T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HALKALARDA YARIASALLIĞIN KAYNAĞI VE ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ) TÜREVLER

Didem KARALARLIOĞLU CAMCI

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

HALKALARDA YARIASALLIĞIN KAYNAĞI VE ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ) TÜREVLER

Didem KARALARLIOĞLU CAMCI
Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **30/01/2017**

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

Didem K. CAMCI tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN danışmanlığında hazırlanan ve **30/01/2017** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Halkalarda Yarıasallığın Kaynağı ve Çarpımsal (Genelleştirilmiş) Türevler**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Neşet AYDIN ……………………
Başkan

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN ……………………
Üye

Prof. Dr. Ali ERDOĞAN ……………………
Üye

Prof. Dr. Hatice KANDAMAR ……………………
Üye

Doç. Dr. Çağrı DEMİR ……………………
Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Didem KARALARLIOĞLU CAMCI

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde yardımlarını esirgemeyen ve lisansüstü öğrenimim boyunca değerli bilgilerinden faydalandığım saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Neşet AYDIN'a, bilimsel hayatımın başlamasına vesile olan ve manevi desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Kazım KAYA'ya, bilimsel emek ve katkılarından dolayı Doç. Dr. Çağrı DEMİR'e, tezin oluşmasında önemli katkıları bulunan sevgili eşim Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI'ya, manevi ve bilimsel desteğinden dolayı Dr. Selin TÜRKMEN'e, hayatımın her evresinde bana destek olan annem İlknur KARALARLIOĞLU ile babam Mehmet KARALARLIOĞLU'na ve çalışmalarım boyunca en büyük sabrı gösteren varlığı ile güç bulduğum biricik oğlum Atakan CAMCI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Didem KARALARLIOĞLU CAMCI
Çanakkale, Ocak 2017

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\emptyset$	Boş küme
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
Λ	İndeks kümesi
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$-$	Fark
$\times$	Kartezyen çarpım
$=$	Eşit
$\Rightarrow$	İse
$\neq$	Eşit değil
$\cong$	İzomorf
$\exists$	Vardır
$\forall$	Her
$\subset$	Altkümesi
$\not\subset$	Altkümesi değil
$\subseteq$	Altkümesi veya eşit
(0)	Sıfır kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\|A\|$	A kümesinin kardinali
$M_{n\times m}(S)$	S kümesi üzerindeki $n \times m$ tipindeki matrislerin kümesi
$M_n(S)$	S kümesi üzerindeki $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\beta(R)$	R halkasının asal radikali
$\mathbb{Z}_n$	$mod\ n$ tamsayılarının kümesi

ÖZET

HALKALARDA YARIASALLIĞIN KAYNAĞI VE ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ) TÜREVLER

Didem KARALARLIOĞLU CAMCI
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman : Prof. Dr. Neşet AYDIN
30/01/2017, 63

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tez çalışmasına kaynak oluşturan literatür taramasına, ikinci bölümde ise tezin işlenişinde faydalı olabilecek genel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler tezin ana kısımlarını oluşturmaktadır. Üçüncü bölüm tek başlık altında verilmiş olup, bu bölümde bir yarıasal halka üzerinde tanımlanan bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev kullanılarak, halkanın değişmeliliği ile ilgili yapılan bazı incelemeler verilmiştir. Dördüncü bölüm iki alt başlık ile sunulmuştur. İlk kısımda bir halkada yarıasallığın kaynağı olarak isimlendirilen ve S_R ile gösterilen yeni bir tanım ve bununla ilgili özellikler verilmiştir. İkinci kısımda ise $|S_R|$-indirgenmiş halka, $|S_R|$-bölge ve $|S_R|$-bölümlü halka olarak adlandırılan yeni yapılar verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümün içeriği ise $|S_R|$-asal ve $|S_R|$-yarıasal halkalardır. Bu bölüm dört alt başlıktan oluşmaktadır. İlk kısımda yeni yapılar olan $|S_R|$-asal ve $|S_R|$-yarıasal halkalar tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Bu halkalarda asal radikal ile ilgili olan incelemeler ikinci kısımda, kesirler halkası ve yerelleştirme ile ilgili olan incelemeler üçüncü kısımda, Lie çarpım ile ilgili incelemeler de dördüncü kısımda sunulmuştur. Son bölüm olan altıncı bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Asal İdeal, Yarıasal İdeal, Asal Halka, Yarıasal Halka, Çarpımsal (Genelleştirilmiş)-Türev.

ABSTRACT

SOURCE OF SEMIPRIMENESS AND MULTIPLICATIVE (GENERALIZED) DERIVATIONS IN RINGS

Didem KARALARLIOĞLU CAMCI
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Doctoral Dissertation in Mathematical Science
Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN
30/01/2017, 63

This thesis consists of six sections. In the first section, place is given to the literature which constitutes the source the thesis study and in the second section, given general informations can be useful in the processing of the thesis. The third, fourth and fifth sections constitutes the main part of the thesis. In the third section, presented under a single title, some investigations are given related to commutativity of a semiprime ring using the multiplicative (generalized)-derivation. The fourth section includes two under title. In the first part, source of semiprimeness of ring, symbolized by S_R, is defined and some properties are given. In the second part, $|S_R|$-reduced ring, $|S_R|$-domain and $|S_R|$-division ring have been defined and some properties have been investigated. Content of the fifth section is $|S_R|$-prime and $|S_R|$-semiprime rings. This section includes four under title. In the first part $|S_R|$-prime and $|S_R|$-semiprime rings are defined and some properties are given. In this ring, investigation of the radical (resp. quotients rings and localization) have been given in second part (resp. third part). In addition, investigation of the Lie product have been given in the fourth part. In the sixth section that is the last section, the obtained results are summarized.

Keywords: Prime Ideal, Semiprime Ideal, Prime Ring, Semiprime Ring, Multiplicative (Generalized)-Derivation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU ii

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI iii

TEŞEKKÜR iv

SİMGELER VE KISALTMALAR v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

BÖLÜM 1
GİRİŞ 1

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER 3

BÖLÜM 3
YARIASAL HALKALARDA ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ)-TÜREVLER 12

BÖLÜM 4
HALKALARDA YARIASALLIĞIN KAYNAĞI 24

4.1. Yarıasallığın Kaynağı Kavramı ve Bazı Temel Özellikleri 24

4.2. $\boldsymbol{S_R}$-İndirgenmiş Halkalar, $\boldsymbol{S_R}$-Bölgeleri ve $\boldsymbol{S_R}$-Bölümlü Halkaları 27

BÖLÜM 5
$\boldsymbol{S_R}$-YARIASAL VE $\boldsymbol{S_R}$-ASAL HALKALAR 40

5.1. Tanımı ve Temel Özellikleri 40

5.2. Asal Radikal ile İlgili Bazı Sonuçlar 41

5.3. Kesirler Halkası ve Yerelleştirme ile İlgili Bazı Sonuçlar 47

5.4. Lie Çarpım Üzerindeki Bazı Genelleştirmeler 48

BÖLÜM 6
SONUÇ VE ÖNERİLER 59

KAYNAKLAR 62

ÖZGEÇMİŞ I

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Halkalarda türev konusu halkaların değişmeliliği ile ilgili çalışmalarda önemli bir yer tutar. Bu konudaki ilk çalışma Posner (1957) tarafından ele alınmıştır. Daha sonraki çalışmalarda ise farklı yöntemlerle genelleştirmeler yapılmıştır. Bunlar; bir R halkasındaki türev üzerinde yapılan genelleştirmeler ve bu türev tanımlarını bulunduran koşullar üzerinde yapılan genelleştirmelerdir. Türev üzerinde yapılan genellemelerden bazıları şu şekilde verilebilir: Bresar (1991) yaptığı çalışmasında genelleştirilmiş türevi tanımlamıştır. Burada genelleştirilmiş türev yerine bir türev alındığında bilinen türev tanımı elde edilir. Sonra, Daif (1991) çarpımsal türevi tanımlamıştır. Burada, çarpımsal türevin toplamsal olması gerekmemektedir. Yani bilinen türev tanımını genelleştirmiştir. Daha sonra Daif ve Sayiad (1997) bir d türevi ile belirlenen F çarpımsal genelleştirilmiş türevini tanımlamıştır. Burada da, F dönüşümünün toplamsal olması gerekmemektedir. Böylece, bu tanım genelleştirilmiş türev tanımını kapsamaktadır. Dhara ve Ali (2013) ise g dönüşümü ile belirlenen çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev tanımını vermişlerdir. Burada da, g dönüşümünün türev olması gerekmemektedir. Bu tanım da çarpımsal genelleştirilmiş türev tanımını kapsamaktadır. Türev konusu üzerindeki bu genellemeler bir halkanın değişmeliliği konusunda yapılan incelemelerde alınan koşulları da aynı şekilde etkilemiştir. İlk olarak Ashraf ve Rehman (2001), d türev, $I \neq (0)$ sol ideal ve $Z(R)$ halkanın merkezi olmak üzere, bir asal halkanın her $x, y \in I$ için $d(xy) \pm xy \in Z(R)$ koşulu altında değişmeli olduğunu ispatlamışlardır. Bu sonuç F bir f dönüşümü ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev kullanılarak Dhara ve Ali (2013) tarafından şu şekilde genelleştirilmiştir: R yarıasal halka, $I \neq (0)$ onun bir sol ideali olmak üzere, her $x, y \in I$ için $F(xy) \pm xy \in Z(R)$ ise $I[f(x), x] = (0)$ olur. Bu koşul temel alınarak bir H çarpımsal sol merkezleyen yardımıyla ele alınan koşullar ve bulunan sonuçlar bu tezin ilk kısmını oluşturmaktadır. Bu araştırmalardan birisi şu şekilde ifade edilebilir: R bir yarıasal halka, F bir f dönüşümü ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev, H bir çarpımsal sol merkezleyen olmak üzere, her $x, y \in R$ için $F(xy) \pm H(xy) \in Z(R)$ ise $[f(x), x] = (0)$ olur.

Bu tezin iki bölümünü oluşturan ikinci kısmında ise öncelikle yarıasallığın kaynağı olarak isimlendirilen ve S_R ile belirtilen yeni bir küme tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra, S_R kümesi kullanılarak $|S_R|$-indirgenmiş halka, $|S_R|$-bölge, $|S_R|$-bölümlü halka, $|S_R|$-asal halka ve $|S_R|$-yarıasal halka olarak adlandırılan yeni yapılar tanımlanmış ve her birinin sırasıyla indirgenmiş halka, bölge, bölümlü halka, asal halka ve yarıasal halkanın daha geneli olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu yapılar üzerinde yapılan çalışmaların bir kısmı temel alınarak bu yeni yapılara uygulanabilirliği araştırılmış ve bundan sonraki çalışmalarda temel olabilecek bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak da Herstein (1970) tarafından Lie çarpım üzerinde elde edilmiş sonuçların $|S_R|$-yarıasal halka için bir genelleştirmesi verilmiştir.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. Boş olmayan bir G kümesi üzerinde "$*$" ile gösterilen bir ikili işlem tanımlansın. Buna göre, her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (birleşme özelliği) eşitliği sağlanıyorsa, G kümesine bir ***yarıgrup*** denir.

Tanım 2.2. $(G,*)$ bir yarıgrup, A bir altkümesi olsun. Buna göre, her $a \in A, x \in G$ için $a * x,\ x * a \in A$ ise A kümesine G yarıgrubunun ***yarıgrup ideali*** denir.

Tanım 2.3. G kümesi "$*$" ikili işlemi ile bir yarıgrup olsun. Buna göre,

i. Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak biçimde $e \in G$ var

ii. Her $a \in G$ için $a * (a^{-1}) = (a^{-1}) * a = e$ olacak biçimde $a^{-1} \in G$ var

koşulları sağlanıyorsa, G kümesine bir ***grup*** denir ve $(G,*)$ ile gösterilir.

Üstelik, her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ eşitliği sağlanıyorsa G grubuna ***değişmeli grup*** denir.

Tanım 2.4. $(G,*)$ bir grup, A onun boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer A kümesi de G grubu üzerinde tanımlanan işleme göre bir grup ise, A kümesine G grubunun ***altgrubu*** denir.

Tanım 2.5. Boş olmayan bir R kümesi üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" ile gösterilen ikili işlemler tanımlansın. Buna göre,

i. $(R, +)$ bir değişmeli grup,

ii. Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (birleşme özelliği)

iii. Her $a, b, c \in R$ için

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
(dağılma özelliği)

koşulları sağlanıyorsa, R kümesine bir ***halka*** denir ve $(R, +, \cdot)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. Buna göre,

i. Her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ eşitliği sağlanıyorsa R halkasına ***değişmeli halka***,

ii. Her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa, R halkasına ***birimli halka*** denir.

Gösterim 2.7. $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere, $a \cdot b = ab$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.8. R bir halka ve A boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer A kümesi R halkasındaki işlemlere göre bir halka ise, A kümesine R halkasının bir ***althalkası*** denir.

Tanım 2.9. R birimli bir halka ve $a \in R$ olsun.

i. Eğer $ca = 1_R$ olacak şekilde bir $c \in R$ varsa a elemanına ***sol tersinir eleman***, c elemanına da a elemanının ***sol tersi*** denir.

ii. Eğer $ab = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa a elemanına ***sağ tersinir eleman***, b elemanına da a elemanının ***sağ tersi*** denir.

iii. Eğer bir $a \in R$ elemanı hem sol tersinir hem de sağ tersinir ise a elemanına ***tersinir eleman*** denir.

