$ kümesinden, V uzayına,

$$f: B \times B \rightarrow V$$

fonksiyonu;

(B1). Her $P, Q, R \in B$ için

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(B2). Her $P \in B$ ve $\alpha \in V$ için

$$f(P, Q) = \alpha$$

sağlıyor ise B kümesine V vektör uzayı ile birleşen afin uzay denir. B afin uzayının boyutu, V uzayının boyutudur. (Sabuncuoğlu, 2005)

Tanım 2.1.2. (İç Çarpım):

K cismi üzerinde bir vektör uzayı X olsun. $\langle, \rangle: X \times X \rightarrow K$ fonksiyonu,

$$1) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$2) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, (\alpha \in K)$$

$$3) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$4) \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

şartlarını sağlıyorsa \langle, \rangle fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu denir. (Hacısalihioğlu, 2000)

Tanım 2.1.3. (Öklid İç Çarpımı):

\mathbb{R}^n vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olsun.

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyondur. Bu iç çarpıma Öklid iç çarpımı denir. (Sabuncuoğlu,2005)

Tanım 2.1.6. (Öklid Uzayı):

\mathbb{R}^n iç çarpım uzayı ile birleştirilmiş \mathbb{R}^n afin uzayına Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir. (Struik, 1988)

Tanım 2.1.4. (Norm):

\mathbb{R}^n 'de bir $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ vektörünün normu

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

şeklinde tanımlanır. (Hacısalıhoğlu, 2000)

Tanım 2.1.5. (Öklid Metriği):

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna Öklid metriği denir. (Struik, 1988)

Tanım 2.1.7. (Uzaklık):

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^n üzerinde uzaklık fonksiyonu denir. Burada $d(x, y)$ reel sayısı ise x ve y noktaları arası uzaklıktır. (Hacısalıhoğlu, 2000)

Tanım 2.1.8. (Vektörel Çarpım):

\mathbb{E}^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı;

$$u \times v = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2)$$

şeklinde tanımlanır. (Struik,1988)

Tanım 2.1.9. (Eğri):

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s))$ şeklinde verilen diferensiyellenebilir bir γ dönüşümüne bir eğri adı verilir. (Sabuncuoğlu, 2005)

Tanım 2.1.11. (Skaler Hız Fonksiyonu ve Skaler Hız):

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^n$, γ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ olsun.

$$\gamma'(t) = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right)$$

olur. $\gamma'(t)$ tanjant vektörüne M eğrisinin $t \in I$ parametresine karşılık gelen $\gamma(t)$ noktasında (I, γ) koordinat komşuluğuna göre skaler hız vektörü denir.

$$\|\gamma'\|: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\gamma'\| (t) = \|\gamma'(t)\|$$

şeklinde tanımlanan $\|Y'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, γ) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu denir. Burada $\|Y'(t)\|$ reel sayısına ise M nin (I, γ) koordinat komşuluğuna göre $\gamma(t)$ noktasındaki skaler hızı adı verilir. (Hacısalihoglu, 2000)

Tanım 2.1.12.(Birim Hızlı Eğri):

(I, γ) koordinat komşuluğuyla verilmiş olan M eğrisi, eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|Y'(s)\| = 1$$

olduğunda M eğrisine birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de yay parametresi adı verilir. (Hacısalihoglu, 2000)

Tanım 2.1.13. (Regüler Eğri):

(I, γ) koordinat komşuluğu ile verilmiş olan M eğrisi, eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|Y'(s)\| \neq 0$$

oluyorsa γ eğrisine regüler eğri adı verilir. (Hacısalihoglu, 2000)

Teorem 2.1.14:

\mathbb{E}^n 'de regüler her bir eğrinin, birim hızlı olacak biçimde bir alt koordinat komşuluğu vardır. (Hacısalihoglu, 2000)

Tanım 2.1.15:

$M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğuyla verilmiş olsun. Bu koşul altında

$$\delta = \{Y', Y'', \dots, Y^{(n)}\}$$

kümesi lineer bağımsız ve $\forall Y^{(n)}, n > k$ için;

$$Y^{(n)} \in Sp(\delta)$$

olmak üzere, δ 'dan elde edilmiş olan $\{T, N_1, N_2, \dots, N_{(k-1)}\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret Frenet k -ayaklı alanı denir. Burada $m \in M$ için $\{T(m), N_1(m), N_2(m), \dots, N_{(k-1)}(m)\}$ ye de $m \in M$ noktasındaki Serret Frenet k -ayaklısı

denmektedir. Her bir T ve N_j , $1 \leq j \leq k - 1$ vektörlerine de Serret Frenet vektör alanı denir (Kreyszig, 1988).

Teorem 2.1.16:

$M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi, (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. Her $t \in I$ için $\gamma(t)$ noktasındaki $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı,

$$T = \frac{1}{\| \gamma'(t) \|} \gamma'(t)$$

$$N = B \times T$$

$$B = \frac{1}{\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|} (\gamma'(t) \times \gamma''(t))$$

bağıntısıyla verilir. (Hacısalıhoğlu, 2000)

2.2. Minkowski Uzayı ile İlgili Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.2.1. (Simetrik Bilineer Form) (SBF):

V bir reel vektör uzayı $m, n \in \mathbb{R}$ ve $X, Y, Z \in V$ için

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü,

$$1) \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$$

$$2) \langle mX + nY, Z \rangle = m \langle X, Z \rangle + n \langle Y, Z \rangle,$$

$$\langle X, mY + nZ \rangle = m \langle X, Y \rangle + n \langle X, Z \rangle$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı SBF denir. (O'Neil, 1983)

Tanım 2.2.2. (Skaler Çarpım Uzayı):

V reel vektör uzayı üstünde tanımlanmış olan

$$h: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu; simetrik, bilinear ve non-dejenere özelliklerini sağlayan h fonksiyonuna, V uzayında skaler çarpım ve V vektör uzayına da Skaler çarpım uzayı adı verilir.

(Levent, 2019)

Tanım 2.2.3:

V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form tanımlansın.

- 1) Eğer $\forall u \in V, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle > 0$ sağlanıyorsa \langle, \rangle SBF'ye pozitif tanımlı,
- 2) Eğer $\forall u \in V, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle < 0$ sağlanıyorsa \langle, \rangle SBF'ye negatif tanımlı,
- 3) Eğer $\forall u \in V, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle \geq 0$ sağlanıyorsa \langle, \rangle SBF'ye pozitif yarı tanımlı,
- 4) Eğer $\forall u \in V, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle \leq 0$ sağlanıyorsa \langle, \rangle SBF'ye negatif yarı tanımlı,
- 5) Eğer $\forall w \in V$ için $\langle u, w \rangle = 0$ iken $u = 0$ sağlanıyorsa \langle, \rangle SBF'ye non-dejenere denir. (Levent 2019)

Tanım 2.2.4:

V bir skaler çarpım uzayı, W da üzerindeki skaler çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V 'nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W 'nin boyutuna h skaler çarpımının indeksi denir. Ayrıca, V skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı h skaler çarpımının indeksi olarak tanımlanır. (O'Neil, 1983)

Tanım 2.2.5:

V bir skaler çarpım uzayı ve η de V 'nin indeksi olsun. Bu durumda $\eta = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skaler çarpım uzayına bir Lorentz uzay denir ve \mathbb{R}_1^n ile gösterilir.

$n = 3$ için özel olarak bu uzay 3 –boyutlu Minkowski uzayı şeklinde adlandırılır ve \mathbb{E}_1^3 ile gösterilir. (O'Neil, 1983)

Tanım 2.2.6:

\mathbb{R}^2 vektör uzayı üzerinde $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ vektörleri için;

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) = \langle u, v \rangle = u_1v_1 - u_2v_2$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona \mathbb{R}_1^2 de iç çarpım fonksiyonu denir. (O'Neil, 1983)

Tanım 2.2.7:

\mathbb{R}_1^n de bir \vec{u} vektörü verilsin.

- 1) Eğer $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ veya $\vec{u} = 0$ ise spacelike,
- 2) Eğer $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle < 0$ ise timelike,
- 3) Eğer $\vec{u} \neq 0$ olduğunda $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ ise lightlike ya da null vektör olarak adlandırılır.

Timelike vektörler ve null vektörler, casual vektörler olarak adlandırılır. (O'Neil, 1983)

Tanım 2.2.8:

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall u \in \mathbb{R}_1^n$ için;

$$\|u\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle|}$$

eşitliğiyle tanımlı dönüşüm \mathbb{R}_1^n üzerinde bir normdur. Burada $\|u\|$ gerçekte sayısına u vektörünün normu denir. Ayrıca $\|u\| = 1$ olan u vektörüne birim vektör adı verilir. (O'Neil, 1983)

Tanım 2.2.9:

\mathbb{E}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı;

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2, v_1u_3 - v_3u_1, v_1u_2 - v_2u_1)$$

eşitliğiyle tanımlanır (O'Neil, 1983).

Tanım 2.2.10. (Spacelike Düzlem):

Minkowski uzayında normal timelike olan düzleme spacelike düzlem denir. Bir spacelike düzlemde bulunan vektörler sadece spacelike vektörlerdir. (Ratcliffe, 1994)

Tanım 2.2.11. (Timelike Düzlem):

Minkowski uzayı içerisinde en az bir tane timelike vektör bulundurmakta olan düzleme timelike düzlem denir. Spacelike vektör, timelike bir düzlemin normal vektörüdür. Timelike bir düzlem içinde timelike, spacelike ve null vektörler bir arada bulunabilir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.12. (Null Düzlem):

Minkowski uzayında timelike ve spacelike düzlemler dışında kalan tüm düzlemler null düzlemlerdir. Null düzlemlerde yatan ve bu düzlemin normal vektörü olan bir tane null vektör bulunur. Ayrıca null düzlemlerde spacelike vektörler de bulunabilir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.13. (Minkowski Uzayında Eğri):

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ diferensiyellenebilir dönüşümüne Minkowski uzayında bir eğri adı verilir. Eğer $\gamma'(t)$ vektörü spacelike olduğunda eğriye spacelike eğri, timelike olduğunda eğriye timelike eğri ve null olduğunda ise eğriye null eğri adı verilir. (O'Neil, 1983)

Teorem 2.2.14:

$\mathcal{N}(t) \in \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike eğrisinin Frenet 3 ayaklısı, $\{T, N, B\}$ olsun. Frenet çatısı ile bunların türevleri arasında;

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^* & 0 \\ \kappa^* & 0 & \tau^* \\ 0 & -\tau^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\kappa^* = \langle T', N \rangle, \tau^* = \langle N', B \rangle, \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1$$

bağıntısı vardır (O'Neil, 1983).

Teorem 2.2.15:

$\alpha(t) \in \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı spacelike eğrisinin Frenet 3 ayaklısı, $\{T, N, B\}$ olsun.

1. T' spacelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^* & 0 \\ -\kappa^* & 0 & \tau^* \\ 0 & -\tau^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\kappa^* = \langle T', N \rangle, \tau^* = -\langle N', B \rangle, \langle B, B \rangle = -1$$

2. T' timelike vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^* & 0 \\ \kappa^* & 0 & \tau^* \\ 0 & \tau^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\kappa^* = -\langle T', N \rangle, \tau^* = \langle N', B \rangle, \langle B, B \rangle = 1$$

3. T' null vektör ise,

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau^* & 0 \\ -1 & 0 & -\tau^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\tau^* = \langle N', B \rangle, \langle N, B \rangle = 1$$

biçiminde ifade edilir (O'Neil, 1983).

Teorem 2.2.15:

$\alpha(t) \in \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı null eğrisinin Frenet 3 ayaklısı, $\{T, N, B\}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau^* & 0 & -1 \\ 0 & -\tau^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\tau^* = \langle N', B \rangle, \langle B, B \rangle = 0, \langle N, N \rangle = \langle T, B \rangle = 1$$

olarak elde edilir (O'Neil, 1983).