Tanım 2.10. R bir halka olsun. Sıfırdan farklı bir $a \in R$ için, $ab = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ var ise a elemanına ***sol sıfır bölen*** denir. Eğer, $ca = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $c \in R$ var ise a elemanına ***sağ sıfır bölen*** denir. Eğer, a elemanı hem sağ hem de sol sıfır bölen ise a elemanına ***sıfır bölen*** denir.

Tanım 2.11. Sıfır bölensiz olan R halkasına ***bölge***, birimli ($1_R \neq 0_R$) ve değişmeli olan R bölgesine ise ***tamlık bölgesi*** denir.

Birimli ($1_D \neq 0_D$) ve sıfırdan farklı her elemanı tersinir olan D halkasına ***bölümlü halka***, değişmeli bölümlü halkaya ise ***cisim*** denir.

Önerme 2.12. Her sonlu tamlık bölgesi cisimdir.

Tanım 2.13. R bir halka ve S onun boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer her $a, b \in S$ için $ab \in S$ oluyorsa, S kümesine ***çarpımsal küme*** denir.

Tanım 2.14. R bir halka ve I onun boş olmayan bir toplamsal altgrubu olsun. Buna göre,

$$IR = \{\textstyle\sum_{sonlu} a_i r_i \mid a_i \in I, r_i \in R\} \subset I$$

ise, I kümesine R halkasının ***sağ ideali***,

$$RI = \{\textstyle\sum_{sonlu} r_i a_i \mid a_i \in I, r_i \in R\} \subset I$$

ise, I kümesine R halkasının ***sol ideali*** denir. I kümesi R halkasının hem sağ hem de sol ideali ise I kümesine R halkasının bir ***ideali*** denir.

Tanım 2.15. R bir halka olmak üzere

$$Z(R) = \{a \in R \mid xa = ax, \forall x \in R\}$$

kümesine halkanın ***merkezi*** denir. Ayrıca A, R halkasının boş olmayan bir altkümesi olmak üzere

$$C_R(A) = \{a \in R \mid xa = ax, \forall x \in A\}$$

kümesine A kümesinin R halkasındaki ***merkezleştiricisi*** denir. Özel olarak, $A = R$ olması durumunda $C_R(R) = Z(R)$ olur.

Eğer $A = \{x\}$ ise $C_R(A) = C(x)$ ile gösterilecektir.

Uyarı 2.16. $\mathrm{C_R}(A)$ kümesi, R halkasının bir althalkasıdır.

Tanım 2.17. R bir halka, X onun bir altkümesi ve X kümesini kapsayan R halkasının bütün ideallerinin ailesi $\{A_i | i \in \Lambda\}$ olsun. Buna göre

- **i.** $\bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ idealine X ile ***üretilen ideal*** denir ve (X) ile gösterilir.
- **ii.** Eğer $X = \{a\}$ ise $(X) = (a)$ idealine ***esas ideal*** denir.

Önerme 2.18. R bir halka, $a \in R$ ve $X \subset R$ olsun. Buna göre

- **i.** $(a) = \{ra + as + na + \sum_{i=1}^{m} r_i a s_i \mid r, s, r_i, s_i \in R, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir.
- **ii.** Eğer R birimli ve $a \in Z(R)$ ise $Ra = (a) = aR$ dır.

Uyarı 2.19. R bir halka ve A ve B onun iki ideali olmak üzere,

$$AB = \{\textstyle\sum_{sonlu} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B\}$$

kümesi de R halkasının bir ideali olur.

Tanım 2.20. R bir halka, $P \neq R$ olacak şekildeki P onun bir ideali olsun. A ve B, R halkasının iki ideali olmak üzere

$$AB \subseteq P \text{ olduğunda } A \subseteq P \text{ veya } B \subseteq P$$

oluyorsa P idealine R halkasının ***asal ideali*** denir.

Önerme 2.21. R bir halka ve P onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir:

- **i.** P asal idealdir.
- **ii.** Her $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
- **iii.** Her $a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
- **iv.** U ve V, R halkasının sol (sağ) idealleri olmak üzere

$$UV \subseteq P \text{ ise } U \subseteq P \text{ veya } V \subseteq P \text{ dir.}$$

Önerme 2.22. R bir halka, P onun bir ideali ve $P \neq R$ olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

$ab \in P$ olduğunda $a \in P$ veya $b \in P$ (*)

oluyorsa P bir asal idealdir.

Tersine, R değişmeli ve P onun bir asal ideali ise P kümesi (*) koşulunu sağlar.

Tanım 2.23. R halkasının (0) ideali asal ideal ise halkaya ***asal halka*** denir.

Önerme 2.24. R halkası bir asal halkadır ancak ve ancak $a, b \in R$ için, $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Tanım 2.25. R bir halka ve M bir altkümesi olsun. Buna göre, $a, b \in M$ için $axb \in M$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa M kümesine bir ***m-sistem*** denir.

Tanım 2.26. R bir halka ve A onun bir ideali olsun. Buna göre

$$\beta(A) = \{r \in R \mid \forall \text{ m-sistem } M \text{ için } r \in M \Rightarrow M \cap A \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A idealinin ***asal radikali*** denir.

Tanım 2.27. Bir R halkasının sıfır idealinin asal radikaline ***R halkasının asal radikali*** denir. Yani

$$\beta(0) = \{r \in R \mid \forall \text{ m-sistem } M \text{ için } r \in M \Rightarrow 0 \in M\}$$

şeklinde yazılır. $\beta(0)$ asal radikali, $\beta(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.28. R bir halka ve Q onun bir ideali olsun. R halkasının herhangi bir A ideali için $A^2 \subseteq Q$ olduğunda $A \subseteq Q$ oluyorsa Q idealine R halkasının bir ***yarıasal ideali*** denir.

Önerme 2.29. R bir halka ve Q onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir:

i. Q yarıasal idealdir.

ii. $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

iii. $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

iv. U, R halkasının sol (sağ) ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

Önerme 2.30. R bir halka, Q onun bir yarıasal ideali ve $\alpha \in Z(R)$ olsun. O zaman, bir k pozitif tamsayısı için $\alpha^k \in Q$ ise $\alpha \in Q$ dur.

Teorem 2.31. (McCoy N. H., 1964, *Teorem 4.20*) $\beta(R)$, R halkasının asal radikali olsun. Buna göre,

i. $\beta(R)$, R halkasındaki tüm asal ideallerin kesişimidir.

ii. $\beta(R)$, R halkasındaki her yarıasal ideal tarafından kapsanılan bir yarıasal idealdir.

Tanım 2.32. R bir halka olsun. Buna göre

i. Her $a \in R$ için, $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı varsa, böyle pozitif tamsayıların en küçüğüne halkanın ***karakteristiği*** denir ve $charR = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n tamsayısı yoksa R halkasının ***karakteristiği sıfırdır*** denir.

ii. $a \in R$ ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $na = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkasına ***n-burulmasız (torsion free)*** halka denir.

Uyarı 2.33. R bir 2-burulmasız halka ise R halkasının karakteristiği ikiden farklıdır. Fakat karakteristiği ikiden farklı olan bir halka, bir asal halka olduğunda 2-burulmasız bir halka olur. Yani, R bir asal halka olduğunda, $charR \neq 2$ olması ile 2-burulmasız olması aynı anlama gelir.

Tanım 2.34. R bir halka olsun. Buna göre

- **i.** $0 \neq a \in R$ için $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı varsa a elemanına ***nilpotent eleman*** denir. Eğer, $a^n = 0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n pozitif tamsayısına a elemanının ***nilpotentlik indeksi*** denir.
- **ii.** A, R halkasının bir ideali olsun. Eğer $A^n = (0)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa A idealine ***nilpotent ideal*** denir.

Tanım 2.35. Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya ***yarıasal halka*** denir.

Önerme 2.36. Bir R halkası yarıasal halkadır ancak ve ancak $a \in R$ için $aRa = (0)$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.37. R bir halka ve $e \in R$ olmak üzere, $e^2 = e$ ise e elamanına ***idempotent eleman*** denir.

Tanım 2.38. Eğer R halkasının sıfırdan farklı nilpotent elemanı yok ise bu halkaya ***indirgenmiş halka*** denir.

Uyarı 2.39. Bir indirgenmiş halkada bulunan her idempotent eleman halkanın merkezinde kapsanır.

Tanım 2.40. A, R halkasının bir altkümesi olsun. Buna göre

$Ann_r(A) = \{y \in R \mid xy = 0, \forall x \in A\}$ ve $Ann_l(A) = \{y \in R \mid yx = 0, \forall x \in A\}$

kümelerine sırasıyla A kümesinin ***sağ*** ve ***sol sıfırlayanlarının kümesi*** denir.

Tanım 2.41. (Aydın N.ve Kandamar H., 2015, *Tanım 3.5.1*) $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \triangle, *)$ iki halka olsun. $f: R \to S$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) \triangle f(b)$$
$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

koşullarını sağlıyor ise f fonksiyonuna ***halka homomorfizması*** denir.

Tanım 2.42. (Aydın N.ve Kandamar H., 2015, *Tanım 3.5.2*) f bir halka homomorfizması olsun. Buna göre

- **i.** f birebir fonksiyon ise f homomorfizmasına ***halka monomorfizması***,
- **ii.** f örten fonksiyon ise f homomorfizmasına ***halka epimorfizması***,
- **iii.** f birebir ve örten fonksiyon ise f homomorfizmasına ***halka izomorfizması*** denir.

Eğer, $f: R \to S$ halka izomorfizması ise R halkası ile S halkası ***izomorftur*** denir ve bu durum $R \cong S$ şeklinde gösterilir. Eğer $f: R \to R$ bir halka izomorfizması ise f fonksiyonuna R halkasının ***otomorfizması*** denir.

Tanım 2.43. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olsun.

$$Kerf = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye f homomorfizmasının ***çekirdeği*** denir.

Tanım 2.44. R bir halka ve I onun bir ideali olsun. Buna göre, $R/I = \{r\ + I|r \in R\}$ kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$
$$(a + I)(b + I) = (ab) + I$$

biçiminde tanımlanan işlemlere göre bir halkadır. Bu halkaya ***modulo I idealine göre kalan sınıf halkası*** denir.

Teorem 2.45. R bir halka, I onun bir ideali olsun. Buna göre

$$\pi : R \to R/I\ , \qquad \pi(r) = r + I$$

ile tanımlanan dönüşüm bir halka epimorfizmasıdır ve $Ker\, \pi = I$ dır.

Tanım 2.46. Yukarıda tanımlanan π dönüşümüne ***doğal halka homomorfizması*** denir.

Teorem 2.47. (*III. İzomorfizma Teoremi*) I ve J, R halkasının idealleri olsun. Buna göre, $I \subset J$ ise J/I, R/I halkasının bir idealidir ve $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ olur.

Önerme 2.48. R bir halka ve I onun bir ideali olsun. Buna göre I ideali bir asal idealdir ancak ve ancak R/I halkası bir asal halkadır.

Tanım 2.49. $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ bir halkalar ailesi olmak üzere, $S = \{a \mid a(i) \in S_i,\ \forall i \in \Lambda\}$ kümesi

$$(a + b)(i) = a(i) + b(i), \qquad (a.b)(i) = a(i).b(i)$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile bir halkadır. Bu S halkasına S_i halkalarının ***tam direkt toplamı*** denir.

Uyarı 2.50. $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ halkalarının tam direkt toplamı S olsun. Buma göre her bir i ∈ Λ için $\theta_i: S \to S_i, \theta_i(a) = a(i)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmadır.

Tanım 2.51. T, $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ halkalarının tam direkt toplamı olan S halkasının bir althalkası ve her bir i ∈ Λ için $\theta_i: S \to S_i$ dönüşümü *Uyarı 2.50* ile verilen epimorfizma olsun. Eğer her i ∈ Λ için $\theta_i(T) = S_i$ ise T althalkasına S_i halkalarının bir ***altdirekt toplamı*** denir.

Tanım 2.52. Eğer R halkası S_i halkalarının altdirekt toplamı olan T althalkasına izomorf ise T altdirekt toplamına R halkasının bir ***gösterilişi*** denir.

Teorem 2.53. (McCoy N. H., 1964, *Teorem 4.23*) R bir halka, I onun bir ideali, $\beta(R)$ ve $\beta(I)$ sırasıyla, R ve I halkalarının asal radikalleri olsun. Buna göre, $\beta(I) = I \cap \beta(R)$ olur.

Teorem 2.54. (McCoy N. H., 1964, *Teorem 4.29*) $\beta(R)$, R halkasının asal radikali olmak üzere, $\beta\big(M_n(R)\big) = M_n\big(\beta(R)\big)$ dir.

Teorem 2.55. (McCoy N. H., 1964, *Teorem 3.6*) R ve S_i, i $\in \Lambda$ herhangi halkalar olsun. Buna göre, R halkasının S_i halkalarının altdirekt toplamı olarak bir gösterilişi vardır ancak ve ancak her $i \in \Lambda$ için $\varphi_i : R \to S_i$ örten homomorfizması var ve keyfi bir $0 \neq r \in R$ alındığında en az bir $i \in \Lambda$ için $\varphi_i(r) \neq 0$ dır.

Teorem 2.56. (McCoy N. H., 1964, *Teorem 3.9*) R ve S_i, i $\in \Lambda$ herhangi halkalar olsun. Buna göre, R halkasının S_i halkalarının altdirekt toplamı olarak bir gösterilişi vardır ancak ve ancak her bir $i \in \Lambda$ için $R/I_i \cong S_i$ olacak şekilde R halkasının I_i idealleri vardır. Üstelik, $\bigcap_{i\in\Lambda} I_i = (0)$ dır.

Tanım 2.57. (Sharp R. Y., 2000, *Tanım 3.57*) R birimli, değişmeli bir halka, I, J ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olmak üzere, $I_1, \ldots, I_n$, R halkasının idealleri olsun. Eğer,

i. $I + J = R$ ise I ve J ideallerine ***eşmaksimal***,

ii. $1 \leq i, j \leq n$ ve $i \neq j$ olmak üzere, $I_i + I_j = R$ ise $\{I_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ailesindeki ideallere ***ikili eşmaksimal***

denir.

Lemma 2.58 (Sharp R. Y., 2000, *Lemma 3.58*) R birimli ve değişmeli bir halka, I, J onun eşmaksimal idealleri olsun. Buna göre, $I \cap J = IJ$ olur.

Önerme 2.59 (Sharp R. Y., 2000, *Önerme 3.59*) R birimli, değişmeli bir halka ve $\{I_i \mid 1 \leq i \leq n \; ve \; n \geq 2\}$ kümesi R halkasının ikili eşmaksimal ideallerinin bir ailesi olsun. Buna göre,

i. $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n-1}$ ve I_n idealleri eşmaksimaldir.

ii. $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = I_1 I_2 \ldots I_n$ dir.

Teorem 2.60. (Hungerford, 1974, III, *Teorem 4.2*) R değişmeli bir halka ve S onun çarpımsal bir altkümesi olsun. $R \times S$ kümesi üzerinde

$$(r, s) \sim (r', s') \iff s_1(rs' - r's) = 0, \exists s_1 \in S \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 2.61 (Hungerford T. W., 1974, III, *Teorem 4.3*) R değişmeli bir halka ve S onun çarpımsal bir altkümesi olsun. Buna göre, yukarıda verilen denklik bağıntısı ile oluşan denklik sınıflarının kümesi olan $S^{-1}R = \left\{\frac{r}{s} \,\middle|\, r \in R, s \in S\right\}$ kümesi

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs'+r's}{ss'}$$
$$\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r'}{s'}\right) = \frac{rr'}{ss'} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan işlemlere göre birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.62 (Hungerford T. W., 1974, III, *sf.144*) Yukarıda verilen $S^{-1}R$ halkasına R halkasının S ile belirlenen ***kesirler halkası*** denir.

Lemma 2.63 (Hungerford T. W., 1974, III, *Lemma 4.9*) R birimli, değişmeli bir halka, S onun çarpımsal altkümesi olsun.

i. $S^{-1}R$ halkasındaki her ideal, $I \subset R$ bir ideal olmak üzere, $S^{-1}I$ biçimindedir.

ii. $P \subset R$ bir asal ideal ve $S \cap P = \emptyset$ ise $S^{-1}P$, $S^{-1}R$ halkasının bir asal idealidir.

Tanım 2.64 (Hungerford T. W., 1974, III, *sf.147*) R birimli, değişmeli bir halka ve P onun bir asal ideali olsun. Buna göre, *Uyarı 5.3.1* ile $S = R - P$ kümesi bir çarpımsal küme olur. Bu durumda, $S^{-1}R$ kesirler halkasına P asal idealinin R halkasındaki ***yerelleştirmesi*** denir ve R_P ile gösterilir. I, R halkasının bir ideali ise, R_P halkasının $S^{-1}I$ ideali ise I_P ile gösterilir.

Tanım 2.65. R halkası üzerinde

$$\begin{aligned} [,]: \quad R \times R &\rightarrow \quad R \\ (x, y) &\rightarrow \quad [x, y] \end{aligned}$$

olacak biçimde tanımlanan ikili işlem

i. $[x, x] = 0$

ii. $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$ ve $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

iii. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi Özdeşliği)

koşullarını sağlıyorsa bu $[,]$ ikili işlemine bir ***Lie çarpım*** denir

$x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx$ şeklinde tanımlanan işlem de bir Lie çarpım olur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $[x, y] = -[y, x] = [y, -x] = [-y, x]$

ii. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$

iii. $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$

Uyarı 2.66. R bir halka, U ve V onun altkümeleri olsun. Buna göre, $u \in U$, $v \in V$ olmak üzere, $[u, v]$ elemanları tarafından üretilen toplamsal altgrup $[U, V]$ ile gösterilir. Yani

$$[U, V] = \{\textstyle\sum_{sonlu} [u_i, v_i] \mid u_i \in U, v_i \in V\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.67. R bir halka ve U onun boş olmayan bir toplamsal altgrubu olsun. Buna göre, $[U, R] \subset U$ ise U kümesine R halkasının bir ***Lie ideali*** denir.

Tanım 2.68. R bir halka ve $d : R \to R$ bir dönüşüm olsun. Buna göre, her $x, y \in R$ için

i. $d(x + y) = d(x) + d(y)$

ii. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanıyorsa, d dönüşümüne R üzerinde bir ***türev*** denir.

Tanım 2.69. R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $I_a(x) = [a, x]$ şeklinde tanımlanan dönüşüme ***a ile belirlenen iç türev*** denir.

Tanım 2.70. R bir halka ve $f : R \to R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

olacak biçimde bir $d : R \to R$ türevi var ise f dönüşümüne d türevi ile belirlenen bir ***genelleştirilmiş türev*** denir.

Tanım 2.71. R bir halka ve $D: R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

eşitliği sağlanıyor ise D dönüşümüne bir ***çarpımsal türev*** denir.

Tanım 2.72. R bir halka ve $F : R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$F(xy) = F(x)y + xd(y)$$

olacak biçimde bir $d : R \to R$ türevi var ise F dönüşümüne d türevi ile belirlenen bir ***çarpımsal genelleştirilmiş türev*** denir.

Tanım 2.73. R bir halka ve $F : R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$F(xy) = F(x)y + xg(y)$$

olacak biçimde bir $g : R \to R$ dönüşümü var ise F dönüşümüne g ile belirlenen bir ***çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev*** denir.

Tanım 2.74. R bir halka ve $H : R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$H(xy) = H(x)y$$

eşitliği sağlanıyor ise H dönüşümüne ***çarpımsal sol merkezleyen*** denir.

BÖLÜM 3
YARIASAL HALKALARDA ÇARPIMSAL (GENELLEŞTİRİLMİŞ)-TÜREVLER

Ashraf ve Rehman (2001) yaptıkları çalışmada, R bir asal halka, I onun bir ideali ve d, R üzerinde bir türev olmak üzere her $x, y \in I$ için $d(xy) \pm xy \in Z(R)$ ise R halkasının değişmeli olduğunu ispatlamışlardır. Türev üzerinde bunun gibi koşullar kullanılarak yapılan çeşitli çalışmalar mevcuttur. Hem bu koşullar üzerinde hem de türev tanımı üzerinde çeşitli genelleştirmeler yapılarak halkanın değişmeliliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Daif ve Bell (1992), R bir yarıasal halka, I onun sıfırdan farklı bir ideali ve d, R üzerinde bir türev olmak üzere her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = \pm[x, y]$ koşulu, Quadri ve ark. (2003), R bir asal halka, I onun sıfırdan farklı bir ideali ve d, F sırasıyla R üzerinde bir türev ve d ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olmak üzere her $x, y \in I$ için $F([x, y]) = \pm[x, y]$ koşulu, Ashraf ve ark. (2007), R bir asal halka, I onun sıfırdan farklı bir ideali ve d, F sırasıyla R üzerinde bir türev ve d ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olmak üzere her $x, y \in I$ için

- $F(xy) \pm xy \in Z(R)$,
- $F(xy) \pm yx \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \pm xy \in Z(R)$

koşulları, Dhara (2010), R bir asal halka, I onun sıfırdan farklı bir sol ideali, F dönüşümü d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev ve $d(Z(R)) \neq 0$ olmak üzere her $x, y \in I$ için $F([x, y]) \pm [x, y] \in Z(R)$ koşulu, Ali ve ark. (2013), R bir yarıasal halka, I onun sıfırdan farklı bir sol ideali ve F, d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olmak üzere her $x, y \in I$ için

- $F(xy) \in Z(R)$,
- $F[x, y] = 0$,
- $F(xy) \pm yx \in Z(R)$,
- $F(xy) \pm [x, y] \in Z(R)$

koşulları, Dhara ve Ali (2013) ise R bir yarıasal halka, I onun sıfırdan farklı bir sol ideali ve F bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olmak üzere her $x, y \in I$ için

- $F(xy) \pm xy = 0$,
- $F(xy) \pm yx = 0$,
- $F(x)F(y) \pm xy = 0$,
- $F(x)F(y) \pm yx = 0$,

- $F(xy) \pm xy \in Z(R)$,
- $F(xy) \pm yx \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \pm xy \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \pm yx \in Z(R)$

koşulları altında halkanın değişmeliliğini incelemişlerdir.

Bu bölümde, R bir yarıasal halka, $F, f, H: R \to R$ dönüşümler, F, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve H bir çarpımsal sol merkezleyen olmak üzere, her $x, y \in R$ için

- $F(xy) \mp H(xy) = 0$,
- $F(xy) \mp H(yx) = 0$,
- $F(x)F(y) \mp H(xy) = 0$,
- $F(xy) \mp H(xy) \in Z(R)$,
- $F(xy) \mp H(yx) \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \mp H(xy) \in Z(R)$

koşulları altında halkanın değişmeliliği incelenmiştir.

Lemma 3.1. (Posner, 1957, *Lemma 3*) R bir asal halka ve $d: R \to R$ bir türev olsun. Eğer, her $a \in R$ için $[d(a), a] = 0$ ise R halkası değişmelidir veya $d = 0$ dır.

Lemma 3.2. R bir yarıasal halka olsun. Eğer $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ise f bir çarpımsal türevdir. Yani, her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xf(y)$$

dir.

İspat. F bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olduğundan,

$$F(x(yz)) = F(x)yz + xf(yz), \qquad \forall x, y, z \in R$$

ve

$$F\big((xy)z\big) = F(x)yz + xf(y)z + xyf(z), \qquad \forall x, y, z \in R$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten,

$$xf(yz) = xf(y)z + xyf(z), \qquad \forall x, y, z \in R$$

elde edilir. Buradan her $y, z \in R$ için $R(f(yz) - f(y)z - yf(z)) = (0)$ olur. R halkasının yarıasallığı kullanılırsa her $y, z \in R$ için $f(yz) = f(y)z + yf(z)$ elde edilmiş olur.

Lemma 3.3. R bir yarıasal halka ve $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $F(xy) = 0$ ise $F = 0$ dır.

İspat. Her $x, y \in R$ için $F(xy) = 0$ olsun. Burada x yerine xz, $z \in R$ alınırsa $F(xzy) = 0$ olur. F bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olduğundan

$$F(xz)y + xzf(y) = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

yazılır. Burada hipotez kullanılırsa

$$xzf(y) = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

elde edilir. R halkasının yarıasallığından her $y, z \in R$ için $zf(y) = 0$ olur. R halkasının yarıasallığı tekrar kullanılırsa $f = 0$ bulunur. F dönüşümünün tanımından her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$ olur. Hipotez kullanılarak

$$F(x)y = 0, \qquad \forall x, y \in R$$

elde edilir. R halkasının yarıasallığı kullanılırsa $F = 0$ bulunur.

Lemma 3.4. R bir yarıasal halka ve $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olsun. Bu durumda

$$F(xy) \in Z(R), \forall x, y \in R \ \Rightarrow [f(x), x] = 0, \forall x \in R$$

olur.

İspat. Her $x, y \in R$ için $F(xy) \in Z(R)$ olsun. Burada y yerine yz, $z \in R$ alınırsa,

$$F(xyz) \in Z(R), \qquad \forall x, y, z \in R$$

olur. F bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olduğundan,

$$F(xy)z + xyf(z) \in Z(R), \qquad \forall x, y, z \in R$$

bulunur. Buradan

$$[F(xy)z + xyf(z), z] = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

yazılabilir. Hipotez ve komütatör özellikleri kullanılarak

$$[xyf(z), z] = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

bulunur. Burada x yerine rx, $r \in R$ alınır ve komütatör özellikleri kullanılırsa

$$[r, z]xyf(z) = 0, \qquad \forall x, y, z, r \in R$$

elde edilir. Burada da x yerine $f(z)x$ alınırsa

$$[r, z]f(z)xyf(z) = 0, \qquad \forall x, y, z, r \in R$$

olur. Bu eşitlikte y yerine $[r, z]$ alınır ve R halkasının yarıasallığı kullanılırsa

$$[x, y]f(y) = 0, \qquad \forall x, y \in R$$

bulunur. Burada x yerine xy, $y \in R$ alınırsa

$$[x, y]yf(y) = 0, \qquad \forall x, y \in R$$

olur. O zaman bulunan son iki eşitlik yardımıyla

$$[x, y][f(y), y] = 0, \qquad \forall x, y \in R$$

yazılabilir. Burada x yerine $f(y)x$ alınır, komütatör özellikleri ve R halkasının yarıasallığı kullanılırsa, her $y \in R$ için $[f(y), y] = 0$ elde edilmiş olur.