2.3. Bezier Eğrisi ile İlgili Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.3.1. (Bernstein Polinomları):

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ için n . dereceden bir Bernstein polinomu, şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$B_k^n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Burada $\binom{n}{k}$ ifadesi aşağıda verilen kombinasyon açılımıdır.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Derecesi 0 olan Bernstein polinomu ise şu şekildedir:

$$B_0^0(x) = 1$$

Derecesi 1 olan Bernstein polinomları aşağıdaki denklemlerle verilir.

$$B_0^1(x) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{0} x^0 (1-x)^{1-0} = (1-x),$$

$$B_1^1(x) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{1} x^1 (1-x)^{1-1} = x.$$

Derecesi 2 olan Bernstein polinomları ise aşağıdaki denklemlerle verilir.

$$B_0^2(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{0} x^0 (1-x)^{2-0} = (1-x)^2,$$

$$B_1^2(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{1} x^1 (1-x)^{2-1} = 2x(1-x),$$

$$B_2^2(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{2} x^2 (1-x)^{2-2} = x^2.$$

Benzer şekilde 3. derece ve sonrası formül uygulanarak elde edilir (Marsh, 2005).

Teorem 2.3.2:

Bernstein polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar:

- Bernstein polinomu $B_k^n(x)$ olmak üzere;

Birimin parçalanması: $B_k^n(x)$ için, binom katsayıları açılımından

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

şeklinde yazıldığında;

$$x+a=1$$

alınarak

$$a=1-x$$

elde edilir. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$1 = 1^n = (x+(1-x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olur (Marsh, 2005).

- Non-negatif olma özelliği: $x \in [0,1]$ için $B_k^n(x) \geq 0$ dir.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} > 0, x \geq 0 \text{ ve } (1-x) \geq 0$$

olduğu için,

$$B_k^n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$$

olur (Marsh 2005).

- Simetri Özelliği: Bernstein polinomu $B_k^n(x)$ için;

$$B_{n-k}^n(x) = B_k^n(1-x)$$

eşitliği sağlanır.

$$B_{n-k}^n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} (1-x)^k$$

ve

$$B_k^n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklindedir. Ayrıca kombinasyon özelliklerinden $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğundan dolayı

$$B_{n-k}^n(x) = B_k^n(1-x)$$

eşitliği sağlanır (Marsh 2005).

- Rekürsiyon: n . dereceden olan $B_k^n(x)$; $k = 0,1,2, \dots, n$ için
($n-1$). dereceden polinomlar aracılığıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$B_k^n(x) = (1-x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x)$$

Burada;

$$B_{-1}^{n-1}(x) = 0 \text{ ve } B_n^{n-1}(x) = 0$$

olur. Bu eşitlikten hareketle aşağıdaki (i) ve (ii) denklemleri elde edilir:

$$B_k^{n-1}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \quad (i)$$

$$B_{k-1}^{n-1}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \quad (ii)$$

Böylece, $k = 0$ için $B_{-1}^{n-1}(x)$ yardımıyla

$$B_0^n(x) = (1-x)^n = (1-x)B_0^{n-1}(x) + xB_{-1}^{n-1}(x)$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde $k=n$ için $B_n^{n-1}(x) = 0$ yardımıyla

$$B_n^n(x) = x^n = (1-x)B_n^{n-1}(x) + xB_{n-1}^{n-1}(x)$$

yazılabilir. O halde $1 \leq k \leq n$ için (i) ve (ii) eşitlikleri sırasıyla $(1-x)$ ve x ile çarpılırsa Bernstejn polinomu tanımından

$$\begin{aligned} & (1-x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x) \\ &= (1-x) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} + x \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k} + x \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (1-x)^{n-k} x^k \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \\ &= (1-x)^{n-k} x^k \left[\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \right] \\ &= (1-x)^{n-k} x^k \left[\frac{(n-k) + k}{n} + \frac{n!}{k!(n-1)!} \right] \\ &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_k^n(x) \end{aligned}$$

dir (Marsh, 2005).

Tanım 2.3.3.

$k \geq 3$ olmak üzere, düzlemdeki sıralı A_1, A_2, \dots, A_k noktalarını ardışık bir şekilde birbirine ve son noktayı ise birinci noktaya doğru parçaları ile bağlayarak elde edilmiş olan geometrik şekle, düzlemde bir k – kenarlı poligon denir. (Saxena ve Sahay, 2005)

Tanım 2.3.4. (Bezier Eğrisi):

P_j noktaları $j = 0, 1, 2, \dots, n$ için $(n + 1)$ adet kontrol noktası olduğu durumda;

$$P(t) = \sum_{j=0}^n C_j^n (1-t)^{n-j} t^j P_j = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) P_j, 0 \leq t \leq 1$$

denklemleriyle tanımlanmış olan eğri Bezier eğrisi olarak adlandırılır. Burada;

$B_j^n(t) = C_j^n (1-t)^{n-j} t^j$ ifadesi Bernstein polinomudur (Saxena ve Sahay, 2005).

Tanım 2.3.5. (Lineer Bezier Eğrisi):

İki kontrol noktasına sahip ve derecesi 1 olan polinom eğrilere lineer Bezier eğrileri denir. Bir lineer Bezier eğrisi bu iki noktayı birleştiren bir doğru parçasıdır. Bu eğrilerin vektörel denklemi; kontrol noktaları $p_0 = (a_0, b_0)$, $p_1 = (a_1, b_1)$ olmak üzere;

$$B(t) = (1-t)p_0 + tp_1, \quad t \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanır (Saxena ve Sahay,2005).

Tanım 2.3.6. (Kuadratik Bezier Eğrisi):

Üç adet kontrol noktasına sahip ve derecesi 2 olan polinom eğriler kuadratik Bezier eğriler olarak adlandırılır. Kontrol noktaları $p_0 = (a_0, b_0)$, $p_1 = (a_1, b_1)$, $p_2 = (a_2, b_2)$ olan bir kuadratik Bezier eğrisi ikinci dereceden bir eğri parçasıdır. Bu eğrilerin vektörel denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$B(t) = (1-t)^2 p_0 + 2(1-t)t p_1 + t^2 p_2, \quad t \in [0,1]$$

(Saxena ve Sahay,2005)

Teorem 2.3.7:

Bezier eğrilerinin sağladığı özellikler şu şekilde sıralanabilir:

- 1) Uç nokta koşulları sağlanır. Eğri, $t = 0$ olduğu durumda başlangıç noktasından geçer. Aynı zamanda $t = 1$ olduğu durumda bitiş noktasından geçer. Kısacası Bezier eğrisi, kontrol poligonunun başlangıç noktası ve bitiş noktası olmak üzere uç noktalarından geçer. Bu özelliğe son nokta interpolasyon özelliği denir.
- 2) Başlangıç ve bitiş noktalarında teğet koşulları sağlanmaktadır. $t = 0$ olduğu durumda eğri birinci ve ikinci kontrol noktalarının farkı olarak yazılan $P_1 - P_0$ vektörüne teğet olur. $t = 1$ olduğu durumda ise eğri sondan bir önceki ve son kontrol noktalarının farkı olarak yazılan $P_n - P_{n-1}$ vektörüne teğet olur. Bu özelliğe son nokta teğet özelliği denir.
- 3) Geometrik olarak invarianttır. Bir başka ifadeyle, Bernstein polinomu, birimin parçalanması özelliğini sağlar. Bu yüzden koordinat sisteminin dönme ve ötelenmesi durumunda eğrinin şekli değişmezdir.
- 4) Dışbükey kafes özelliğine sahiptir. Bezier eğrisi, kontrol noktalarıyla oluşturulmuş olan dışbükey kafesin tümüyle içinde kalır.
- 5) Azalan varyasyon özelliğine sahiptir.
- 6) Simetri özelliği vardır. $\sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(1-t)P_{n-i}$ sağlanır. (Saxena ve Sahay, 2005; Levent, 2019: 8-9)

2.4. Pythagorean -Hodograf Eğrileri ile İlgili Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.4.1. (Polinom):

$$k \in N_0 \text{ ve } a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n$$

olmak üzere;

$$x(t) = a_k t^k + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, a_k \neq 0$$

şeklindeki t değişkenine bağlı fonksiyona, k . dereceden bir polinom denir. (Larson, 2012)

Tanım 2.4.2. (Polinom Eğrisi):

$$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

eğrisi için eğer, $1 \leq i \leq n$ için $p_i(t)$ değerleri birer polinom ise $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ eğrisine n boyutlu polinom eğrisi denir (Larson,2012; Ramis, 2013).

Tanım 2.4.3. (Polinom Eğrisinin Derecesi):

$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ n boyutlu polinom eğrisi için

$$max = \{der(x_1(t)), der(x_2(t)), \dots, der(x_n(t))\}$$

değerine α eğrisinin derecesi denir (Larson, 2012; Ramis, 2013).

Tanım 2.4.4. (Polinom Eğrisinin Hodografi):

$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ n – boyutlu polinom eğrisinin hodograf eğrisi

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$$

vektör alanıdır (Farouki ve Sakkalis ,1990; Ramis, 2013).

Tanım 2.4.5. (Pythagorean -Hodograf Eğrisi):

$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ n -boyutlu polinom eğrisinin hodografı,

$$(x_1')^2(t) + (x_2')^2(t) + \dots + (x_n')^2(t) = \sigma^2(t)$$

denklemini sağlayacak şekilde $\sigma(t)$ polinomu bulunuyorsa $\alpha(t)$ eğrisine n boyutlu Pythagorean -Hodograf eğrisi ya da kısaca PH-eğri denir (Farouki ve Sakkalis, 1990; Ramis, 2013).

Tanım 2.4.6. (Düzlemsel PH-eğrisi):

\mathbb{R}^2 de $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ polinom eğrisinin hodografi $\alpha'(t) = ((x'(t), y'(t))$ olsun. Eğer,

$$(x')^2(t) + (y')^2(t) = \sigma^2(t)$$

olacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu bulunuyorsa $\alpha(t)$ eğrisine düzlemsel Pythagorean - Hodograf eğrisi ya da kısaca düzlemsel PH-eğri denir. (Farouki ve Sakkalis, 1990; Ramis, 2013)

Teorem 2.4.7:

$a(t), b(t), c(t)$ polinomları arasında

$$(a)^2(t) + (b)^2(t) = c^2(t)$$

Pythagorean koşulu, ancak ve ancak

$$a(t) = [u^2(t) - v^2(t)]\omega^2(t)$$

$$b(t) = [2u(t)v(t)]\omega(t)$$

$$c(t) = [u^2(t) + v^2(t)]\omega^2(t)$$

olacak şekilde $u(t), v(t)$ aralarında asal polinomları ve $\omega(t)$ polinomu varsa sağlanır (Kubato, 1972).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ÖKLİD UZAYINDA KUADRATİK BEZİER PYTHAGOREAN HODOGRAPH EĞRİLER

3.1 2- Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler

Tezin bu bölümünde 2-boyutlu Öklid uzayında alınan kuadratik bir Bezier eğrisinin aynı zamanda bir PH-eğri olması için kontrol noktalarının nasıl bir karakterizasyona sahip olması gerektiği araştırıldı. Yapılan cebirsel işlemler sonucunda bir karakterizasyon belirlendi.