Lemma 3.5. R bir halka, $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Bu durumda, her $x \in R$ için

$$G(x) = F(x) \mp H(x)$$

şeklinde tanımlanan $G: R \to R$ dönüşümü f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türevdir.

İspat. G dönüşümünün tanımından, her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} G(xy) &= F(xy) \mp H(xy) \\ &= F(x)y + xf(y) \mp H(x)y \\ &= (F(x) \mp H(x))y + xf(y) \\ &= G(x)y + xf(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $G: R \to R$ dönüşümü f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olur.

Teorem 3.6. R bir yarıasal halka, $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Bu durumda

$$F(xy) \mp H(xy) = 0\,, \forall x, y \in R \ \Rightarrow f = 0$$

olur. Üstelik

$$F(xy) = F(x)y \ \ , \forall x, y \in R \text{ ve } F = \pm H$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. Her $x, y \in R$ için $F(xy) - H(xy) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $x \in R$ için $G(x) = F(x) - H(x)$ olmak üzere her $x, y \in R$ için $G(xy) = 0$ demektir. *Lemma 3.5* ve *Lemma 3.3* kullanıldığında $G = 0$ elde edilir. Böylece

$$F = H$$

bulunur. Bu eşitlik F dönüşümünün tanımı ile birlikte hipotezde kullanılırsa

$$0 = F(xy) - H(xy) = F(x)y + xf(y) - H(x)y = xf(y), \qquad \forall x, y \in R$$

elde edilir. R bir yarıasal halka olduğundan $f = 0$ elde edilir. Böylece her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$ elde edilir. Her $x, y \in R$ için $F(xy) + H(xy) = 0$ hipotezi kabul edildiğinde de benzer ispat yöntemiyle $f = 0$, her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$, $F = -H$ sonuçlarına ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7. R bir yarıasal halka, $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Bu durumda

$$F(xy) \mp H(yx) = 0 \ \ , \forall x, y \in R \ \Rightarrow f = 0$$

olur. Üstelik

$$F(xy) = F(x)y \ \ , \forall x, y \in R \text{ ve } [F(x), x] = 0, \forall x \in R$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. Her $x, y \in R$ için

$$F(xy) - H(yx) = 0 \tag{3.1}$$

olsun. Burada y yerine yz, $z \in R$ alınır ve F dönüşümünün bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olduğu kullanılırsa

$$\big(F(xy) - H(yx)\big)z + xyf(z) + H(y)[x,z] = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.1) kullanılırsa

$$xyf(z) + H(y)[x,z] = 0,\ \forall x, y, z \in R \tag{3.2}$$

bulunur. (3.2) eşitliğinde z yerine x alınırsa her $x, y \in R$ için $xyf(x) = 0$ bulunur. R halkasının yarıasallığı kullanılarak her $x \in R$ için $xf(x) = f(x)x = 0$ elde edilir. Böylece

$$[f(x), x] = 0,\ \forall x \in R \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinde x yerine xr, $r \in R$ alınırsa, her $x, y, z, r \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= xryf(z) + H(y)[xr, z] \\ &= xryf(z) + H(y)x[r,z] + H(y)[x,z]r + xyf(z)r - xyf(z)r \\ &= xryf(z) + H(y)x[r,z] - xyf(z)r + (xyf(z) + H(y)[x,z])r \end{aligned}$$

olur. Burada (3.2) eşitliği kullanılırsa

$$x[r, yf(z)] + H(y)x[r,z] = 0, \qquad \forall x, y, z, r \in R$$

elde edilir. Bu eşitlikte r yerine $f(z)$ alınır ve (3.3) eşitliği kullanılırsa

$$x[f(z), y]f(z) = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

bulunur. R halkasının yarıasallığından

$$[f(z), y]f(z) = 0,\ \forall y, z \in R \tag{3.4}$$

olur. (3.4) eşitliğinde y yerine yt, $t \in R$ alınır ve tekrar (3.4) kullanılırsa

$$[f(z), y]tf(z) = 0, \qquad \forall y, z, t \in R$$

bulunur. Buradan ise

$$[f(z), y]t[f(z), y] = 0, \qquad \forall y, z, t \in R$$

eşitliği yazılabilir. R halkası yarıasal halka olduğundan

$$[f(z), y] = 0, \ \forall y, z \in R \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinde x yerine $f(x)$ alınır ve (3.5) eşitliği kullanılırsa her $x, y, z \in R$ için $f(x)yf(z) = 0$ bulunur. R halkasının yarıasallığından

$$f = 0 \tag{3.6}$$

bulunur. F dönüşümünün tanımından

$$F(xy) = F(x)y, \ \ \forall x, y \in R \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.6) eşitliği (3.2) eşitliğine uygulanırsa

$$H(y)[x, z] = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

bulunur. Bu eşitlikte y yerine yz alınır ve sırasıyla (3.1) ve (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$F(z)y[x, z] = 0, \forall x, y, z \in R \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte x yerine $F(z)$ alınırsa

$$F(z)y[F(z), z] = 0, \qquad \forall y, z \in R$$

bulunur. Böylece her $y, z \in R$ için $[F(z), z]y[F(z), z] = (F(z)z - zF(z))y[F(z), z] = 0$ yazılabilir. R bir yarıasal halka olduğundan her $z \in R$ için $[F(z), z] = 0$ olur. Benzer şekilde her $x, y \in R$ için $F(xy) + H(yx) = 0$ koşulu altında da aynı sonuçlar elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.8. R bir yarıasal halka, $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Bu durumda

$$F(x)F(y) \mp H(xy) = 0, \forall x, y \in R \ \Rightarrow f = 0$$

olur. Üstelik

$$F(xy) = F(x)y \ \ , \forall x, y \in R \text{ ve } [F(x), x] = 0, \forall x \in R$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. Her $x, y \in R$ için

$$F(x)F(y) - H(xy) = 0 \tag{3.9}$$

olsun. Burada y yerine yz, $z \in R$ alınır ve F dönüşümünün tanımı kullanılırsa

$$(F(x)F(y) - H(xy))z + F(x)yf(z) = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

bulunur. Bu eşitlikte (3.9) eşitliği kullanılırsa

$$F(x)yf(z) = 0,\ \forall x, y, z \in R \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir. (3.10) eşitliğinde x yerine ux, $u \in R$ alınır ve F dönüşümünün tanımı ile (3.10) eşitliği kullanılırsa

$$uf(x)yf(z) = 0, \qquad \forall u, x, y, z \in R$$

bulunur. Bu eşitlikte y yerine yu alınırsa

$$uf(x)yuf(z) = 0, \qquad \forall u, x, y, z \in R$$

olur. Böylece

$$uf(x)Ruf(x) = (0), \qquad \forall u, x \in R$$

eşitliği elde edilir. R halkasının yarıasallığı kullanılırsa

$$uf(x) = 0, \qquad \forall u, x \in R$$

bulunur. Bu durumda $Rf(x) = (0)$ olur. R halkası yarıasal halka olduğundan $f = 0$ dır. Böylece, her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$ bulunur. (3.9) eşitliğinde x yerine xy alınırsa

$$F(x)yF(y) - H(xy)y = 0,\ \forall x, y \in R \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.9) eşitliği sağdan y ile çarpılırsa

$$F(x)F(y)y - H(xy)y = 0,\ \forall x, y \in R \tag{3.12}$$

olur. (3.11) eşitliği (3.12) eşitliğinden çıkarıldığında ise

$$F(x)[F(y), y] = 0, \qquad \forall x, y \in R$$

bulunur. Bu eşitlikte x yerine xr, $r \in R$ alınırsa

$$F(x)r[F(y), y] = 0, \qquad \forall x, y, r \in R$$

elde edilir. Bu durumda her $x, r \in R$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$[F(x), x]r[F(x), x] = (F(x)x - xF(x))r[F(x), x] = 0$$

Burada R halkasının yarıasallığı kullanılırsa her $x, y, r \in R$ için $[F(x), x] = 0$ elde edilir. Benzer işlemler ile, her $x, y \in R$ için $F(x)F(y) + H(xy) = 0$ koşulu altında da aynı sonuçlar elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.9. R bir yarıasal halka, $F: R \rightarrow R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \rightarrow R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Bu durumda

$$F(xy) \mp H(xy) \in Z(R), \forall x, y \in R \; \Rightarrow [f(x), x] = 0, \forall x \in R$$

olur.

İspat. Her $x, y \in R$ için $F(xy) \mp H(xy) \in Z(R)$ olduğunu Kabul edelim. Buna göre, $G(x) = F(x) - H(x)$ olmak üzere her $x, y \in R$ için $G(xy) \in Z(R)$ olur. Sırasıyla *Lemma 3.5* ve *Lemma 3.4* kullanılırsa her $x \in R$ için $[f(x), x] = 0$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.10. R bir yarıasal halka, $F: R \rightarrow R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \rightarrow R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Bu durumda

$$F(xy) \mp H(yx) \in Z(R), \forall x, y \in R \; \Rightarrow [f(x), x] = 0, \forall x \in R$$

olur.

İspat. Her $x, y \in R$ için

$$F(xy) - H(yx) \in Z(R) \tag{3.13}$$

olsun. (3.13) eşitliğinde y yerine yz, $z \in R$ alınırsa

$$F(xyz) - H(yzx) \in Z(R), \qquad \forall x, y, z \in R$$

olur. F bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olduğundan

$$(F(xy) - H(yx))z + xyf(z) + H(y)[x, z] \in Z(R), \qquad \forall x, y, z \in R$$

yazılır. Burada (3.13) eşitliği kullanılırsa

$$[xyf(z), z] + [H(y)[x, z], z] = 0, \; \forall x, y, z \in R \tag{3.14}$$

bulunur. (3.14) eşitliğinde x yerine xz alınırsa

$$[xzyf(z), z] + [H(y)[x, z], z]z = 0, \; \forall x, y, z \in R \tag{3.15}$$

olur. (3.14) eşitliği sağdan z ile çarpılırsa

$$[xyf(z), z]z + [H(y)[x, z], z]z = 0, \forall x, y, z \in R \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.15) ve (3.16) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [xyf(z),z]z - [xzyf(z),z] \\ &= x[yf(z),z]z + [x,z]yf(z)z - xz[yf(z),z] - [x,z]zyf(z) \\ &= x\big[[yf(z),z],z\big] + [x,z][yf(z),z] \\ &= [x[yf(z),z],z] \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$[x[yf(z),z],z] = 0, \qquad \forall x,y,z \in R$$

bulunur. Bu eşitlikte x yerine rx, $r \in R$ alınır ve komütatör özellikleri kullanılırsa

$$[r,z]x[yf(z),z] = 0, \qquad \forall x,y,z,r \in R$$

elde edilir. Burada r yerine $yf(z)$ alınır ve R halkasının yarıasallığından her $y,z \in R$ için $[yf(z),z] = 0$ bulunur. Bu eşitlikte y yerine $f(z)y$ alınırsa her $y,z \in R$ için $[f(z),z]yf(z) = 0$ olur. Böylece her $y,z \in R$ için $[f(z),z]y[f(z),z] = 0$ eşitliği yazılabilir. Buradan da R halkasının yarıasallığı kullanılarak her $z \in R$ için $[f(z),z] = 0$ elde edilmiş olur.

Benzer ispat yöntemiyle her $x,y \in R$ için $F(xy) + H(yx) \in Z(R)$ koşulu altında da her $x \in R$ için $[f(x),x] = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.11. R bir yarıasal halka, $F: R \to R$, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Bu durumda

$$F(x)F(y) \mp H(xy) \in Z(R), \forall x,y \in R \ \Rightarrow [f(x),x] = 0, \forall x \in R$$

olur.

İspat. Her $x,y \in R$ için

$$F(x)F(y) - H(xy) \in Z(R) \tag{3.17}$$

olsun. (3.17) ifadesinde y yerine yz, $z \in R$ alınırsa

$$F(x)F(yz) - H(xyz) \in Z(R), \qquad \forall x,y,z \in R$$

olur. F dönüşümü bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev olduğundan

$$(F(x)F(y) - H(xy))z + F(x)yf(z) \in Z(R), \qquad \forall x,y,z \in R$$

bulunur. O zaman,

$$[\big(F(x)F(y) - H(xy)\big)z + F(x)yf(z),z] = 0, \quad \forall x,y,z \in R$$

eşitliği yazılabilir. Burada komütatör özellikleri ve (3.17) ifadesi kullanılırsa

$$[F(x)yf(z),z] = 0, \ \forall x,y,z \in R \tag{3.18}$$

bulunur. (3.18) eşitliğinde x yerine xz alınır ve F dönüşümünün tanımı ile (3.18) kullanılırsa

$$[xf(z)yf(z), z] = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

yazılır. Bu eşitlikte x yerine $f(z)x$ alınır ve aynı eşitlik kullanılırsa

$$[f(z), z]xf(z)yf(z) = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

elde edilir. Böylece

$$[f(z), z]x[f(z), z]y[f(z), z] = 0, \qquad \forall x, y, z \in R$$

eşitliği geçerlidir. Buradan ise her $z \in R$ için $(R[f(z), z])^3 = (0)$ yazılabilir. Bir yarıasal halkada sıfırdan farklı nilpotent sol ideal bulunmadığından her $z \in R$ için $R[f(z), z] = (0)$ bulunur. R bir yarıasal halka olduğundan her $z \in R$ için $[f(z), z] = 0$ elde edilir. Benzer ispat yöntemiyle her $x, y \in R$ için $F(x)F(y) + H(xy) \in Z(R)$ koşulu altında da aynı sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2 ile bir yarıasal halkada, f toplamsal dönüşümü ile belirlenen her $F: R \to R$ çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev bir çarpımsal genelleştirilmiş türev olur. Bu durumda çarpımsal genelleştirilmiş türev ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.12. R bir asal halka, $F: R \to R$, sıfırdan farklı d türevi ile belirlenen bir çarpımsal genelleştirilmiş türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olsun. Eğer her $x, y \in R$ için aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa R değişmelidir:

i. $F(xy) \mp H(xy) \in Z(R)$,

ii. $F(xy) \mp H(yx) \in Z(R)$,

iii. $F(x)F(y) \mp H(xy) \in Z(R)$.

İspat. *(i)*, *(ii)* ve *(iii)* için sırasıyla *Teorem 3.9*, *Teorem 3.10* ve *Teorem 3.11* kullanılarak her $x \in R$ için $[d(x), x] = 0$ elde edilir. *Lemma 3.1* ile de R değişmeli olur.

Şimdi ispatladığımız teoremlerdeki yarıasallık hipotezinin gerekli yani kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

Örnek 3.13. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını alalım. $F, f, H: R \to R$ dönüşümleri ise $\lambda \in \mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$F\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda b\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda a^2 & \lambda b^2\\ 0 & 0 & \lambda c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$H\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda a & \lambda b\\ 0 & 0 & \lambda c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Buna göre, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} R \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(0)$ olduğundan R halkası yarıasal bir halka değildir. Üstelik F, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türevdir ve her $x, y \in R$ için $H(xy)=H(x)y,\ F(xy)-H(xy)=0$ dır. Fakat burada $f(R)\neq 0$ ve $x, y \in R$ için $F(xy)\neq F(x)y$ olduğu görülür. Öyleyse *Teorem 3.6* daki yarıasallık hipotezi gereklidir.

Örnek 3.14. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere

$$R=\left\{\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$$

halkasını alalım. $F, f, H\colon R\to R$ dönüşümleri de $\lambda\in\mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$F\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda a & 0\\ 0 & 0 & \lambda c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad f\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda ab & \lambda b^2\\ 0 & 0 & -\lambda c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$H\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda^2 a & \lambda^2 b\\ 0 & 0 & \lambda^2 c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Burada da F, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türevdir ve her $x, y \in R$ için $H(xy)=H(x)y,\ F(x)F(y)-H(xy)=0$ dır. Fakat burada $f(R)\neq 0$ ve $x, y\in R$ için $F(xy)\neq F(x)y$ olduğu görülür. Öyleyse *Teorem 3.8* deki yarıasallık hipotezi zorunludur.

Örnek 3.15. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere

$$R=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ b & c & 0\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$$

halkasını alalım. $F, f, H\colon R\to R$ dönüşümleri $\lambda\in\mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$F\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ b & c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a^2 & 0 & 0\\ b+c & 0 & 0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ b & c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ b^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$H\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ b & c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ ab & c & 0\end{pmatrix}$$

Öncelikle $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} R \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=(0)$ olduğundan R halkası yarıasal bir halka değildir. Üstelik F, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türevdir ve her $x, y \in R$ için $H(xy) = H(x)y$, $F(x)F(y) - H(xy) = 0$ dır. Fakat burada $f(R) \neq 0$ ve $x, y \in R$ için $F(xy) \neq F(x)y$ olduğu görülür. Öyleyse *Teorem 3.8* deki yarıasallık hipotezi gereklidir.

BÖLÜM 4
HALKALARDA YARIASALLIĞIN KAYNAĞI

4.1. Yarıasallığın Kaynağı Kavramı ve Bazı Temel Özellikleri

Bu bölümde yarıasal halka yapısından esinlenerek yarıasallığın kaynağı olarak ifade edilen bir küme tanımlanmış ve bu çalışmanın gelecek kısımlarında yararlı olabilecek bazı temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.1.1. R bir halka ve A onun boş olmayan bir altkümesi olsun. Buna göre

$$S_R(A) = \{a \in R \mid aAa = (0)\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A kümesinin ***yarıasallığının kaynağı*** denir. $S_R(R)$ kümesi kısaca S_R ile gösterilir.

Uyarı 4.1.2. R bir halka, A onun bir althalkası olmak üzere, $S_A = S_R(A) \cap A$ dır.

İspat. $x \in S_A$ olsun. Buna göre, $x \in A$ ve $xAx = (0)$ olur. Aynı zamanda $x \in R$ olduğuna göre, $x \in S_R(A)$ yazılır. Dolayısıyla, $x \in S_R(A) \cap A$ olur. Yani $S_A \subset S_R(A) \cap A$ olur. Benzer şekilde $S_R(A) \cap A \subset S_A$ olduğu da görülebilir. Dolayısıyla eşitlik sağlanır.

Önerme 4.1.3. R bir halka, A ve B onun iki altkümesi olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

i. $A \subset B$ ise $S_R(B) \subset S_R(A)$.

ii. $S_{R\times R}(A \times B) = S_R(A) \times S_R(B)$.

İspat. ***(i)*** $b \in S_R(B)$ olsun. Buna göre $bAb \subset bBb = (0)$ olur. Yani $b \in S_R(A)$ bulunur. Dolayısıyla $S_R(B) \subset S_R(A)$ elde edilir.

(ii) $(a, b) \in S_{R\times R}(A \times B)$ elemanını alalım. Buna göre, her $(x, y) \in A \times B$ için

$$(0,0) = (a, b)(x, y)(a, b) = (axa, byb)$$

elde edilir. Yani $(a, b) \in S_R(A) \times S_R(B)$ bulunur. Yani $S_{R\times R}(A \times B) \subset S_R(A) \times S_R(B)$ olur. Benzer şekilde $S_R(A) \times S_R(B) \subset S_{R\times R}(A \times B)$ olduğu görülür. Dolayısıyla istenen eşitlik sağlanır.

Sonuç 4.1.4. R_1 ve R_2 iki halka ve $A_1 \subseteq R_1$, $A_2 \subseteq R_2$ boş olmayan altkümeleri olsun. Buna göre,

$$S_{R_1\times R_2}(A_1 \times A_2) = S_{R_1}(A_1) \times S_{R_2}(A_2)$$

olur.

İspat. $(a, b) \in S_{R_1\times R_2}(A_1 \times A_2)$ olsun. Buna göre, her $(x, y) \in A_1 \times A_2$ için

$$(0,0) = (a, b)(x, y)(a, b) = (axa, byb)$$

elde edilir. Yani $(a, b) \in S_{R_1}(A_1) \times S_{R_2}(A_2)$ bulunur. Öyleyse

$$S_{R_1 \times R_2}(A_1 \times A_2) \subset S_{R_1}(A_1) \times S_{R_2}(A_2)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$S_{R_1}(A_1) \times S_{R_2}(A_2) \subset S_{R_1 \times R_2}(A_1 \times A_2)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla istenen eşitlik elde edilir.

Önerme 4.1.5. R bir halka ve I onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdaki durumlar geçerlidir:

i. $S_R(I)$ kümesi R çarpımsal yarıgrubunun bir yarıgrup idealidir. Özel olarak $S_R(I)$ kümesi, R halkasının çarpımsal bir altkümesidir.

ii. Eğer $(S_R(I))^2 = (0)$ ise $S_R(I)$ kümesi R halkasının bir idealidir.

İspat. ***(i)*** $a \in S_R(I)$ ve $x \in R$ keyfi elemanlarını alalım. Buna göre

$$axIax \subset aIax = (0)$$

ve benzer olarak

$$xaIxa \subset xaIa = (0)$$

bulunur. Bu yüzden $ax, xa \in S_R(I)$ olur. Yani, $S_R(I)$ kümesi R halkasının bir yarıgrup ideali olur. Dolayısıyla, $S_R(I)$ kümesi R halkasının çarpımsal bir altkümesidir.

(ii) Herhangi $a, b \in S_R(I)$ ve her $x \in I$ için, hipotez ile $ax, xa \in S_R(I)$ olduğu kullanılırsa,

$$(a + b)x(a + b) = axb + bxa = 0$$

bulunur. Böylece $a + b \in S_R(I)$ olur. Sonuç olarak, *(i)* kullanıldığında $S_R(I)$ kümesinin R halkasının bir ideali olduğu bulunur.

Önerme 4.1.6. R halkasının her yarıasal ideali S_R kümesini kapsar.

İspat: Q, R halkasının bir yarıasal ideali ve $a \in S_R$ olsun. S_R kümesinin tanımı kullanıldığında, $aRa = (0) \subset Q$ yazılır. Q bir yarıasal ideal olduğundan $a \in Q$ olur. Böylece $S_R \subset Q$ kapsaması elde edilir.

Sonuç 4.1.7. R bir halka ve $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kümesi R halkasının yarıasal ideallerinin bir ailesi ise, $S_R \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ olur.

Sonuç 4.1.8. R bir halka olmak üzere, S_R kümesi R halkasının $\beta(R)$ asal radikali tarafından kapsanır.

İspat. *Teorem 2.31 (ii)* ile $\beta(R)$ bir yarıasal ideal olduğundan *Önerme 4.1.6* kullanıldığında $S_R \subset \beta(R)$ olur.

Önerme 4.1.9. R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler geçerlidir:

i. Eğer $e = e^2 \in R$ bir idempotent eleman ise

$$eS_R(eRe)e = S_{eRe} = eS_Re \text{ dir.}$$

ii. $S_{M_n(R)} \subset M_n(S_R)$ dir.

iii. Eğer S_R, R halkasının bir esas ideali ise $S_{M_n(R)} = M_n(S_R)$ dir.

İspat. ***(i)*** $a \in S_R(eRe)$ olsun. Buna göre, $aeRea = (0)$, yani $eaeReae = (0)$ olur. Bu eşitlikten $eae \in S_{eRe}$ yazılır. Böylece $eS_R(eRe)e \subset S_{eRe}$ kapsaması sağlanır. Diğer yandan $a \in S_{eRe}$ elemanını alalım. Bu durumda $a = ebe$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. O zaman $eae = e(ebe)e = ebe = a$, yani $eae = a$ olur. Aynı zamanda $aeRea = (0)$ dır. Bu durumda $a \in S_R(eRe)$ olur. $a = eae$ olduğuna göre $a \in eS_R(eRe)e$ elde edilir. O zaman $S_{eRe} \subset eS_R(eRe)$ kapsaması da sağlanır. Böylece, $eS_R(eRe)e = S_{eRe}$ dir.

Şimdi $S_{eRe} = eS_Re$ olduğunu ispatlamak için. $eae \in S_{eRe}$ elemanını alalım. Buna göre, $eaeReae = (0)$ olur. $eae \in S_R$ olduğundan $eae = e^2ae^2 = e(eae)e \in eS_Re$ bulunur. Böylece $S_{eRe} \subset eS_Re$ elde edilir. Tersine $a \in S_R$ için $eae \in eS_Re$ alalım. $a \in S_R$ olduğu kullanılarak, $eaeReae \subset eaRae = (0)$ bulunur. Bu ise $eae \in S_{eRe}$ demektir. Böylece $eS_Re \subset S_{eRe}$ kapsaması da sağlanır. Sonuç olarak istenen eşitlik sağlanmış olur.

(ii) $a = (a_{ij}) \in S_{M_n(R)}$ ve $1 \leq i, j \leq n$ olsun. $x \in R$ olmak üzere, (i, j).nci bileşeni x diğer bileşenleri 0 olan $E_{ij} = (e_{ij}(x))$ matrislerini alalım. Buna göre herhangi bir $x \in R$ için

$$aE_{ji}(x)a = 0$$

eşitliği yazılır. Buradan $k, l \in \{1, \dots, n\}$ için

$$(a_{ki}xa_{jl}) = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte $k = j,\ l = i$ alınırsa $a_{ji} \in S_R$ olur. Böylece $a \in M_n(S_R)$ bulunur. Yani $S_{M_n(R)} \subset M_n(S_R)$ kapsaması sağlanır.

(iii) S_R kümesinin, $\alpha \in R$ elemanı tarafından üretilen bir esas ideal olduğunu kabul edelim. O zaman, $S_R = (\alpha)$ yazılır. $a \in M_n(S_R)$ olsun. Bu durumda, herhangibir $b \in M_n(R)$ için $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere

$$(aba)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} (a_{it}b_{tk}a_{kj})$$

eşitliği elde edilir. Burada $1 \leq t, k \leq n$ için $a_{it}, a_{kj} \in S_R = (\alpha)$ ve $\alpha \in S_R$ olduğuna göre, her $1 \leq i, j \leq n$ için $(aba)_{ij} = 0$ olur. Böylece $aba = 0$, yani $a \in S_{M_n(R)}$ bulunur. Yani $M_n(S_R) \subset S_{M_n(R)}$ elde edilir. Dolayısıyla *(ii)* kullanıldığında, $S_{M_n(R)} = M_n(S_R)$ eşitliği elde edilir.

Önerme 4.1.10. R, T iki halka ve $f: R \to T$ bir halka homomorfizması olsun. Buna göre, $f(S_R) \subset S_{f(R)}$ dir. Üstelik f birebir fonksiyon ise $f(S_R) = S_{f(R)}$ olur.