Teorem 3.1.1: $P(t)$, kontrol noktaları P_0 , P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir Bezier eğri olsun. Bu $P(t)$ Bezier eğrisinin aynı zamanda PH-eğri olması için P_0 , P_1 ve P_2 kontrol noktalarının aşağıdaki karakterizasyonu sağlaması gerekir.

$$P_0 = (a_1, a_2) = (t_3, t_4)$$

$$P_1 = (b_1, b_2) = (t_3 - t_2k, t_4 - t_2)$$

$$P_2 = (c_1, c_2) = (-t_1k - t_2k + t_3, t_4 - t_2 - t_1)$$

İspat: $P(t)$, kontrol noktaları P_0 , P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir Bezier eğri olsun. Bu durumda B_0^2 , B_1^2 ve B_2^2 Bezier katsayıları olmak üzere $P(t)$ eğrisi;

$$P(t) = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2$$

şeklinde yazılabilir. \mathbb{R}^2 uzayında $P_0 = (a_1, a_2)$, $P_1 = (b_1, b_2)$ ve $P_2 = (c_1, c_2)$ noktalarını alalım. $P(t)$ Bezier eğrisinin PH-eğri olması için kontrol noktalarının sağlamaları gereken karakterler için kontrol noktalarının koordinatları eğri denkleminde yerlerine yazılırsa (2.1.2) eşitliği elde edilir.

$$P(t) = (1 - t)^2(a_1, a_2) + 2t(1 - t)(b_1, b_2) + t^2(c_1, c_2)$$

$$P(t) = (a_1 - 2a_1t + a_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2) + (2b_1t - 2b_1t^2, 2b_2t - 2b_2t^2) + (c_1t^2, c_2t^2)$$

$$P(t) = (a_1 - 2a_1t + a_1t^2 + 2b_1t - 2b_1t^2 + c_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2 + 2b_2t - 2b_2t^2 + c_2t^2)$$

$$P(t) = \left((a_1 - 2b_1 + c_1)t^2 + 2(b_1 - a_1)t + a_1, (a_2 - 2b_2 + c_2)t^2 + 2(b_2 - a_2)t + a_2 \right) \quad (3.1.2)$$

(3.1.2) eşitliğindeki Bezier eğrisinin hodografını hesaplamak için bu eşitlikte türev alınırsa (3.1.3) eşitliği bulunur.

$$P'(t) = (2(a_1 - 2b_1 + c_1)t + 2(b_1 - a_1), 2(a_2 - 2b_2 + c_2)t + 2(b_2 - a_2)) \quad (3.1.3)$$

$P(t)$ Bezier eğrisinin hız vektörünün normu hesaplandığında aşağıdaki (3.1.4) eşitliği elde edilir.

$$\| P'(t) \|^2 = 4(a_1 - 2b_1 + c_1)^2t^2 + 8(a_1 - 2b_1 + c_1)(b_1 - a_1)t + 4(b_1 - a_1)^2 + 4(a_2 - 2b_2 + c_2)^2t^2 + 8(a_2 - 2b_2 + c_2)(b_2 - a_2)t + 4(b_2 - a_2)^2$$

$$\| P'(t) \|^2 = 4[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 + (a_2 - 2b_2 + c_2)^2]t^2 + 8[(a_1 - 2b_1 + c_1)(b_1 - a_1) + (a_2 - 2b_2 + c_2)(b_2 - a_2)]t + 4[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2] \quad (3.1.4)$$

$P(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin PH-eğri olması için (3.1.4) ile gösterilen ikinci dereceden t parametrelili denklemin diskriminantının (Δ) sıfır olması yani bir tam kare ifadeye eşit olması gerekir. O halde (3.1.4) ile belirtilen denklemin diskriminantı;

$$\Delta = 64[(a_1 - 2b_1 + c_1)(b_1 - a_1) + (a_2 - 2b_2 + c_2)(b_2 - a_2)]^2 - 64[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 + (a_2 - 2b_2 + c_2)^2][(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2] = 0 \quad (2.1.5)$$

olur. Burada diskriminantı çözmek için (3.1.5) eşitliğinde;

$$x = a_1 - 2b_1 + c_1, y = a_2 - 2b_2 + c_2, p = b_1 - a_1, q = b_2 - a_2 \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) eşitlikleriyle verilen değişken değişimleri yapıldığında;

$$\Delta = 0 = 64(xp - yq)^2 - 64(x^2 + y^2)(p^2 + q^2)$$

$$0 = 64(xp)^2 + 128xpyq + 64(yq)^2 - 64x^2p^2 - 64x^2q^2 - 64y^2p^2 - 64y^2q^2$$

$$0 = 64xpyq + 64xpyq - 64x^2q^2 - 64y^2p^2$$

$$0 = 64xq(yq - xp) + 64yp(xq - yp)$$

$$0 = 64(xq - yp)(yp - xq)$$

$$0 = -64(yq - xp)^2$$

$$yp - xq = 0 \quad (3.1.7)$$

elde edilir. (3.1.7) eşitliğinde x, y, p ve q değerleri yerine yazılırsa;

$$(a_2 - 2b_2 + c_2)(b_1 - a_1) - (a_1 - 2b_1 + c_1)(b_2 - a_2) = 0$$

$$a_2b_1 - a_2a_1 - 2b_1b_2 + 2a_1b_2 + b_1c_2 - a_1c_2 - a_1b_2 + a_1a_2 + 2b_1b_2 - 2b_1a_2 - c_1b_2$$

$$+ c_1a_2 = 0$$

$$a_1b_2 - b_1a_2 - a_1c_2 + c_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2 = 0$$

$$a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2) = 0 \quad (3.1.8)$$

bulunur. (3.1.8) denkleminde aşağıdaki parametre değişimleri uygulandığında;

$$b_2 - c_2 = t_1$$

$$a_2 - b_2 = t_2$$

keyfi t_1 ve t_2 reel sayıları için $c_2 - a_2 = -t_2 - t_1$ bulunur. Bu değerler (3.1.8) denkleminde yerine yazılırsa;

$$a_1t_1 + b_1(-t_2 - t_1) + c_1t_2 = 0$$

$$a_1t_1 - b_1t_2 - b_1t_1 + c_1t_2 = 0$$

$$(a_1 - b_1)t_1 + (c_1 - b_1)t_2 = 0 \quad (3.1.9)$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.1.9) eşitliğinde $a_1 - b_1 = t_2k$ ve $c_1 - b_1 = -t_1k$, $k \in \mathbb{R}$ yazılabilir. $a_1 = t_3$, $t_3 \in \mathbb{R}$ alınırsa;

$$b_1 = t_3 - t_2k \text{ ve } c_1 = -t_1k - t_2k + t_3 \quad (3.1.10)$$

olur. Benzer şekilde $a_2 = t_4$, $t_4 \in \mathbb{R}$ alınırsa,

$$b_2 = t_4 - t_2 \text{ ve } c_2 = t_4 - t_2 - t_1 \quad (3.1.11)$$

eşitlikleri bulunur. Böylece $P(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin \mathbb{R}^2 de PH-eğri olması için kontrol noktalarının karakterleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$P_0 = (a_1, a_2) = (t_3, t_4)$$

$$P_1 = (b_1, b_2) = (t_3 - t_2k, t_4 - t_2)$$

$$P_2 = (c_1, c_2) = (-t_1k - t_2k + t_3, t_4 - t_2 - t_1)$$

Örnek 3.1.12: Keyfi t_1, t_2, t_3, t_4 ve k reel sayıları için

$t_1 = 6, t_2 = 8, t_3 = 3, t_4 = 4, k = \frac{1}{2}$ seçilsin. Bu keyfi değerler bulunan karakterizasyona göre düzenlendiğinde kontrol noktaları aşağıdaki gibi olur.

$$P_0 = (3, 4)$$

$$P_1 = (-1, -4)$$

$$P_2 = (-4, -10)$$

Bu durumda $P(t)$ eğrisi;

$$P(t) = (1 - t)^2(3, 4) + 2t(1 - t)(-1, -4) + t^2(-4, -10)$$

$$P(t) = (3 - 6t + 3t^2, 4 - 8t + 4t^2) + (-2t + 2t^2, -8t + 8t^2) + (-4t^2, -10t^2)$$

$$P(t) = (t^2 - 8t + 3, 2t^2 - 16t + 4)$$

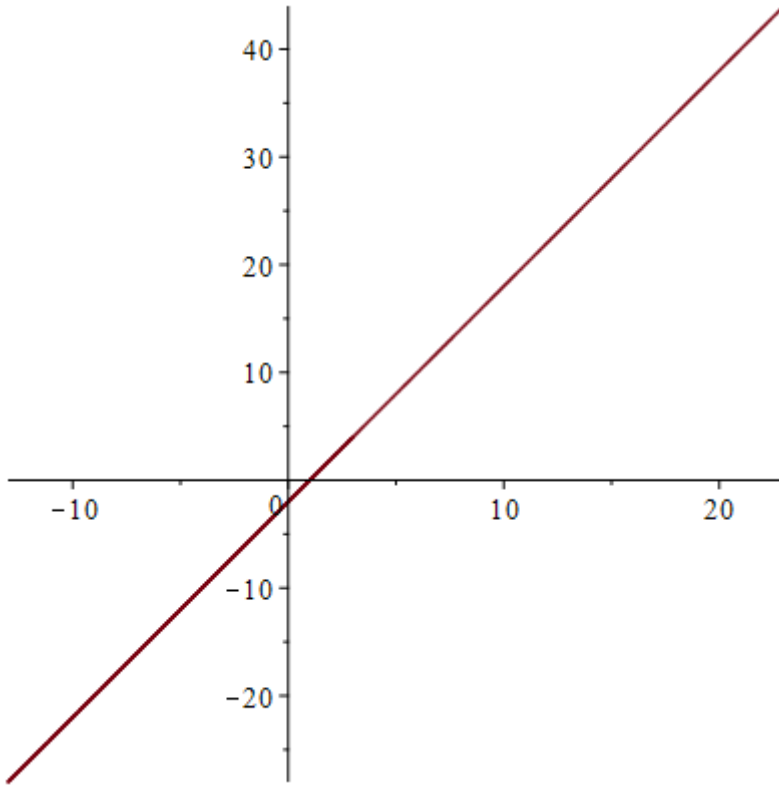
$$P'(t) = (2t - 8, 4t - 16)$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{4t^2 - 32t + 64 + 16t^2 - 128t + 256}$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{20t^2 - 160t + 320}$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{(2\sqrt{5}t - 8\sqrt{5})^2}, \quad t \geq 4$$

$$\|P'(t)\| = 2\sqrt{5}t - 8\sqrt{5}$$



Şekil 1: 2 Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

Örnek 3.1.13: Keyfi t_1, t_2, t_3, t_4 ve k reel sayılarını aşağıdaki gibi seçilsin:

$t_1 = -6, t_2 = 3, t_3 = 1, t_4 = 2, k = \frac{1}{3}$. Bu keyfi değerler elde edilen karakterizasyona göre düzenlendiğinde kontrol noktaları aşağıdaki gibi olur.

$$P_0 = (1,2)$$

$$P_1 = (0,-1)$$

$$P_2 = (2,5)$$

Bu durumda $P(t)$ eğrisi;

$$P(t) = (1-t)^2(1,2) + 2t(1-t)(0,-1) + t^2(2,5)$$

$$P(t) = (1-2t+t^2, 2-4t+2t^2) + (0,-2t+2t^2) + (2t^2, 5t^2)$$

$$P(t) = (3t^2 - 2t + 1, 9t^2 - 6t + 2)$$

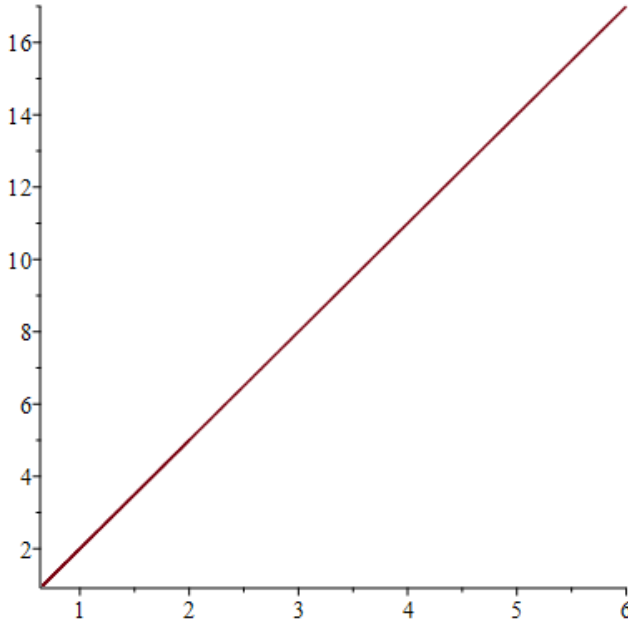
$$P'(t) = (6t - 2, 18t - 6)$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{36t^2 - 24t + 4 + 324t^2 - 216t + 36}$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{360t^2 - 240t + 40}$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{(6\sqrt{10}t - 2\sqrt{10})^2}, \quad t \geq 1$$

$$\|P'(t)\| = 6\sqrt{10}t - 2\sqrt{10}$$



Şekil 2. 2-Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

3.2.3-Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler

Tezin bu bölümünde 3-boyutlu Öklid uzayında alınan kuadratik bir Bezier eğrisinin aynı zamanda bir PH-eğri olması için kontrol noktalarının nasıl bir karakterizasyona sahip olması gerektiği araştırıldı. Yapılan cebirsel işlemler sonucunda bir karakterizasyon belirlendi. Bu karakterizasyon aşağıdaki Teorem 3.2.1 de verilmiştir.

Teorem 3.2.1: $P(t)$, kontrol noktaları P_0 , P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir Bezier eğri olsun. Bu $P(t)$ Bezier eğrisinin aynı zamanda PH-eğri olması için P_0 , P_1 ve P_2 kontrol noktalarının aşağıdaki karakterizasyonu sağlaması gerekir.

$$P_0 = (a_1, a_2, a_3) = (u_4, u_5, u_6)$$

$$P_1 = (b_1, b_2, b_3) = (u_4 - u_1k - u_2k, u_5 - u_2 - u_1, u_6 - u_3 - \frac{u_2u_3}{u_1})$$

$$P_2 = (c_1, c_2, c_3) = (u_4 - u_2k, u_5 - u_2, u_6 - \frac{u_2u_3}{u_1})$$

İspat: $P(t)$, kontrol noktaları P_0 , P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir Bezier eğri olsun. Bu durumda

$$P(t) = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2$$

yazılabilir. Burada $P_0 = (a_1, a_2, a_3)$, $P_1 = (b_1, b_2, b_3)$ ve $P_2 = (c_1, c_2, c_3)$ alındığında $P(t)$ Bezier eğrisinin PH-eğri olması için kontrol noktalarının karakterleri belirlenmiş olur. Bunun için kontrol noktalarının koordinatları eğri denkleminde yerlerine yazılırsa (3.2.1) eşitliği elde edilir.

$$P(t) = (1-t)^2(a_1, a_2, a_3) + 2t(1-t)(b_1, b_2, b_3) + t^2(c_1, c_2, c_3)$$

$$P(t) = (a_1 - 2a_1t + a_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2, a_3 - 2a_3t + a_3t^2) + (2b_1t - 2b_1t^2, 2b_2t - 2b_2t^2, 2b_3t - 2b_3t^2) + (c_1t^2, c_2t^2, c_3t^2)$$

$$P(t) = (a_1 - 2a_1t + a_1t^2 + 2b_1t - 2b_1t^2 + c_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2 + 2b_2t - 2b_2t^2 + c_2t^2, a_3 - 2a_3t + a_3t^2 + 2b_3t - 2b_3t^2 + c_3t^2)$$

$$P(t) = ((a_1 - 2b_1 + c_1)t^2 + (-2a_1 + 2b_1)t + a_1, (a_2 - 2b_2 + c_2)t^2 + (2b_2 - 2a_2)t + a_2, (a_3 - 2b_3 + c_3)t^2 + (2b_3 - 2a_3)t + a_3) \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) Bezier eğrisinin türevi alınırsa bu eğrinin hodografi aşağıdaki (3.2.2) eşitliğidir.

$$P'(t) = (2(a_1 - 2b_1 + c_1)t + 2(-a_1 + b_1), 2(a_2 - 2b_2 + c_2)t + 2(-a_2 + b_2), 2(a_3 - 2b_3 + c_3)t + 2(-a_3 + b_3)) \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) ile verilen denklemin hız vektörünün normu hesaplandığında (3.2.3) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}\| P'(t) \|^2 &= 4(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 t^2 + 8(a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_1 + b_1)t + 4(-a_1 + b_1)^2 \\ &\quad + 4(a_2 - 2b_2 + c_2)^2 t^2 + 8(a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_2 + b_2)t + 4(-a_2 + b_2)^2 \\ &\quad + 4(a_3 - 2b_3 + c_3)^2 t^2 + 8(a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_3 + b_3)t + 4(-a_3 + b_3)^2 \\ \| P'(t) \|^2 &= 4[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 + (a_2 - 2b_2 + c_2)^2 + (a_3 - 2b_3 + c_3)^2]t^2 + \\ &8[(a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_1 + b_1) + (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_2 + b_2) + (a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_3 + \\ &b_3)]t + 4[(-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 + (-a_3 + b_3)^2] \quad (3.2.3)\end{aligned}$$

P(t) kuadratik Bezier eğrisinin PH-eğri olması için (3.2.3) ile gösterilen ikinci dereceden t parametrelili denklemin diskriminantının (Δ) sıfır olması yani bir tam kare ifadeye eşit olması gerekir. O halde (3.2.3) ile belirtilen denklemin diskriminantı (3.2.4) şeklindedir.

$$\begin{aligned}\Delta &= 64[(a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_1 + b_1) + (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_2 + b_2) + (a_3 - 2b_3 + \\ &c_3)(-a_3 + b_3)]^2 - 64[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 + (a_2 - 2b_2 + c_2)^2 + (a_3 - 2b_3 + \\ &c_3)^2][(-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 + (-a_3 + b_3)^2] = 0 \quad (3.2.4)\end{aligned}$$

(3.2.4) denkleminde (3.2.5) deki eşitlikler ile verilen değişken değiştirmeler yapılırsa diskriminant (Δ) aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned}x &= (a_1 - 2b_1 + c_1), y = (a_2 - 2b_2 + c_2), z = (a_3 - 2b_3 + c_3), \\ p &= (-a_1 + b_1), q = (-a_2 + b_2) \text{ ve } r = (-a_3 + b_3) \quad (3.2.5) \\ \Delta &= 64(xp + yq + zr)^2 - 64(x^2 + y^2 + z^2)(p^2 + q^2 + r^2) \\ 0 &= 64[x^2p^2 + y^2q^2 + z^2r^2 + 2(xpyq + xpzr + yqzr)] - 64[x^2p^2 + x^2q^2 + x^2r^2 \\ &\quad + y^2p^2 + y^2q^2 + y^2r^2 + z^2p^2 + z^2q^2 + z^2r^2] \\ 0 &= 64xpyq - 64x^2q^2 + 64xpyq - 64y^2p^2 + 64xpzr - 64x^2r^2 + 64xpzr - 64z^2p^2 \\ &\quad + 64yqzr - 64y^2r^2 + 64yqzr - 64z^2q^2 \\ 0 &= 64xq(yq - xq) + 64yp(xq - yp) + 64xr(zp - xr) + 64zp(xr - zp) \\ &\quad + 64yr(zq - yr) + 64zq(yr - zq) \\ 0 &= 64(xq - yp)(yp - xq) + 64(xr - zp)(zp - xr) + 64(yr - zq)(zq - yr) \\ 0 &= -64(xq - yp)^2 - 64(xr - zp)^2 - 64(yr - zq)^2 \\ 0 &= (xq - yp)^2 + (xr - zp)^2 + (yr - zq)^2\end{aligned}$$

Bu durumda;

$$xq - yp = 0 \quad (3.2.6)$$

$$xr - zp = 0 \quad (3.2.7)$$

$$yr - zq = 0 \quad (3.2.8)$$

sağlanır.

(3.2.6.) denkleminde x, q, y, p değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_2 + b_2) - (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_1 + b_1) = 0 \\ & a_1b_2 - a_1a_2 - 2b_1b_2 + 2b_1a_2 + c_1b_2 - c_1a_2 - b_1a_2 + a_1a_2 + 2b_1b_2 - 2a_1b_2 \\ & \quad - b_1c_2 + a_1c_2 = 0 \\ & b_1a_2 - a_1b_2 + c_1b_2 - c_1a_2 - b_1c_2 + a_1c_2 = 0 \\ & a_1(c_2 - b_2) + b_1(a_2 - c_2) + c_1(b_2 - a_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

elde edilir.

(3.2.7) denkleminde x, r, z, p değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_3 + b_3) - (a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_1 + b_1) = 0 \\ & -a_1a_3 + a_1b_3 + 2b_1a_3 - 2b_1b_3 - c_1a_3 + b_3c_1 + a_1a_3 - b_1a_3 - 2a_1b_3 + 2b_1b_3 \\ & \quad + a_1c_3 - b_1c_3 = 0 \\ & b_1a_3 - a_1b_3 - c_1a_3 + b_3c_1 + a_1c_3 - b_1c_3 = 0 \\ & a_3(b_1 - c_1) + b_3(c_1 - a_1) + c_3(a_1 - b_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

(3.2.8) denkleminde y, r, z, q değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_3 + b_3) - (a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_2 + b_2) = 0 \\ & -a_2a_3 + a_2b_3 + 2a_3b_2 - 2b_2b_3 - a_3c_2 + b_3c_2 + a_2a_3 - a_3b_2 - 2a_2b_3 + 2b_2b_3 \\ & \quad + a_2c_3 - b_2c_3 = 0 \\ & a_3b_2 - a_2b_3 - a_3c_2 + b_3c_2 + a_2c_3 - b_2c_3 = 0 \\ & a_2(c_3 - b_3) + b_2(a_3 - c_3) + c_2(b_3 - a_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

(3.2.9) denkleminde;

$$c_2 - b_2 = t_1$$

$$a_2 - c_2 = t_2$$

$$b_2 - a_2 = -t_1 - t_2 \quad (3.2.12)$$

(3.2.10) denkleminde;

$$c_3 - b_3 = t_3$$

$$a_3 - c_3 = t_4$$

$$b_3 - a_3 = -t_3 - t_4 \quad (3.2.13)$$

(3.2.11) denkleminde;

$$c_1 - b_1 = t_5$$

$$a_1 - c_1 = t_6$$

$$b_1 - a_1 = -t_5 - t_6 \quad (3.2.14)$$

alınım. $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}$. Böylece

$$a_1 t_1 + b_1 t_2 - c_1 t_1 - c_1 t_2 = 0$$

$$a_2 t_3 + b_2 t_4 - c_2 t_3 - c_2 t_4 = 0$$

$$a_3 t_5 + b_3 t_6 - c_3 t_5 - c_3 t_6 = 0$$

denklemler düzenlenirse;

$$(a_1 - c_1)t_1 + (b_1 - c_1)t_2 = 0$$

$$(a_2 - c_2)t_3 + (b_2 - c_2)t_4 = 0$$

$$(a_3 - c_3)t_5 + (b_3 - c_3)t_6 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$t_1 t_6 - t_2 t_5 = 0$$

$$t_2 t_3 - t_1 t_4 = 0$$

$$t_4 t_5 - t_3 t_6 = 0$$

olur.

$$t_1 = u_1$$

$$t_2 = u_2$$

$$t_3 = u_3$$

$u_1, u_2, u_3, k \in \mathbb{R}$ alınır;

$$t_4 = \frac{u_2 u_3}{u_1}$$

$$t_5 = u_1 k$$

$$t_6 = u_2 k$$

elde edilir. $u_4, u_5, u_6 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_1 = u_4$$

olsun. Bu durumda (3.2.12) den

$$b_1 = u_4 - u_1k - u_2k$$

$$c_1 = u_4 - u_2k$$

bulunur.

$$a_2 = u_5$$

olsun. Bu durumda (3.2.13) den

$$b_2 = u_5 - u_2 - u_1$$

$$c_2 = u_5 - u_2$$

bulunur.

$$a_3 = u_6$$

olsun. Bu durumda (3.2.14) den

$$b_3 = u_6 - u_3 - \frac{u_2u_3}{u_1}$$

$$c_3 = u_6 - \frac{u_2u_3}{u_1}$$

bulunur. Böylece \mathbb{R}^3 de bir $P(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin PH olması için kontrol noktalarının karakterleri aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$P_0 = (a_1, a_2, a_3) = (u_4, u_5, u_6)$$

$$P_1 = (b_1, b_2, b_3) = (u_4 - u_1k - u_2k, u_5 - u_2 - u_1, u_6 - u_3 - \frac{u_2u_3}{u_1})$$

$$P_3 = (c_1, c_2, c_3) = (u_4 - u_2k, u_5 - u_2, u_6 - \frac{u_2u_3}{u_1})$$

Örnek 3.2.15: Keyfi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ve k reel sayılarını aşağıdaki gibi seçilsin.