İspat. $a \in S_R$ olsun. Buna göre,

$$f(a)f(R)f(a) = f(aRa) = f(0) = (0)$$

eşitliği elde edilir. Yani, $f(a) \in S_{f(R)}$ dir. Yani, $f(S_R) \subset S_{f(R)}$ olur. Şimdi f fonksiyonu birebir ve $f(a) \in S_{f(R)}$ olsun. Buna göre,

$$(0) = f(a)f(R)f(a) = f(aRa)$$

eşitliği bulunur. f fonksiyonu birebir olduğundan, $aRa = (0)$ olur. Böylece $a \in S_R$ dir. Buradan $f(a) \in f(S_R)$ yazılır. Öyleyse, $S_{f(R)} \subset f(S_R)$ kapsaması da geçerli olur. Dolayısıyla $f(S_R) = S_{f(R)}$ eşitliği sağlanır.

Lemma 4.1.11. R bir halka olsun. $a \in$ R sağ sıfır bölen eleman değil ve sol sıfır bölen eleman değilse $a \in R - S_R$ dir.

İspat: $a \in S_R$ olsun. a elemanı sağ ve sol sıfır bölen eleman olmadığından $xa \neq 0$, $ay \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $x, y \in R$ elemanları vardır. Aynı zamanda $a(xa) = 0$ ve $(ay)a = 0$ olur. Bu durum hipotez ile çeliştiğinden $a \notin S_R$ dir. Dolayısıyla $a \in R - S_R$ olur.

Lemma 4.1.12. R birimli, değişmeli bir halka ise $S_R = \{a \in R \mid a^2 = 0_R\}$ dir.

İspat. $K = \{a \in R \mid a^2 = 0_R\}$ olsun. $a \in S_R$ alınırsa $aRa = (0)$ olur. R birimli olduğuna göre $a^2 = 0_R$ yani $a \in K$ bulunur. O zaman $S_R \subset K$ olur. Şimdi $b \in K$ alalım. Buna göre, $b^2 = 0_R$ olduğundan her $x \in R$ için $b^2x = 0_R$ olur. R değişmeli olduğuna göre her $x \in R$ için $bxb = 0_R$, yani $bRb = (0)$ bulunur. O zaman $b \in S_R$ dir. Böylece $K \subset S_R$ olur. Bu ise $S_R = K$ demektir.

4.2. $|S_R|$-İndirgenmiş Halkalar, $|S_R|$-Bölgeleri ve $|S_R|$-Bölümlü Halkaları

Bu bölümde, başlıkta verilen üç yeni yapı tanıtılmış ve bu yeni yapılarda, halka teorideki bazı temel özellikler verilmiştir. Son olarak da her sonlu $|S_R|$-bölgesinin birimli olduğu, yani bir $|S_R|$-bölümlü halka olduğu gösterilmiştir.

Tanım 4.2.1. R bir halka ve $R \neq S_R$ olsun.

i. $R - S_R$ kümesinde nilpotent eleman yoksa, R halkasına ***$|S_R|$-indirgenmiş halka*** denir.

ii. $R - S_R$ kümesi ne sağ sıfır bölen ne de sol sıfır bölen eleman içermiyorsa, R halkasına ***$|S_R|$-bölge*** denir. Birimli ve değişmeli $|S_R|$-bölgesine ise ***$|S_R|$-tamlık bölgesi*** denir.

iii. $1_R \in R$ ve $R - S_R$ kümesindeki her eleman tersinir ise, R halkasına ***$|S_R|$-bölümlü halka*** denir. Değişmeli $|S_R|$-bölümlü halkasına ise ***$|S_R|$-cisim*** denir.

Uyarı 4.2.2: $\mathbb{Z}_9$ halkasında $R = \{0,3,6\}$ althalkasını alalım. Her $x \in R$ için $x^2 = 0$ olduğundan $S_R = R$ olur. Bu örnekte görüldüğü üzere $S_R = R$ olabilir. Bu yüzden yukarıda verilen tanımda $R \neq S_R$ alınmalıdır.

Uyarı 4.2.3. ***(i)*** Bir indirgenmiş halka (bölge, bölümlü halka), bir $|S_R|$-indirgenmiş halka ($|S_R|$-bölge, $|S_R|$-bölümlü halka) olur. Çünkü bir indirgenmiş halkada $S_R = \{0\}$ olur. Öyleyse, $R - S_R$ kümesinde nilpotent eleman yoktur.

(ii) Bir $|S_R|$-bölümlü halka bir $|S_R|$-bölge ve bir $|S_R|$-bölge de bir $|S_R|$-indirgenmiş halkadır. Çünkü bir $|S_R|$-bölümlü halkada, $0 \neq x, y \in R$ için $ax = 0 = yb$ olacak şekilde $a \in R - S_R$ elemanı varsa $x = y = 0$ çelişkisine ulaşılır. Bir $|S_R|$-bölgede, bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a^n = 0$ ve $a^{n-1} \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in R - S_R$ alındığında ise a bir sıfır bölen eleman olur. Bu ise bir çelişkidir.

(iii) $i = 1,2$ için R_i bir $\left|S_{R_i}\right|$-indirgenmiş halkaları için $R_1 \times R_2$ direkt çarpımı da bir $\left|S_{R_1} \times S_{R_2}\right|$-indirgenmiş halkadır. Çünkü $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(x_1, x_2)^k = 0$ olacak şekilde bir $(x_1, x_2) \in (R_1 \times R_2) - S_{R_1 \times R_2}$ alınırsa, x_1 ve x_2 elemanları nilpotent eleman olur. Yani, $x_i \in S_{R_i}$ olur. Bu ise $(x_1, x_2) \in S_{R_1} \times S_{R_2}$ demektir. *Sonuç 4.1.4* ile $(x_1, x_2) \in S_{R_1 \times R_2}$ çelişkisi elde edilir. Genel olarak $n \in \mathbb{Z}^+$ için $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere $\left|S_{R_i}\right|$-indirgenmiş halkalarının direkt çarpımı da $\left|S_{R_1} \times \cdots \times S_{R_n}\right|$-indirgenmiş halkadır.

(iv) R bir $|S_R|$-indirgenmiş halka ve $a \in R$ nilpotent eleman olsun. Öyleyse, $a \in S_R$ dir. *Sonuç 4.1.8* ile $S_R \subset \beta(R)$ olduğuna göre $a \in \beta(R)$ dir. Yani bir $|S_R|$-indirgenmiş halkasının asal radikali tüm nilpotent elemanları kapsar.

Şimdi, yukarıda tanımlanan yeni kavramlar ile ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 4.2.4. $T_2(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerindeki iki boyutlu üst üçgensel matrislerin kümesi olmak üzere $R = T_2(\mathbb{Z})$ olsun. Herhangi bir $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S_R$ elemanını alalım. S_R kümesinin tanımı kullanılırsa, her $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2x & axb + ayc + bzc \\ 0 & c^2z \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Buradan ise, her $x, z \in \mathbb{Z}$ için $a^2x = c^2z = 0$ yani $a = c = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$S_R = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

olur. Buna göre,

$$R - S_R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 \text{ veya } c \neq 0 \right\}$$

şeklindedir. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R - S_R$ elemanını alalım. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanı bir sıfır bölen elemandır. Dolayısıyla, R bir $|S_R|$-bölge değildir. Şimdi, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R - S_R$ elemanının nilpotent eleman olduğunu kabul edelim. Yani, bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Buna göre, $\begin{pmatrix} a^n & \cdots \\ 0 & c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, buradan da $a = c = 0$ çelişkisine ulaşılır. Öyleyse, $R - S_R$ kümesinde nilpotent eleman bulunmadığından, R bir $|S_R|$-indirgenmiş halka olur.

Örnek 4.2.5. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ halkasını alalım. $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in S_R$ olsun. R birimli ve değişmeli bir halka olduğuna göre, *Lemma 4.1.12* ile $A^2 = 0_{\mathrm{R}}$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan ise $x^2 = 0$ yani $x = 0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$S_R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

ve buradan da

$$R - S_R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \right\}$$

bulunur. Buna göre, her $A \in R - S_R$ için $\det(A) \neq 0$ olduğundan, A matrisi tersinir bir matristir. Üstelik, R birimli ve değişmeli bir halka olduğundan, R bir $|S_R|$-cisimdir.

Bu örnekte, matrisin elemanları keyfi bir bölümlü halkadan alınırsa R bir $|S_R|$-bölümlü halka, bir bölgeden alındığında ise bir $|S_R|$-bölge olur.

Örnek 4.2.6. F bir cisim ve $charF = 2$ olmak üzere,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in F \right\}$$

olsun. $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in S_R$ olsun. R birimli ve değişmeli bir halka olduğuna göre, *Lemma 4.1.12* ile $A^2 = 0_{\mathrm{R}}$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

olur. $charF = 2$ olduğu kullanılarak

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

buradan ise $(x+y)^2 = x^2 + y^2 = 0$ bulunur. Böylece $x + y = 0$ olur. Burada, $y = -y$ yazılabileceğinden $x = y$ dir. Dolayısıyla,

$$S_R = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \middle| \, x \in F \right\}$$

ve böylece

$$R - S_R = \left\{ \begin{pmatrix} x & \mathrm{y} \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in F \text{ ve } x \neq y \right\}$$

şeklindedir. Bu kümedeki her matrisin determinantı sıfırdan farklı olduğundan tersinir bir matristir. Sonuç olarak, R bir $|S_R|$-cisimdir.

Önerme 4.2.7. R bir halka ve $R \neq S_R$ olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R bir $|S_R|$-indirgenmiş halkadır.

ii. $a \in R$ olmak üzere, $a^2 \in S_R$ ise $a \in S_R$ dir.

iii. $a \in R$ ve $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, $a^n \in S_R$ ise $a \in S_R$ dir.

İspat (*i*)⇒(*ii*). R bir $|S_R|$-indirgenmiş halka ve $a^2 \in S_R$ olacak şekilde $a \in R$ olsun. Buna göre, $a^5 = a^2 a a^2 = 0$, yani a nilpotent bir eleman olur. R bir $|S_R|$-indirgenmiş halka olduğundan $a \in S_R$ olmalıdır.

(*ii*)⇒(*iii*). $a \in R$ ve $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $a^n \in S_R$ olduğunu kabul edelim. $K = \{ t \in \mathbb{Z}^+ \mid a^t \in S_R \}$ kümesini alalım. $n \in K$ olduğuna göre $K \neq \emptyset$ dir. Bu durumda, $a^{n_0} \in S_R$ olacak şekilde bir en küçük $n_0 \in K$ tamsayısı seçilebilir. n_0 tamsayısının çift olduğunu kabul edelim. Buna göre $n_0 = 2k$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ tamsayısı vardır. Yani $a^{n_0} = a^{2k} = (a^k)^2 \in S_R$ olur. *(ii)* hipotezi kullanılırsa $a^k \in S_R$ elde edilir. Üstelik $k < n_0$ dır. Bu durum n_0 elemanının seçilişiyle çelişir. Şimdi n_0 tamsayısının tek olduğunu kabul edelim. O zaman $n_0 + 1 = 2k$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ tamsayısı vardır. *Önerme 4.1.5 (i)* kullanılarak $a^{2k} = a^{n_0+1} = a^{n_0} a \in S_R$, yani $a^{2k} \in S_R$ bulunur. *(ii)* hipotezi uygulandığında $a^k \in S_R$ elde edilir. Burada $k = 1$ veya $k > 1$ dir. $k > 1$ olduğunda $k < n_0$ olur. Fakat bu durum n_0 elemanının seçilişiyle çelişir. Dolayısıyla $k = 1$ yani $n_0 = 1$ olur. Öyleyse $a \in S_R$ dir.

(*iii*)⇒(*i*). $a \in R$ herhangi bir nilpotent eleman olsun. Buna göre, $a^{\mathrm{n}} = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı vardır. $0 \in S_R$ olduğuna göre, $a^{\mathrm{n}} \in S_R$ dir. *(iii)* hipotezi kullanıldığında ise $a \in S_R$ sonucuna varılır. Öyleyse, R bir $|S_R|$-indirgenmiş halkadır.

Sonuç 4.2.8. R bir $|S_R|$-indirgenmiş halka olsun. Buna göre, $S_R = \{ a \in R \mid a^3 = 0 \}$ dir.

İspat. $a \in S_R$ alalım. S_R kümesinin tanımı kullanıldığında $a^3 = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $S_R \subset \{ a \in R \mid a^3 = 0 \}$ olur. Tersine $a^3 = 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ alalım.

Buna göre, $a^3 \in S_R$ olur. R bir $|S_R|$-indirgenmiş halka olduğundan *Önerme 4.2.7* kullanılırsa $a \in S_R$ bulunur. Dolayısıyla, $\{ a \in R \mid a^3 = 0 \} \subset S_R$ olur. Öyleyse istenen eşitlik sağlanır.

Önerme 4.2.9. R bir $|S_R|$-bölge ve A onun sıfırdan farklı bir althalkası olsun. Buna göre, $S_R(A) = S_R$ dir. Üstelik, A althalkası da bir $|S_A|$-bölgedir.

İspat. A, R halkasının sıfırdan farklı bir althalkası olsun. *Önerme 4.1.3 (i)* uygulandığında $S_R \subset S_R(A)$ olduğu görülür. Şimdi $S_R(A) \subset S_R$ olduğunu ispatlamak için, $a \notin S_R$ olacak şekilde bir $a \in S_R(A)$ alalım. Buna göre $a \in R - S_R$ ve $aAa = (0)$ olur. R bir $|S_R|$-bölge olduğuna göre, a elemanı sıfır bölen olmayan bir elemandır. Bu durumda, $aA = (0) = Aa$, yani $A = (0)$ çelişkisine ulaşılır. Böylece, $S_R(A) = S_R$ eşitliğine ulaşılır.