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = 4$$

$$u_3 = 1$$

$$u_4 = 3$$

$$u_5 = 4$$

$$u_6 = 5$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Elde edilen karakterizasyonlara göre düzenlendiğinde kontrol noktaları aşağıdaki gibi bulunur:

$$P_0 = (a_1, a_2, a_3) = (3, 4, 5)$$

$$P_1 = (b_1, b_2, b_3) = (0, -2, 2)$$

$$P_2 = (c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 3)$$

P_0, P_1, P_2 kontrol noktaları ile oluşturulan $P(t)$ eğrisi şöyledir;

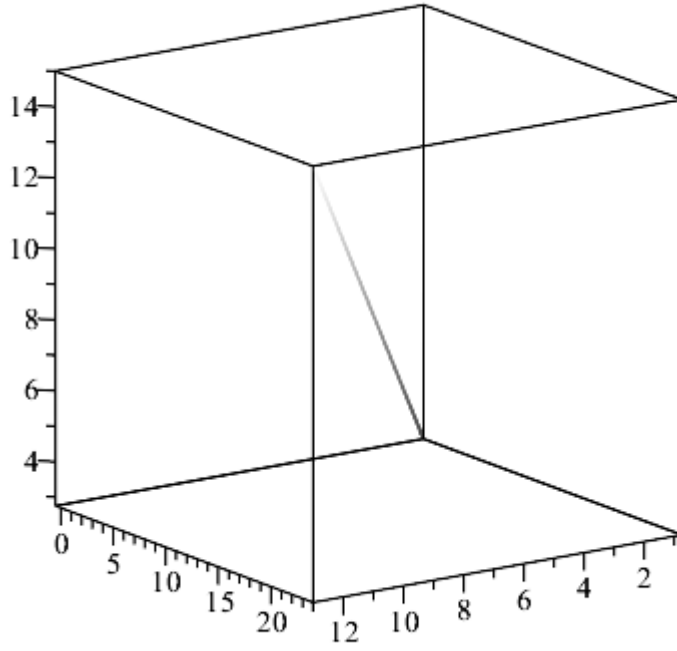
$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2(3, 4, 5) + 2t(1-t)(0, -2, 2) + t^2(1, 0, 3) \\ &= (3 - 6t + 3t^2, 4 - 8t + 4t^2, 5 - 10t + 5t^2) + (0, -4t + 4t^2, 4t - 4t^2) \\ &\quad + (t^2, 0, 3t^2) \\ &= (4t^2 - 6t + 3, 8t^2 - 12t + 4, 4t^2 - 6t + 5) \end{aligned}$$

Bu $P(t)$ Bezier eğrisinin hız vektörünün normunu hesaplandığında aşağıdaki gibi bir polinom elde edilir.

$$P'(t) = (8t - 6, 16t - 12, 8t - 6)$$

$$\begin{aligned} \|P'(t)\| &= \sqrt{64t^2 - 96t + 36 + 256t^2 - 384t + 144 + 64t^2 - 96t + 36} \\ &= \sqrt{384t^2 - 576t + 216} \\ &= \sqrt{(8\sqrt{6}t - 6\sqrt{6})^2}, t \geq 0 \\ &= 8\sqrt{6}t - 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

Böylece elde edilen kontrol noktaları ile oluşturulan $P(t)$ kuadratik Bezier eğrisi \mathbb{R}^3 te bir PH-eğri oldu.



Şekil 3: 3 Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

Örnek 3.2.16: Keyfi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ve k reel sayılarını aşağıdaki gibi seçilsin.

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = -3$$

$$u_3 = -4$$

$$u_4 = 0$$

$$u_5 = 1$$

$$u_6 = 7$$

$$k = -1$$

Elde edilen karakterlere göre düzenlenirse kontrol noktaları aşağıdaki gibi bulunur:

$$P_0 = (a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 7)$$

$$P_1 = (b_1, b_2, b_3) = (-1, 2, 5)$$

$$P_2 = (c_1, c_2, c_3) = (-3, 4, 1)$$

olur. P_0, P_1, P_2 kontrol noktaları ile oluşturulan $P(t)$ eğrisi şöyledir;

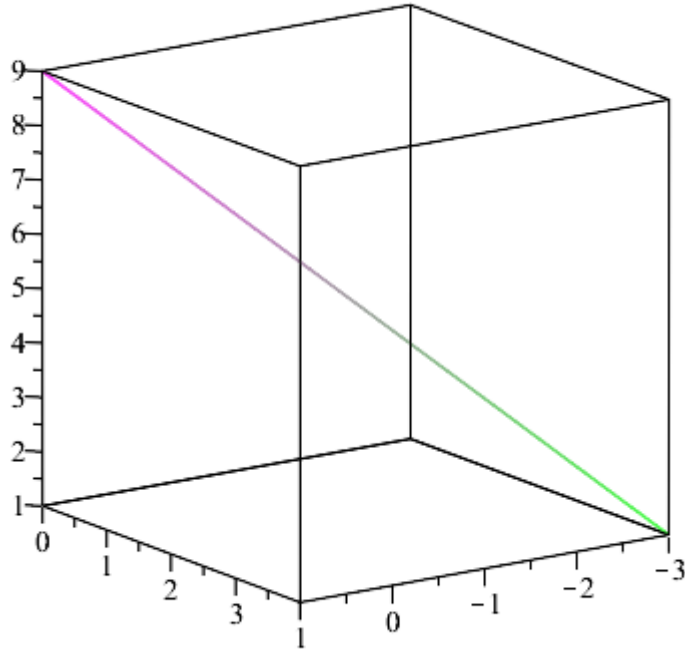
$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2(0,1,7) + 2t(1-t)(-1,2,5) + t^2(-3,4,1) \\ &= (0, 1 - 2t + t^2, 7 - 14t + 7t^2) + (-2t + 2t^2, 4t - 4t^2, 10t - 10t^2) \\ &\quad + (-3t^2, 4t^2, t^2) \\ &= (-t^2 - 2t, t^2 + 2t + 1, -2t^2 - 4t + 7) \end{aligned}$$

Bu $P(t)$ Bezier eğrisinin hız vektörünün normu hesaplandığında aşağıdaki gibi bir polinoma eşit bulunur.

$$P'(t) = (-2t - 2, 2t + 2, -4t - 4)$$

$$\begin{aligned} \|P'(t)\| &= \sqrt{4t^2 + 8t + 4 + 4t^2 + 8t + 4 + 16t^2 + 32t + 16} \\ &= \sqrt{24t^2 + 48t + 24} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{6}t + 2\sqrt{6})^2}, t \geq 0 \\ &= 2\sqrt{6}t + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Böylece elde edilen kontrol noktaları ile oluşturulan $P(t)$ kuadratik Bezier eğrisi \mathbb{R}^3 te bir PH-eğri oldu.



Şekil 4: 3-Boyutlu Öklid Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

MINKOWSKI UZAYINDA KUADRATİK BEZIER PYTHAGOREAN HODOGRAPH EĞRİLER

4.1. 2-Bıyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler

Tezin bu bölümünde 2-boyutlu Minkowski uzayında alınan kuadratik bir Bezier eğrisinin aynı zamanda bir PH-eğri olması için kontrol noktalarının nasıl bir karakterizasyona sahip olması gerektiği araştırıldı. Yapılan cebirsel işlemler sonucunda bir karakterizasyon belirlendi. Bu karakterizasyonun elde etme aşamaları Teorem 4.1.1 de verilmiştir.

Teorem 4.1.1: $P(t)$, kontrol noktaları P_0, P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir Bezier eğri olsun. Bu $P(t)$ Bezier eğrisinin \mathbb{R}_1^2 uzayında aynı zamanda PH-eğri olması için P_0, P_1 ve P_2 kontrol noktalarının aşağıdaki karakterizasyonu sağlaması gerekir.

$$P_0 = (a_1, a_2) = (t_2k + t_3, t_2 + t_4)$$

$$P_1 = (b_1, b_2) = (-t_1k + t_3, t_4 - t_1)$$

$$P_2 = (c_1, c_2) = (t_3, t_4)$$

İspat: $P(t)$, kontrol noktaları P_0, P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir bezier eğri olsun. Bu durumda B_0^2, B_1^2 ve B_2^2 Bezier katsayıları olmak üzere $P(t)$ eğrisi;

$$P(t) = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2$$

ile verilen denklemde olduğu gibi yazılabilir. \mathbb{R}_1^2 uzayında $P_0 = (a_1, a_2)$, $P_1 = (b_1, b_2)$ ve $P_2 = (c_1, c_2)$ noktaları alınsın. $P(t)$ Bezier eğrisinin PH-eğri olması için kontrol

noktalarının karakterleri belirlenecektir. Bunun için kontrol noktalarının koordinatları eğri denkleminde yerine yazıldığında (4.1.2) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
P(t) &= (1-t)^2(a_1, a_2) + 2t(1-t)(b_1, b_2) + t^2(c_1, c_2) \\
&= (a_1 - 2a_1t + a_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2) + (2b_1t - 2b_1t^2, 2b_2t - 2b_2t^2) \\
&\quad + (c_1t^2, c_2t^2) \\
&= (a_1 - 2a_1t + a_1t^2 + 2b_1t - 2b_1t^2 + c_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2 + 2b_2t \\
&\quad - 2b_2t^2 + c_2t^2) \\
&= ((a_1 - 2b_1 + c_1)t^2 + 2(b_1 - a_1)t + a_1, (a_2 - 2b_2 + c_2)t^2 + 2(b_2 - a_2)t + a_2)
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

(4.1.2) eşitliğindeki Bezier eğrisinin hodografını hesaplamak için bu eşitlikte türev alınırsa (4.1.3) eşitliği bulunur.

$$P'(t) = (2(a_1 - 2b_1 + c_1)t + 2(b_1 - a_1), 2(a_2 - 2b_2 + c_2)t + 2(b_2 - a_2)) \tag{4.1.3}$$

$P(t)$ Bezier eğrisinin hız vektörünün normu hesaplandığında aşağıdaki (4.1.4) eşitliği elde edilir.

$$\| P'(t) \|^2 = 4(a_1 - 2b_1 + c_1)^2t^2 + 8(a_1 - 2b_1 + c_1)(b_1 - a_1)t + 4(b_1 - a_1)^2 - 4(a_2 - 2b_2 + c_2)^2t^2 - 8(a_2 - 2b_2 + c_2)(b_2 - a_2)t - 4(b_2 - a_2)^2$$

$$\| P'(t) \|^2 = 4[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 - (a_2 - 2b_2 + c_2)^2]t^2 + 8[(a_1 - 2b_1 + c_1)(b_1 - a_1) - (a_2 - 2b_2 + c_2)(b_2 - a_2)]t + 4[(b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2] \tag{4.1.4}$$

P(t) kuadratik Bezier eğrisinin PH olması için (4.1.4) ile gösterilen ikinci dereceden t bilinmeyenli denklemin diskriminantının (Δ) sıfır olması yani bir tam kare ifadeye eşit olması gerekir. O halde (4.1.4) ile belirtilen denklemin diskriminantı;

$$\Delta = [(a_1 - 2b_1 + c_1)(b_1 - a_1) - (a_2 - 2b_2 + c_2)(b_2 - a_2)]^2 - 64[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 - (a_2 - 2b_2 + c_2)^2][(b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2] = 0 \quad (4.1.5)$$

olur. Burada diskriminantı çözmek için (4.1.5) eşitliğinde;

$$x = a_1 - 2b_1 + c_1, \quad y = a_2 - 2b_2 + c_2, \quad p = b_1 - a_1, \quad q = b_2 - a_2 \quad (4.1.6)$$

(4.1.6) eşitlikleriyle verilen değişken değişimleri yapıldığında;