Şimdi A althalkasının bir $|S_A|$-bölge olduğunu ispatlayalım. $a \in A$ elemanı bir sıfır bölen eleman olsun. R bir $|S_R|$-bölge olduğundan, $a \in S_R = S_R(A)$ olur. Yani $aAa = (0)$ dır. Bu ise, $a \in S_A$ demektir. Dolayısıyla, A bir $|S_A|$-bölgedir.

Fakat aşağıdaki örnekte görüleceği üzere, bir $|S_R|$-indirgenmiş halkadaki bir A althalkası için $S_R(A) = S_R$ eşitliği her zaman sağlanmayabilir.

Örnek 4.2.10. T birimli bir indirgenmiş halka ve $0,1 \neq e \in T$ idempotent eleman olmak üzere,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in T \right\}$$

halkasını alalım. $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in S_R$ olsun. Buna göre, her $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xax & xay + xbx + yax \\ 0 & xax \end{pmatrix}$$

olur. Buradan ise, her $a \in T$ için $xax = 0$ olur. T birimli bir indirgenmiş halka olduğundan, $x = 0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$S_R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in T \right\}$$

ve böylece

$$R - S_R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in T \text{ ve } x \neq 0 \right\}$$

bulunur. Burada, bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \mathrm{x} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olması $\begin{pmatrix} x^n & \cdots \\ 0 & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, yani $x^n = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise, T indirgenmiş halkasında söz konusu değildir. Bu yüzden, $R - S_R$ kümesinde nilpotent eleman yoktur. Yani, R bir $|S_R|$-indirgenmiş halkadır. Şimdi,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} ea & eb \\ 0 & ea \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in T \right\}$$

althalkasını alalım. $S_R(A)$ kümesini bulmak için, herhangi bir $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in S_R(A)$ elemanını alalım. Buna göre, her $\begin{pmatrix} ea & eb \\ 0 & ea \end{pmatrix} \in A$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ea & eb \\ 0 & ea \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xeax & xeay + xebx + yeax \\ 0 & xeax \end{pmatrix}$$

olur. Buradan ise, her $a \in T$ için $xeax = 0$ bulunur. T birimli olduğundan, $xex = 0$ dir. *Uyarı 2.39* ile $e \in Z(T)$ olduğuna göre,

$$xex = xe^2x = (xe)(ex) = (xe)^2$$

eşitlikliği bulunur. T indirgenmiş halka olduğundan, $xe = ex = 0$ olur. Yani, $x \in Ann(e)$ dir. Öte yandan, her $x \in T$ için $x = ex + (1-e)x$ yazılabilir. Özel olarak, $x \in Ann(e)$ alınırsa, $x = (1-e)x$ olur. Bu ise $x \in (1-e)T$ demektir. O zaman, $Ann(e) \subset (1-e)T$ olur. $(1-e)T \subset Ann(e)$ olduğu da benzer biçimde görülür. Böylece $Ann(e) = (1-e)T$ bulunur. Buna göre, $x \in (1-e)T$ yazılabilir. O halde

$$S_R(\mathrm{A}) = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x \in (1-e)T, y \in T\right\}$$

olur. $e \neq 1$ olduğuna göre $(1-e)T \neq (0)$ olur. Dolayısıyla $S_R \neq S_R(A)$ dır.

Önerme 4.2.11. *R* bir $|S_R|$-indirgenmiş halka ve *A* onun sıfırdan farklı bir althalkası olsun. Buna göre, *A* bir $|S_A|$-indirgenmiş halkadır.

İspat. $a \in A$ nilpotent eleman olsun. *R* bir $|S_R|$-indirgenmiş halka olduğuna göre, *Önerme 4.1.3 (i)* uygulanırsa $a \in S_R \subset S_R(\mathrm{A})$ yazılır. Böylece, *Uyarı 4.1.2* kullanıldığında $a \in A \cap S_R(\mathrm{A}) = S_A$ elde edilir. Böylece, *A* bir $|S_A|$-indirgenmiş halka olur.

Şimdi *R* halkasının bir $|S_R|$-bölge olması durumunda bile, *A* onun bir althalkası olmak üzere, S_A ve $S_R(\mathrm{A})$ kümelerinin eşit olamayacağını ifade eden bir örnek verelim.

Örnek 4.2.12. $S_{\mathbb{Z}_4} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ olduğuna göre $\mathbb{Z}_4 - S_{\mathbb{Z}_4} = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ dir. Böylece $\mathbb{Z}_4$ bir 2-cisimdir. Diğer yandan $p(t) = t^2 + t + 1$ polinomu $\mathbb{Z}_4[t]$ halkasında indirgenemez bir polinomdur. Buna göre, $P = (p(t))$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R = \mathbb{Z}_4[t]/P &= \{a + bt + P \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\} \\ &= \begin{Bmatrix} 0+P, t+P, 1+P, 1+t+P, 2t+P, 2+P, \\ 2+2t+P, 1+2t+P, 2+t+P, 1+3t+P, \\ 3+t+P, 3+3t+P, 2+3t+P, 3+2t+P, \\ 3t+P, 3+P \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradan ise

$$\begin{aligned} S_R &= \{0+P, 2t+P, 2+P, 2+2t+P\} \\ &= \left\{a + bt + P \,\middle|\, a, b \in S_{\mathbb{Z}_4}\right\} \end{aligned}$$

bulunur. O zaman

$$R - S_R = \begin{Bmatrix} t + P, 1 + P, 1 + t + P, 1 + 2t + P, 2 + t + P \\ 1 + 3t + P, 3 + t + P, 3 + 3t + P, 2 + 3t + P \\ 3 + 2t + P, 3t + P, 3 + P \end{Bmatrix}$$

olur. Üstelik

$(t + P)^{-1} = 3 + 3t + P$, $(1 + t + P)^{-1} = 3t + P$, $(1 + 2t + P)^{-1} = 1 + 2t + P$,

$(2 + t + P)^{-1} = 3 + t + P$, $(1 + 3t + P)^{-1} = 2 + 3t + P$, $(3 + 2t + P)^{-1} = 3 + 2t + P$

$(3 + P)^{-1} = 3 + P$

eşitlikleri geçerli olduğundan $R - S_R$ kümesinin her elemanı R halkasında tersinirdir. Dolayısıyla, R bir 4-cisimdir. Öte yandan

$$i: \mathbb{Z}_4 \to R, a \to a + P$$

şeklinde tanımlanan monomorfizma sayesinde $i(\mathbb{Z}_4) = A$ halkası R halkasının bir althalkası olur Aynı zamanda $a + bt + P \in S_R(\text{A})$ alındığında, $a^2 = b^2 = 2ab$ eşitliğinden a ve b değerleri 0 veya 2 olabilir. Dolayısıyla

$$S_R(\text{A}) = \{0 + P, 2 + P, 2t + P, 2 + 2t + P\} = S_R$$

olur.

Lemma 4.2.13. R bir $|S_R|$-bölge ise $R - S_R$ kümesi bir çarpımsal kümedir.

İspat. $a, b \in R - S_R$ olsun. R bir $|S_R|$-bölge olduğundan a, b sağ ve sol sıfır bölen değildir. Dolayısıyla, ab elemanı da sağ ve sol sıfır bölen eleman değildir. *Lemma 4.1.11* kullanıldığında $ab \in R - S_R$ olur. Böylece, $R - S_R$ kümesi bir çarpımsal küme olur.

Teorem 4.2.14. R sonlu bir $|S_R|$-bölge ise bir $|S_R|$-bölümlü halkadır.

İspat. R bir sonlu $|S_R|$-bölge olsun. Öncelikle R halkasının birimli olduğunu ispatlayalım. R sonlu olduğundan $T = R - S_R$ kümesi de sonlu bir küme olur. Bu durumda, $T = \{a_1, \dots, a_n\}$ şeklinde yazılır. $a \in T$ elemanını alalım. *Lemma 4.2.13* uygulandığında, T bir çarpımsal küme olur. Ayrıca, a elemanı ne sağ ne de sol sıfır bölen olduğuna göre, T kümesinden T içine, $x \mapsto ax$ ve $x \mapsto xa$ şeklinde tanımlanan dönüşümler birebir olur. Çünkü $x, y \in T$ için $ax = ay$ ve $xa = ya$, yani $a(x - y) = (x - y)a = 0$ dır. Buradan ise $x = y$ olmalıdır. T kümesi sonlu olduğuna göre, bu dönüşümler aynı zamanda örtendir, yani birebir-örtendir. O zaman

$$aa_i = a = a_j a \qquad (4.1)$$

olacak şekilde $1 \leq i, j \leq n$ indisleri vardır. Buna göre,

$$aa_i a = a^2 = aa_j a$$

olur. Bu ifade düzenlendiğinde $a(a_i - a_j)a = 0$ eşitliği elde edilir. a elemanı sıfır bölen olmadığına göre

$$a_i = a_j \tag{4.2}$$

elde edilir. Böylece (4.1) eşitliğinden

$$aa_i = a = a_i a$$

eşitliği bulunur. Şimdi başka bir $b \in T$ elemanı alalım. a elemanı için (4.1) ifadesine kadar uygulanan benzer işlemler ile

$$ba_i' = b = a_i' b$$

olacak şekilde bir $a_i' \in T$ elemanı bulunabilir. Öyleyse son iki eşitlikten

$$(ab)a_i' = a(ba_i') = ab$$
$$a_i(ab) = (a_i a)b = ab$$

bulunur. Yani

$$(ab)a_i' = ab = a_i(ab)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $ab \in T$ olduğu kullanılarak, (4.1) ve (4.2) arasındaki benzer işlemler ile $a_i' = a_i$ bulunur. $e = a_i$ alınırsa, e elemanının T altyarıgrubunun çarpımsal birim elemanı olarak rol oynadığı görülür. Özel olarak $e^2 = e$ yazılabilir.

Şimdi keyfi bir $x \in R$ elemanı alalım. Buna göre, $x \in T$ veya $x \in S_R$ dir. $x \in T$ ise, $xe = x = ex$ olur. Bu durum için ispat biter. $x \in S_R$ olsun. Öncelikle $e - ex \in T$ olduğunu gösterelim. Tersine $e - ex \in S_R$ olduğunu kabul edelim. Buna göre

$$0 = (e - ex)e(e - ex) = e - ex - exe + exex$$

olur. $x \in S_R$ olduğu kullanılarak

$$e - ex - exe = 0 \tag{4.3}$$

bulunur. Bu eşitlik sağdan x elemanı ile çarpılırsa

$$ex = ex^2 \tag{4.4}$$

bulunur. (4.4) eşitliği sağdan x ile çarpılırsa $ex = ex^2 = ex^3 = 0$ bulunur. Burada (4.3) ve $x \in S_R$ olduğu kullanılarak $e = e - ex - exe = 0$ bulunur. Bu ise $e \in T$ olmasıyla çelişir.

O zaman $e - ex \in S_R$ olamaz. Yani $e - ex \in T$ dir. Benzer işlemlerle, $e - xe \in T$ olduğu da görülür. e elemanı T yarıgrubunun birim elemanı olduğundan,

$$(e - ex)e = e - ex$$

ve

$$e(e - xe) = e - xe$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$ex = exe = xe \tag{4.5}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, $(xe - x)e = 0$ olur. Burada e elemanının sağ sıfır bölen olmadığı kullanılırsa $xe = x$ bulunur. Yani (4.5) eşitliği ile $ex = xe = x$ olur. Bu yüzden e elemanı R halkasının çarpımsal birimidir. O zaman $e = 1_R$ yazılabilir. Dolayısıyla R halkası birimlidir. Buna göre T kümesinden T üzerine, $x \mapsto ax$ ve $x \mapsto xa$ şeklinde tanımlanan dönüşümler kullanılarak, $ax = 1_R = ya$ olacak şekilde $x, y \in T$ vardır. Yani a elemanı tersinir elemandır. Öyleyse, R bir $|S_R|$-bölümlü halkadır.

Sonuç 4.2.15. Her sonlu $|S_R|$-tamlık bölgesi bir $|S_R|$-cisimdir.

İspat. R bir sonlu $|S_R|$-tamlık bölgesi olsun. Buna göre, R birimli değişmeli sonlu bir $|S_R|$-bölge olur. *Teorem 4.2.14* ile R, $|S_R|$-bölümlü halka yani $|S_R|$-cisim olur.

Fakat aşağıda verilen örnekte anlaşılacağı üzere, sonlu bir $|S_R|$-bölümlü halka bir $|S_R|$-cisim olmayabilir.