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &= 64(xp - yq)^2 - 64(x^2 - y^2)(p^2 - q^2) \\ 0 &= 64(xp)^2 - 128xpyq + 64(yq)^2 - 64x^2p^2 + 64x^2q^2 + 64y^2p^2 - 64y^2q^2 \\ 0 &= 64x^2q^2 - 64xpyq - 64xpyq + 64y^2p^2 \\ 0 &= 64xq(xq - yp) + 64yp(yp - xq) \\ 0 &= 64(xq - yp)(xq - yp) \\ 0 &= 64(xq - yp)^2 \\ xq - yp &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

elde edilir. (4.1.7) eşitliğinde x, y, p ve q değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} (a_1 - 2b_1 + c_1)(b_2 - a_2) - (a_2 - 2b_2 + c_2)(b_1 - a_1) &= 0 \\ -a_1a_2 + a_1b_2 + 2a_2b_1 - 2b_1b_2 - a_2c_1 + b_2c_1 + a_1a_2 - a_2b_1 - 2a_1b_2 + 2b_1b_2 + a_1c_2 \\ - b_1c_2 &= 0 \\ -a_1b_2 + a_2b_1 - a_2c_1 + b_2c_1 + a_1c_2 - b_1c_2 &= 0 \\ a_1(c_2 - b_2) + b_1(a_2 - c_2) + c_1(b_2 - a_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

elde edilir. (4.1.8) denkleminde aşağıdaki parametre değişimleri uygulanırsa;

$$c_2 - b_2 = t_1$$

$$a_2 - c_2 = t_2$$

t_1 ve t_2 keyfi reel sayıları için $b_2 - a_2 = -t_1 - t_2$ bulunur. Bu değerler (4.1.8) denkleminde yerine yazılırsa;

$$a_1 t_1 + b_1 t_2 + c_1(-t_1 - t_2) = 0$$

$$a_1 t_1 + b_1 t_2 - c_1 t_1 - c_1 t_2 = 0$$

$$(a_1 - c_1)t_1 + (b_1 - c_1)t_2 = 0 \quad (4.1.9)$$

elde edilir. Burada $a_1 - c_1 = t_2 k$ ve $b_1 - c_1 = -t_1 k$, $k \in \mathbb{R}$ yazılabilir.

$$c_1 = t_3, t_3 \in \mathbb{R}$$

alınırsa;

$$a_1 = t_2 k + t_3$$

$$b_1 = -t_1 k + t_3$$

olur. Benzer şekilde;

$$c_2 = t_4, t_4 \in \mathbb{R}$$

alınırsa,

$$b_2 = t_4 - t_1$$

$$a_2 = t_4 + t_2$$

bulunur. Böylece $P(t)$ kuadratik bezier eğrisinin \mathbb{R}_1^2 de PH-eğri olması için kontrol noktalarının karakterleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$P_0 = (a_1, a_2) = (t_2 k + t_3, t_2 + t_4)$$

$$P_1 = (b_1, b_2) = (-t_1 k + t_3, t_4 - t_1)$$

$$P_2 = (c_1, c_2) = (t_3, t_4)$$

Örnek 4.1.10: Keyfi t_1, t_2, t_3, t_4 ve k reel sayıları aşağıdaki gibi seçilsin:

$t_1 = 6, t_2 = 8, t_3 = 3, t_4 = 4, k = \frac{1}{2}$. Bu keyfi değerler bulunan karakterizasyona göre düzenlediğinde kontrol noktaları aşağıdaki gibi olur.

$$P_0 = (3,8)$$

$$P_1 = (0, -1)$$

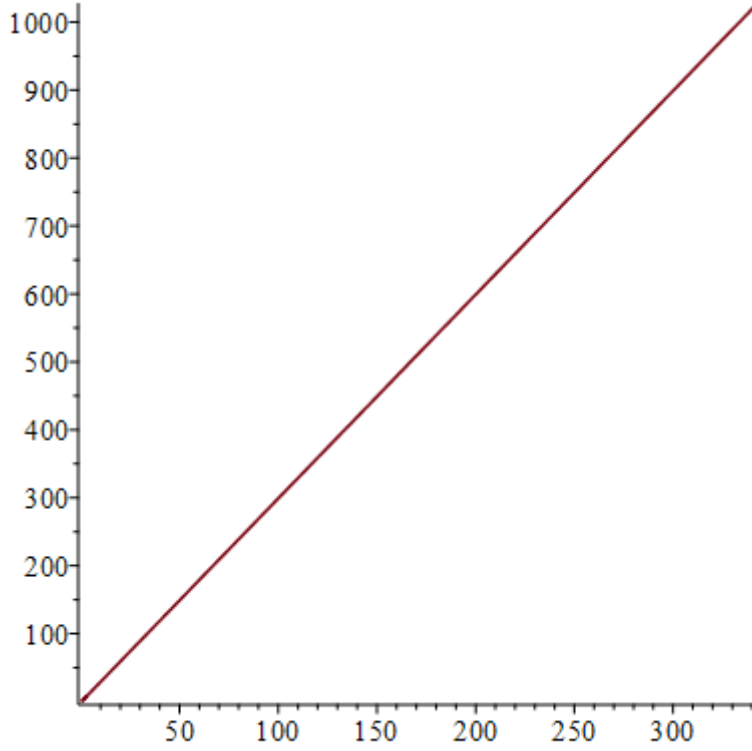
$$P_2 = (1,2)$$

olur. Bu durumda $P(t)$ eğrisi;

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2(3,8) + 2t(1-t)(0,-1) + t^2(1,2) \\ &= (3-6t+3t^2, 8-16t+8t^2) + (0, -2t+2t^2) + (t^2, 2t^2) \\ &= (4t^2-6t+3, 12t^2-18t+8) \end{aligned}$$

$$P'(t) = (8t-6, 24t-18)$$

$$\begin{aligned} \|P'(t)\| &= \sqrt{|64t^2-96t+36-(576t^2-864t+324)|} \\ &= \sqrt{|-512t^2+768t-288|} \\ &= \sqrt{|-(512t^2-768t+288)|} \\ &= \sqrt{|-(16\sqrt{2}t-12\sqrt{2})^2|} \\ &= 16\sqrt{2}t-12\sqrt{2} \end{aligned}$$



Şekil 5: 2 Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

Örnek 4.1.11: Keyfi t_1, t_2, t_3, t_4 ve k reel sayılarını aşağıdaki gibi seçilsin:

$t_1 = -7, t_2 = 14, t_3 = -5, t_4 = 3, k = \frac{1}{7}$. Bu keyfi değerler bulunan karakterizasyona göre düzenlendiğinde kontrol noktaları aşağıdaki gibi olur.

$$P_0 = (-3, 17)$$

$$P_1 = (-4, 10)$$

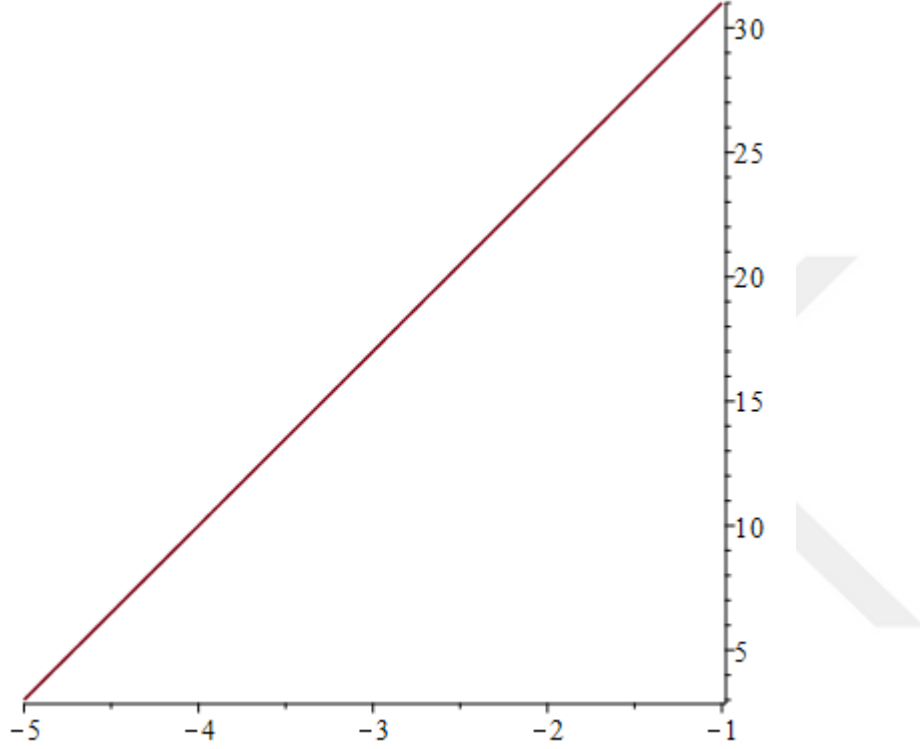
$$P_2 = (-5, 3)$$

olur. Bu durumda $P(t)$ eğrisi;

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2(-3, 17) + 2t(1-t)(-4, 10) + t^2(-5, 3) \\ &= (3 - 6t - 3t^2, 17 - 34t + 17t^2) + (-8t + 8t^2, 20t - 20t^2) + (-5t^2, 3t^2) \\ &= (-2t - 3, -14t + 17) \end{aligned}$$

$$P'(t) = (-2, -14)$$

$$\begin{aligned}
\|P'(t)\| &= \sqrt{|4 - 196|} \\
&= \sqrt{|-192|} \\
&= 8\sqrt{3}
\end{aligned}$$



Şekil 6: 2-Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

4.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğriler

Tezin bu bölümünde 3-boyutlu Minkowski uzayında alınan kuadratik bir Bezier eğrisinin aynı zamanda bir PH-eğri olması için kontrol noktalarının nasıl bir karakterizasyona sahip olması gerektiği araştırıldı. Yapılan cebirsel işlemler sonucunda bir karakterizasyon belirlendi. Bu karakterizasyonun elde etme aşamaları Teorem 4.2.1. de verilmiştir.

Teorem 4.2.1: $P(t)$, kontrol noktaları P_0, P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir Bezier eğri olsun. Bu $P(t)$ Bezier eğrisinin \mathbb{R}_1^3 uzayında aynı zamanda PH-eğri olması için P_0, P_1 ve P_2 kontrol noktalarının aşağıdaki karakterizasyonu sağlaması gerekir.

$$P_0 = (a_1, a_2, a_3) = (k_4, k_5, k_6)$$

$$P_1 = (b_1, b_2, b_3) = (k_4 + k_1 + k_2, k_5 + k_3 + \frac{k_2 k_3 - u^2 - v^2}{k_1},$$

$$k_6 - \left(\frac{2uvk_1 + (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right) - \frac{u^2 - v^2}{k_1} - \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right))$$

$$P_2 = (c_1, c_2, c_3) = (k_2 + k_4, k_5 + \frac{k_2 k_3 - u^2 - v^2}{k_1},$$

$$k_6 - \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right))$$

İspat: $P(t)$, kontrol noktaları P_0, P_1 ve P_2 olan ikinci dereceden bir Bezier eğri olsun. Bu durumda

$$P(t) = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2$$

şeklde yazılabilir. Burada $P_0 = (a_1, a_2, a_3)$, $P_1 = (b_1, b_2, b_3)$ ve $P_2 = (c_1, c_2, c_3)$ alınsın. $P(t)$ Bezier eğrisinin \mathbb{R}_1^3 de PH-eğri olması için kontrol noktalarının karakterlerini belirlenecektir. Bunun için kontrol noktalarının koordinatlarını eğri denkleminde yerlerine yazıldığında (4.2.2) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2(a_1, a_2, a_3) + 2t(1-t)(b_1, b_2, b_3) + t^2(c_1, c_2, c_3) \\ &= (a_1 - 2a_1t + a_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2, a_3 - 2a_3t + a_3t^2) \\ &\quad + (2b_1t - 2b_1t^2, 2b_2t - 2b_2t^2, 2b_3t - 2b_3t^2) + (c_1t^2, c_2t^2, c_3t^2) \\ &= (a_1 - 2a_1t + a_1t^2 + 2b_1t - 2b_1t^2 + c_1t^2, a_2 - 2a_2t + a_2t^2 + 2b_2t - 2b_2t^2 \\ &\quad + c_2t^2, a_3 - 2a_3t + a_3t^2 + 2b_3t - 2b_3t^2 + c_3t^2) \\ &= ((a_1 - 2b_1 + c_1)t^2 + (-2a_1 + 2b_1)t + a_1, (a_2 - 2b_2 + c_2)t^2 + (2b_2 - 2a_2)t + \\ &\quad a_2, (a_3 - 2b_3 + c_3)t^2 + (2b_3 - 2a_3)t + a_3) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

(4.2.2) ile belirtilen $P(t)$ Bezier eğrisinin türevi alınır, eğrinin hodografı (4.2.3) denklemi şeklinde olur.

$$P'(t) = (2(a_1 - 2b_1 + c_1)t + 2(-a_1 + b_1), 2(a_2 - 2b_2 + c_2)t + 2(-a_2 + b_2), 2(a_3 - 2b_3 + c_3)t + 2(-a_3 + b_3)) \quad (4.2.3)$$

(4.2.3) denklemi ile verilen eğrinin hız vektörünün normu hesaplandığında (4.2.4) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \|P'(t)\|^2 &= 4(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 t^2 + 8(a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_1 + b_1)t + 4(-a_1 + b_1)^2 \\ &\quad + 4(a_2 - 2b_2 + c_2)^2 t^2 + 8(a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_2 + b_2)t + 4(-a_2 + b_2)^2 \\ &\quad - 4(a_3 - 2b_3 + c_3)^2 t^2 - 8(a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_3 + b_3)t - 4(-a_3 + b_3)^2 \\ &= 4[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 + (a_2 - 2b_2 + c_2)^2 - (a_3 - 2b_3 + c_3)^2]t^2 + \\ &\quad 8[(a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_1 + b_1) + (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_2 + b_2) - (a_3 - 2b_3 + \\ &\quad c_3)(-a_3 + b_3)]t + 4[(-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 - (-a_3 + b_3)^2] \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$P(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin PH olması için (4.2.4) ile gösterilen ikinci dereceden t bilinmeyenli denklemin diskriminantının (Δ) sıfır olması yani bir tam kare ifadeye eşit olması gerekir. O halde (4.2.4) ile belirtilen denklemin diskriminantı (4.2.5) şeklindedir.

$$\Delta = 64[(a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_1 + b_1) + (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_2 + b_2) - (a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_3 + b_3)]^2 - 64[(a_1 - 2b_1 + c_1)^2 + (a_2 - 2b_2 + c_2)^2 - (a_3 - 2b_3 + c_3)^2][(-a_1 + b_1)^2 + (-a_2 + b_2)^2 - (-a_3 + b_3)^2] \quad (4.2.5)$$

(4.2.5) ile verilen denklemde (4.2.6) ile verilen eşitliklerdeki değişken değiştirmeler yapılırsa denklemin diskriminantı (4.2.7) şeklinde elde edilir.

$$x = (a_1 - 2b_1 + c_1)$$

$$y = (a_2 - 2b_2 + c_2)$$

$$\begin{aligned}
z &= (a_3 - 2b_3 + c_3) \\
p &= (-a_1 + b_1) \\
q &= (-a_2 + b_2) \\
r &= (-a_3 + b_3)
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 64(xp + yq - zr)^2 - 64(x^2 + y^2 - z^2)(p^2 + q^2 - r^2) \\
0 &= 64[x^2p^2 + y^2q^2 + z^2r^2 + 2xpyq - 2xpzr - 2yqzr] - 64[x^2p^2 + x^2q^2 \\
&\quad - x^2r^2 + y^2p^2 + y^2q^2 - y^2r^2 - z^2p^2 - z^2q^2 + z^2r^2] \\
&= 64xpyq - 64x^2q^2 + 64xpyq - 64y^2p^2 - 64xpzr + 64x^2r^2 - 64xpzr \\
&\quad + 64z^2p^2 - 64yqzr + 64y^2r^2 - 64yqzr + 64z^2q^2 \\
&= 64xq(yq - xq) + 64yp(xq - yp) + 64xr(xr - zp) + 64zp(zp - xr) \\
&\quad + 64yr(yr - zq) + 64zq(zq - yr) \\
&= 64(xq - yp)(yp - xq) + 64(xr - zp)(xr - zp) + 64(yr - zq)(yr - zq) \\
&= -64(xq - yp)^2 + 64(xr - zp)^2 + 64(yr - zq)^2 \\
&= (xr - zp)^2 + (yr - zq)^2 - (xq - yp)^2 \\
&\quad (xr - zp)^2 + (yr - zq)^2 = (xq - yp)^2
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

(4.2.7) ile verilen eşitlikte sırasıyla (4.2.8), (4.2.9) ve (4.2.10) değişken değiştirmeleri yapılsın.

$$xr - zp = u^2 - v^2 \tag{4.2.8}$$

$$yr - zq = 2uv \tag{4.2.9}$$

$$xq - yp = u^2 + v^2 \tag{4.2.10}$$

Bu eşitliklerden ilki olan;

$$xr - zp = u^2 - v^2$$

(4.2.8) denkleminde x , r , z ve p yerine yazılırsa (4.2.11) eşitliği elde edilir.

$$(a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_3 + b_3) - (a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_1 + b_1) = u^2 - v^2$$

$$\begin{aligned}
& -a_1a_3 + a_1b_3 + 2a_3b_1 - 2b_1b_3 - a_3c_1 + b_3c_1 + a_1a_3 - a_3b_1 - 2a_1b_3 + 2b_1b_3 + a_1c_3 \\
& \quad - b_1c_3 = u^2 - v^2 \\
& \quad a_3b_1 - a_1b_3 - a_3c_1 + b_3c_1 + a_1c_3 - b_1c_3 = u^2 - v^2 \\
& a_1(c_3 - b_3) + b_1(a_3 - c_3) + c_1(b_3 - a_3) = u^2 - v^2 \tag{4.2.11}
\end{aligned}$$

$$yr - zq = 2uv$$

(4.2.9) denkleminde y , r , z ve q değerleri yerlerine yazılırsa (4.2.12) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_3 + b_3) - (a_3 - 2b_3 + c_3)(-a_2 + b_2) = 2uv \\
& -a_2a_3 + a_2b_3 + 2a_3b_2 - 2b_2b_3 - a_3c_2 + b_3c_2 + a_2a_3 - a_3b_2 - 2a_2b_3 + 2b_2b_3 + a_2c_3 \\
& \quad - b_2c_3 = 2uv \\
& \quad a_3b_2 - a_2b_3 - a_3c_2 + b_3c_2 + a_2c_3 - b_2c_3 = 2uv \\
& \quad a_3(b_2 - c_2) + b_3(c_2 - a_2) + c_3(a_2 - b_2) = 2uv \tag{4.2.12}
\end{aligned}$$

$$xq - yp = u^2 + v^2$$

(4.2.10) denkleminde x , q , y ve p değerleri yerlerine yazılırsa (4.2.13) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (a_1 - 2b_1 + c_1)(-a_2 + b_2) - (a_2 - 2b_2 + c_2)(-a_1 + b_1) = u^2 + v^2 \\
& -a_1a_2 + a_1b_2 + 2a_2b_1 - 2b_1b_2 - a_2c_1 + b_2c_1 + a_1a_2 - a_2b_1 - 2a_1a_2 + 2b_1b_2 + a_1c_2 \\
& \quad - b_1c_2 = u^2 + v^2 \\
& \quad a_2b_1 - a_1b_2 - a_2c_1 + b_2c_1 + a_1c_2 - b_1c_2 = u^2 + v^2 \\
& a_2(b_1 - c_1) + b_2(c_1 - a_1) + c_2(a_1 - b_1) = u^2 + v^2 \tag{4.2.13}
\end{aligned}$$

$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}$ keyfi reel sayılar olmak üzere (4.2.14) ile verilen değişken değiştirmeleri uygulansın:

$$\begin{aligned}
b_1 - c_1 &= t_1 & b_2 - c_2 &= t_3 & c_3 - b_3 &= t_5 \\
c_1 - a_1 &= t_2 & c_2 - a_2 &= t_4 & a_3 - b_3 &= t_6 \\
a_1 - b_1 &= -t_1 - t_2 & a_2 - b_2 &= -t_3 - t_4 & b_3 - a_3 &= -t_5 - t_6
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

(4.2.14) ile verilen yeni keyfi değerleri sırasıyla (4.2.11), (4.2.12) ve (4.2.13) denklemlerinde yerine yazıldığında:

$$a_1 t_5 + b_1 t_6 - c_1 t_5 - c_1 t_6 = u^2 - v^2$$

$$a_2 t_1 + b_2 t_2 - c_2 t_1 - c_2 t_2 = u^2 + v^2$$

$$a_3 t_3 + b_3 t_4 - c_3 t_3 - c_3 t_4 = 2uv$$

elde edilir. Burada uygun cebirsel işlemler yapılır ve (4.2.14) deki eşitliklerden yararlanılırsa sırasıyla (4.2.15), (4.2.16) ve (4.2.17) denklemleri elde edilir.

$$(a_1 - c_1)t_5 + (b_1 - c_1)t_6 = u^2 - v^2$$

$$(a_2 - c_2)t_1 + (b_2 - c_2)t_2 = u^2 + v^2$$

$$(a_3 - c_3)t_3 + (b_3 - c_3)t_4 = 2uv$$

$$-t_2 t_5 + t_1 t_6 = u^2 - v^2 \quad (4.2.15)$$

$$-t_1 t_4 + t_2 t_3 = u^2 + v^2 \quad (4.2.16)$$

$$t_3 t_6 - t_4 t_5 = 2uv \quad (4.2.17)$$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ keyfi reel sayılar olmak üzere (4.2.18) ile verilen eşitlikler elde edilir.

$$t_1 = k_1$$

$$t_2 = k_2$$

$$t_3 = k_3 \quad (4.2.18)$$

(4.2.16) eşitliğinden;

$$-k_1 t_4 + k_2 k_3 = u^2 + v^2$$

$$t_4 = \frac{k_2 k_3 - u^2 - v^2}{k_1}$$

t_4 keyfi reel sayısı bulunur. (4.2.15) ve (4.2.17) eşitliklerinden

$$k_3 t_6 - \left(\frac{k_2 k_3 - u^2 - v^2}{k_1} \right) t_5 = 2uv \quad (4.2.19)$$

$$k_1 t_6 - k_2 t_5 = u^2 - v^2 \quad (4.2.20)$$

(4.2.19) denklemini $-k_1$ ve (4.2.20) denklemini k_3 ile çarpıldığında,

$$-k_1 k_3 t_6 + k_1 \left(\frac{k_2 k_3 - u^2 - v^2}{k_1} \right) t_5 = -2uvk_1$$

$$k_3 k_1 t_6 - k_3 k_2 t_5 = (u^2 - v^2) k_3$$

ve taraf tarafa toplanıldığında;

$$-(u^2 + v^2)t_5 = -2uvk_1 + (u^2 - v^2)k_3$$

$$t_5 = \frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece t_5 keyfi reel sayısı elde edilmiş olur. Şimdi (3.2.15) eşitliğinden

$$k_1 t_6 - k_2 \left(\frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right) = u^2 - v^2$$

$$k_1 t_6 = k_2 \left(\frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right) + u^2 - v^2$$

$$t_6 = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right) + \frac{u^2 - v^2}{k_1}$$

t_6 keyfi reel sayısı elde edilir. Ve böylece $P(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin kontrol noktalarının koordinatlarını aşağıdaki gibi elde edilmiş oldu.

$$a_1 = k_4, k_4 \in \mathbb{R}$$

$$b_1 = k_4 + k_1 + k_2$$

$$c_1 = k_2 + k_4$$

$$a_2 = k_5, k_5 \in \mathbb{R}$$

$$b_2 = k_5 + k_3 + \frac{k_2 k_3 - u^2 - v^2}{k_1}$$

$$c_2 = k_5 + \frac{k_2 k_3 - u^2 - v^2}{k_1}$$

$$a_3 = k_6, k_6 \in \mathbb{R}$$

$$b_3 = k_6 - \left(\frac{2uvk_1 + (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right) - \frac{u^2 - v^2}{k_1} - \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right)$$

$$c_3 = k_6 - \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2uvk_1 - (u^2 - v^2)k_3}{u^2 + v^2} \right)$$

Örnek 4.2.21: Keyfi $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, u, v$ reel sayılarını aşağıdaki gibi seçilsin:

$$u = -2$$

$$v = 2$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 2$$

$$k_3 = 0$$

$$k_4 = 4$$

$$k_5 = 5$$

$$k_6 = 6$$

Buradan alınan bu keyfi değerler bulunan koordinatlarda yerine yazılırsa kontrol noktalarının koordinatları aşağıdaki gibi olur:

$$P_0 = (a_1, a_2, a_3) = (4, 5, 3)$$

$$P_1 = (b_1, b_2, b_3) = (7, -3, 6)$$

$$P_2 = (c_1, c_2, c_3) = (6, -3, 5)$$

Bu durumda $P(t)$ eğrisi;

$$P(t) = (1 - t)^2(4, 5, 3) + 2t(1 - t)(7, -3, 6) + t^2(6, -3, 5)$$

$$P(t) = (4 - 8t + 4t^2, 5 - 10t + 5t^2, 3 - 6t + 3t^2)$$

$$+ (14t - 14t^2, 6t - 6t^2, 12t - 12t^2) + (6t^2, -3t^2, 5t^2)$$

$$P(t) = (-4t^2 + 6t + 4, 8t^2 - 16t + 5, -4t^2 + 6t + 3)$$

şeklinde olur.

$$P'(t) = (-8t + 6, 16t - 16, -8t + 6)$$

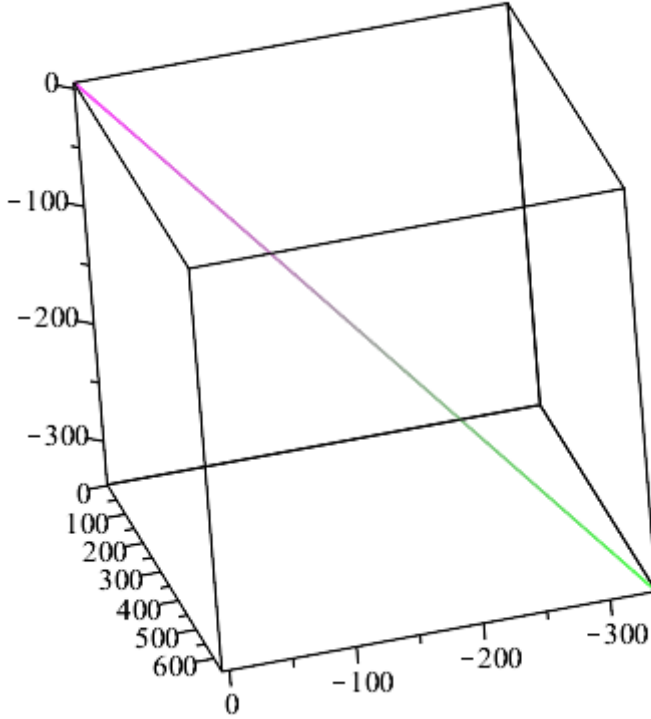
$$\|P'(t)\| = \sqrt{|64t^2 - 96t + 36 + 256t^2 - 512t + 256 - (64t^2 - 96t + 36)|}$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{|256t^2 - 512t + 256|}$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{(16t - 16)^2}$$

$$\|P'(t)\| = 16t - 16, t \geq 1$$

Seçilen koordinatlarla elde edilen $P(t)$ Bezier eğrisinin hız vektörünün normu bir polinoma eşit olduğundan bu eğri aynı zamanda bir PH-eğri oldu.



Şekil 7: 3 Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

Örnek 4.2.22: Keyfi $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, u, v$ reel sayılarını aşağıdaki gibi seçilsin:

$$u = 3$$

$$v = -1$$

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = 6$$

$$k_3 = \frac{1}{3}$$

$$k_4 = 2$$

$$k_5 = 1$$

$$k_6 = 0$$

Buradan alınan bu keyfi değerler elde edilen koordinatlarda yerine yazılırsa kontrol noktalarının koordinatları aşağıdaki gibi olur:

$$P_0 = (a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 0)$$

$$P_1 = (b_1, b_2, b_3) = \left(12, \frac{-2}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

$$P_2 = (c_1, c_2, c_3) = (8, -1, 2)$$

Bu durumda $P(t)$ eğrisi;

$$P(t) = (1 - t)^2(2, 1, 0) + 2t(1 - t) \left(12, \frac{-2}{3}, \frac{14}{3}\right) + t^2(8, -1, 2)$$

$$P(t) = (2 - 4t + 2t^2, 1 - 2t + t^2, 0) + \left(24t - 24t^2, \frac{-4}{3}t + \frac{4}{3}t^2, \frac{28}{3}t - \frac{28}{3}t^2\right) + (8t^2, -t^2, 2t^2)$$

$$P(t) = \left(-14t^2 + 20t + 2, \frac{4}{3}t^2 - \frac{10}{3}t + 1, \frac{-22}{3}t^2 + \frac{28}{3}t\right)$$

şeklinde olur.

$$P'(t) = \left(-28t + 20, \frac{8}{3}t - \frac{10}{3}, \frac{-44}{3}t + \frac{28}{3}\right)$$

$$\|P'(t)\|$$

$$= \sqrt{\left|784t^2 - 1120t + 400 + \frac{64}{9}t^2 - \frac{160}{9}t + \frac{100}{9} - \left(\frac{1936}{9}t^2 - \frac{2464}{9}t - \frac{784}{9}\right)\right|}$$

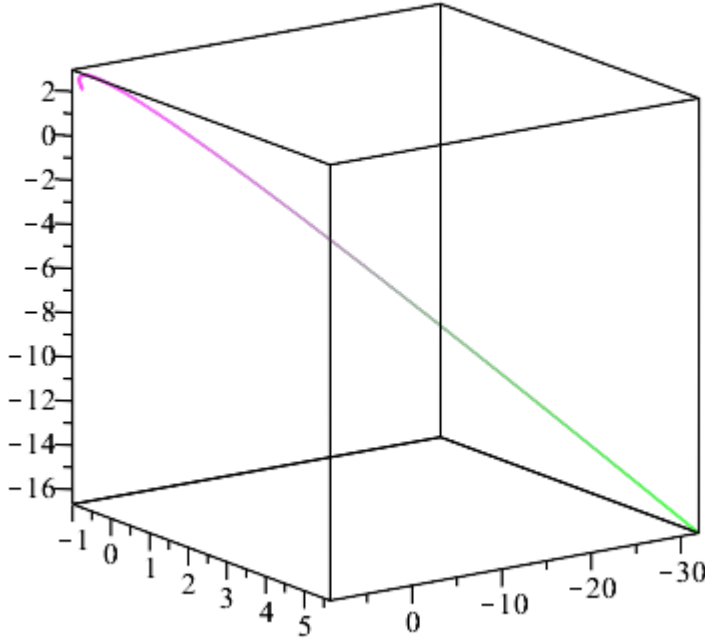
$$\|P'(t)\| = \sqrt{\left|\frac{5184}{9}t^2 - \frac{7776}{9}t + \frac{2916}{9}\right|}$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{\left|\frac{4}{9}(36t - 27)^2\right|}, t \geq 1$$

$$\|P'(t)\| = \frac{2}{3}(36t - 27)$$

$$\|P'(t)\| = 24t - 18$$

Seçilen koordinatlarla elde edilen $P(t)$ Bezier eğrisinin hız vektörünün normu bir polinoma eşit olduğundan bu eğri aynı zamanda bir PH-eğri oldu.



Şekil 8: 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Kuadratik Bezier PH-eğri

BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ

Bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda, navigasyonda, otomotiv sektöründe ve daha pek çok mühendislik alanında kullanılan Bezier eğriler, pek çok araştırmanın temelini oluşturmuştur. Farklı derecelerde Bezier eğriler farklı uzaylarda incelenmiş, geometride kullanılan sayısız eğri ailelerinde bazıları ile olan ilişkileri araştırılmıştır. Pek çok mühendislik alanında uygulamaları da yer almaktadır. Bu tez çalışmasında kuadratik Bezier eğriler ile PH-eğriler arasındaki ilişki incelendi. Kuadratik bir Bezier eğriden 2 - boyutlu ve 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında PH-eğri elde etmenin yolu araştırıldı. Benzer yöntemlerle bulunan karakterizasyon ile kuadratik bir Bezier eğrinin PH-eğri olmasını sağlayan kontrol noktalarının karakterleri parametreye bağlı olarak bulundu. Verilen her keyfi değer için elde edilen kontrol noktaları ele alınan kuadratik Bezier eğriyi bir PH-eğri yaptı. Ancak bu eğrinin hem Bezier hem de PH şartını sağlaması için kontrol noktalarını birbiri ile lineer bağımlı olması gerektiği sonucuna ulaşıldı. Bu sebeple örneklenen eğrilerin şekillerinde de görüldüğü gibi aslında bu eğriler aynı doğru üzerinde bulunan kontrol noktaları ile oluşturulabiliyor.

“Kuadratik Bezier PH-eğri olarak tanımlanan eğrilerden başka eğriler oluşturabilir miyiz?” sorusu araştırıldığında, Frenet vektörlerinden B ve N vektör alanları matematiksel olarak hesaplanamadığı için, diğer eğrilerle ilişkilendirilemedi. Ancak farklı bir çatı kullanılarak kuadratik Bezier PH-eğrilerin başka eğriler ile bağlantıları oluşturulabilir. Bu bir açık problem olarak literatüre kazandırılmıştır.

KAYNAKÇA

- Altınordu, Ş. (2021). Bezier Eğrileri ve Bazı Uygulamaları. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
- Dişibüyük, Ç. (2005). Rasyonel Bezier Eğrileri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, İzmir.
- Erkan, E. (2019). Öklid Düzleminde ve Öklid Uzayında Bezier Eğrileri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Bilim Dalı, İstanbul.
- Farouki, R. T. and Sakkalis, T. (1990). Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, 34(5), 736-752.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2000). *Diferansiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi Yayınevi.
- Kreyszig, E. (1959). *Differential Geometry*. University of Toronto Press, Canada.
- Kubota, K. K. (1972). Pythagorean Triples in Unique Factorization Domains. *American Mathematical Monthly*, 79(5), 503-505.
- Larson, R. (2012). *Elementary Linear Algebra*, The Pennsylvania State University, Boston.
- Levent, A. (2019). Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarımda Geçiş Eğrileri. Yayınlanmamış Doktora Tezi. İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Malatya.
- Lorentz, G. G. (1986). *Bernstein Polynomials*. Chelsea Publishing Company, New York.
- Luzum, C.Y. (2018). \mathbb{R}^3 deki Yüzey Eğrilerinin Bezier Eğrileri ve Matlab Uygulamaları. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Van.
- Marsh, D. (2005). *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*. Springer Verlag, London.
- Moon, H. P. (1999). Minkowski Pythagorean Hodographs, *Computer Aided Geometric Design*. South Korea, 16(8), 739-753.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York.

- Özmen, G. (2017). Kübik Bezier Eğrileri ile Yüz İfade Tanıma. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı, Edirne.
- Ramis, Ç. (2013). PH Eğrileri ve Uygulamaları. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- Ratcliffe, J. G. (1994). *Foundation of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag, New York.
- Rogers, D. F. (2002). Pierre Etienne Beziér (1910-1999), In Memoriam. *Computer Aided-Design*, 34(7), 489-491.
- Sabuncuoğlu, A. (2005). *Analitik Geometri*. Nobel Yayınları, Ankara.
- Saxena, A. ve Sahay. B. (2005). *Computer Aided Engineering Design*. Springer, Berlin.
- Struik, D. J. (1988). *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover, New York.
- Şimşek, B. (2016). Bezier Eğrileri ile Deforme El Modelinin Geliştirilmesi. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Akdeniz Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü Biyoistatistik ve Tıbbi Bilişim Anabilim Dalı, Antalya.
- Yeşilmen, C. (2016). Minkowski Uzayında Bezier Eğrilerinin Karakterizasyonu. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı, Elazığ.