Örnek 4.2.16. F bir cisim ve ϕ birim dönüşümden farklı F üzerinde $\phi(1_F) = 1_F$ olacak biçimde bir monomorfizma olsun. $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \phi(a) \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F\right\}$ kümesini alalım. Bu durumda $\phi(1_F) = 1_F$ olduğu kullanılarak $\begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & \phi(1_F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & 1_F \end{pmatrix} \in R$ yazılır. Öyleyse R kümesi değişmeli olmayan birimli bir halka olur. $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \phi(x) \end{pmatrix} \in S_R$ olsun. Buna göre, her $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \phi(a) \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \phi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \phi(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \phi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xax & xay + xb\phi(x) + y\phi(a)\phi(x) \\ 0 & \phi(x)\phi(a)\phi(x) \end{pmatrix}$$

olur. Buradan ise, her $a \in F$ için $xax = 0$ olur. F bir cisim olduğundan $x^2 = 0$ yani $x = 0$ bulunur. Burada ϕ fonksiyonunun bir homomorfizma olduğu kullanılırsa $\phi(x) = 0$ olur. Öyleyse,

$$S_R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathrm{F} \right\}$$

dir. Buradan

$$R - S_R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \phi(a) \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathrm{F}, \ a \neq 0 \right\}$$

bulunur. ϕ birebir olduğundan bu kümedeki her matrisin determinantı sıfırdan farklıdır. Bu yüzden bu kümenin her elemanı tersinirdir. Dolayısıyla, R bir $|S_R|$-bölümlü halkadır. Eğer burada F sonlu bir cisim alınırsa R değişmeli olmayan sonlu bir $|S_R|$-bölümlü halka olur.

Burada $R - S_R$ çarpımsal grubunun devirli bir grup olması gerekmez. Bu durum için aşağıdaki örnek verilebilir:

Örnek 4.2.17. $F = \{0,1,a,b\}$ kümesi üzerinde

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

.	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

şeklinde iki işlem tanımlansın. F kümesi tanımlanan bu işlemler ile bir cisim olur. Bu cisime ***Galois cismi*** denir ve $GF(4)$ ile gösterilir. $\phi: F \to F, \phi(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan ve *Frobenius otomorfizması* olarak isimlendirilen dönüşümü alalım. Yukarıda verilen örnekte $F = GF(4)$ alınırsa

$$S_R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

olduğundan

$$R - S_R = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

bulunur. Yani $|R - S_R| = 12$ dir. Oysa ki $R - S_R$ kümesinin birim elemandan farklı her bir elemanının mertebesi 2 veya 3 olur. Yani $R - S_R$ kümesi bir devirli grup olamaz.

Önerme 4.2.18. p bir asal sayı ve $n \geq 1$ bir tamsayı olsun. Buna göre,

$$S_{\mathbb{Z}_{p^n}} = \begin{cases} \left(\overline{p^{\frac{n}{2}}}\right), & n \text{ çift} \\ \left(\overline{p^{\frac{n+1}{2}}}\right), & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{Z}_{p^n}$ birimli ve değişmeli bir halka olduğuna göre *Lemma 4.1.12* uygulandığında $S_{\mathbb{Z}_{p^n}} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_{p^n} | \bar{a}^2 = \bar{0}\}$ olur. Şimdi $\bar{a} \in S_{\mathbb{Z}_{p^n}}$ alalım. Buna göre p^{n}, a^2 elemanını böler. Yani

$$a^2 = p^n t \tag{4.6}$$

olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. n sayısı çift olsun. O zaman, $n = 2k$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Bu durumda (4.6) eşitliğinden $a^2 = (p^k)^2 t$ yazılır. Burada t tamsayısı da bir tam kare olmalıdır. Böylece $(t_1)^2 = t$, $t_1 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a = p^k t_1 = p^{\frac{n}{2}} t_1$ yazılır. Buna göre $\bar{a} = \overline{p^{\frac{n}{2}}}\, \overline{t_1}$ olduğuna göre, $\bar{a} \in \left(\overline{p^{\frac{n}{2}}}\right)$ olur. n sayısının tek olduğunu kabul edelim. O zaman $n = 2k + 1$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. (4.6) eşitliği kullanıldığında $a^2 = (p^k)^2 pt$ yazılır. Burada $(t_2)^2 = pt$, $t_2 \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Buna göre p asalı t_2 tamsayısını böler. Yani $t_2 = pm$, $m \in \mathbb{Z}$ biçiminde yazılır. Bu durumda $pt = p^2 m^2$, yani $t = pm^2$ olur. Buna göre $a^2 = (p^k)^2 pt = (p^k)^2 p^2 m^2$ yani $a = p^{k+1} m = p^{\frac{n+1}{2}} m$ olur. Yani $\bar{a} = \overline{p^{\frac{n+1}{2}}}\, \overline{m}$ olur. Öyleyse $\bar{a} \in \left(\overline{p^{\frac{n+1}{2}}}\right)$ bulunur.

Şimdi, birimli bir $|S_R|$-bölgenin karakteristiğinin alabileceği değerleri veren teoremi inceleyelim.

Teorem 4.2.19. R birimli bir $|S_R|$-bölge ise p bir asal sayı olmak üzere, $charR = 0, p$ veya p^2 dir.

İspat. $charR = n > 1$ olmak üzere p asalı n tamsayısını bölsün. Buna göre, $n = pk$ olacak şekilde $1 \leq k < n$ tamsayısı vardır. O zaman

$$0_R = n \cdot 1_R = (p \cdot 1_R)(k \cdot 1_R)$$

olur. Yani $(p \cdot 1_R)$ bir sıfır bölen elemandır. R bir $|S_R|$-bölge olduğundan $p \cdot 1_R \in S_R$ olmalıdır. Bu yüzden, her $x \in R$ için

$$0_R = (p \cdot 1_R)x(p \cdot 1_R) = p^2 \cdot x$$

olur. $charR = n$ olduğu kullanılırsa n, p^2 elemanını böler. Fakat p, n elemanını böldüğünden, $n \in \{p, p^2\}$ olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.20. $n > 1$ bir tamsayı olsun. Buna göre, $\mathbb{Z}_n$ kümesi bir $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-tamlık bölgesidir (yani $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-cisim) ancak ve ancak $n = p$ veya $n = p^2$ dir.

İspat. $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-tamlık bölgesi olsun. O zaman *Teorem 4.2.19* kullanılırsa p bir asal sayı olmak üzere, $n = char\mathbb{Z}_n = p$ veya p^2 olur. Tersine ise $n = p$ olduğunda $\mathbb{Z}_n$ bir cisim yani 1-cisim olur. $n = p^2$ alındığında *Önerme 4.2.18* ile $S_{\mathbb{Z}_{p^2}} = (\bar{p})$ olur. $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{p^2} - S_{\mathbb{Z}_{p^2}}$ alalım. Bu durumda $ebob(a, p) = 1$ olur. Çünkü $ebob(a, p) = d \neq 1$ olsa d sayısı p asalını böler. Bu durum ise $\bar{a} \notin S_{\mathbb{Z}_{p^2}}$ olması ile çelişir. Bu durumda $ebob(a, p^2) = 1$ eşitliği de geçerli olur. Böylece $ax + p^2y = 1$ olacak şekilde x, y tamsayıları vardır. Yani $\overline{ax + p^2y} = \bar{1}$, buradan da $\overline{ax} = \bar{1}$ bulunur. Böylece $\bar{a}$ tersinir bir elemandır. Sonuç olarak $\mathbb{Z}_{p^2}$ bir p-cisim olur.

Teorem 4.2.21. R birimli bir $|S_R|$-indirgenmiş halka ve $charR = n$ olsun. Bu durumda, kübü n sayısını bölen bir asal sayı yoktur.

İspat. $charR = n > 1$ ve p böler n olsun. Buna göre, p ile t_0 aralarında asal olmak üzere $n = p^\alpha t_0$ olacak şekilde $\alpha \geq 1$ ve $1 \leq t_0 < n$ tamsayıları vardır. Buna göre

$$((pt_0) \cdot 1_R)^\alpha = t_0{}^{\alpha-1} \cdot (n \cdot 1_R) = 0_R$$

olur. Yani $(pt_0) \cdot 1_R$ bir nilpotent elemandır. R bir $|S_R|$-indirgenmiş halka olduğundan $(pt_0) \cdot 1_R \in S_R$ dir. Bu yüzden, her $x \in R$ için, $p^2 t_0{}^2 \cdot x = (pt_0 \cdot 1_R)x(pt_0 \cdot 1_R) = 0_R$ bulunur. $charR = n$ olduğuna göre n, $p^2 t_0{}^2$ elemanını böler. Yani, $p^\alpha t_0 t_1 = p^2 t_0{}^2$ olacak şekilde $t_1 \geq 1$ tamsayısı vardır. Kabul edelim ki, $\alpha \geq 3$ olsun. Son eşitliğin her iki tarafı $p^2 t_0$ elemanı ile bölünürse $t_0 = p^{\alpha-2} t_1$ bulunur. Bu ise p asalının t_0 elemanını bölmesi çelişkisine ulaştırır. O zaman $\alpha \geq 3$ olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.22. $n > 1$ bir tamsayı olsun. Bu durumda, $\mathbb{Z}_n$ kümesi bir $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-indirgenmiş halkadır ancak ve ancak kübü n sayısını bölen bir asal sayı yoktur.

İspat. $\mathbb{Z}_n$ kümesi bir $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-indirgenmiş halka olsun. $char\mathbb{Z}_n = $ n olduğundan, *Teorem 4.2.21* uygulanırsa kübü n sayısını bölen bir asal sayı yoktur.

Tersine, p^3 böler n olacak şekilde bir p asalının olmadığını kabul edelim. Buna göre, her bir $i \in \{1, \dots, r\}$ için $1 \leq \alpha_i \leq 2$ olmak üzere, $n = p_1{}^{\alpha_1} \cdots p_r{}^{\alpha_r}$ olacak şekilde birbirinden farklı $p_1, \dots, p_r$ asalları ve $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tamsayıları vardır. $\mathbb{Z}_n$ birimli ve değişmeli halka olduğundan *Lemma 4.1.12* ile $S_{\mathbb{Z}_n} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid \bar{a}^2 = \bar{0}\}$ dir. Buna göre $\bar{a} \in S_{\mathbb{Z}_n}$ alındığında, $n = p_1{}^{\alpha_1} \cdots p_r{}^{\alpha_r}$ sayısı a^2 elemanını böler. Öyleyse

$$S_{\mathbb{Z}_n} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid \bar{a}^2 = \bar{0}\} = (\overline{p_1 \cdots p_r})$$

olur. Şimdi, $\bar{a}^2 \in S_{\mathbb{Z}_n}$ olacak şekilde bir $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ alalım. Buna göre, herhangi k ve t tamsayıları için,

$$a^2 = p_1 \cdots p_r k + nt$$

olur. Bu eşitlikten, p_i sayısı a^2 elemanını böler. Dolayısıyla, p_i, a elemanını böler. Bu ise, bazı $q \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $a = p_1 \cdots p_r q$ demektir. Buna göre, $\bar{a} = \overline{p_1 \cdots p_r q} \in S_{\mathbb{Z}_n}$ elde edilir. *Önerme 4.2.7* uygulanırsa, $\mathbb{Z}_n$ bir $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-indirgenmiş halka olur.

BÖLÜM 5

$|S_R|$-YARIASAL VE $|S_R|$-ASAL HALKALAR

5.1. Tanımı ve Temel Özellikleri

Bu kısımda önceki bölümde tanımı verilen S_R kümesi yardımıyla $|S_R|$-yarıasal halka ve $|S_R|$-asal halka adı verilen iki yeni yapı tanımlanmış, asal ve yarıasal halka arasındaki ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca bu halkaların asal, yarıasal halkanın daha geneli olduğunu gösteren bazı örnekler verilmiştir.

Tanım 5.1.1. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Buna göre,

i. $aRa \subset S_R$ olduğunda $a \in S_R$ oluyorsa, R halkasına, ***$|S_R|$-yarıasal halka***,

ii. $aRb \subset S_R$ olduğunda $a \in S_R$ veya $b \in S_R$ oluyorsa, R halkasına, ***$|S_R|$-asal halka*** denir.

Uyarı 5.1.2 R bir halka olmak üzere, aşağıdaki durumlar geçerlidir:

i. R bir $|S_R|$-yarıasal halka ($|S_R|$-asal halka) ve S_R, R halkasının bir ideali ise, S_R bir yarıasal ideal (asal ideal) olur.

ii. S_R, R halkasının bir yarıasal ideali (asal ideali) ise, R bir $|S_R|$-yarıasal halka ($|S_R|$-asal halka) olur.

Uyarı 5.1.3 Eğer R bir yarıasal halka ise, $|S_R| = 1$ olur. Böylece, her yarıasal halka, 1-yarıasal halka olur. Öte yandan, $S_{\mathbb{Z}_{12}} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ bir yarıasal ideal olduğundan, $\mathbb{Z}_{12}$ bir 2-yarıasal halkadır. Fakat bir yarıasal halka değildir.

Teorem 5.1.4. p bir asal sayı olsun. Buna göre $\mathbb{Z}_{p^2}$ bir p-asal halkadır.

İspat. *Önerme 4.2.18* kullanılırsa $S_{\mathbb{Z}_{p^2}} = (\bar{p})$, yani $\left|S_{\mathbb{Z}_{p^2}}\right| = p$ olur. $\bar{a},\bar{b} \in \mathbb{Z}_{p^2}$ için $\bar{a}\bar{b} \in (\bar{p})$ olduğunu kabul edelim. Buna göre p, a elemanını veya b elamanını böler. Öyleyse $\bar{a} \in (\bar{p})$ veya $\bar{b} \in (\bar{p})$ olur. Yani $S_{\mathbb{Z}_{p^2}} = (\bar{p})$ bir asal idealdir. *Uyarı 5.1.2 (ii)* kullanıldığında, $\mathbb{Z}_{p^2}$ bir p-asal halka olur.

Uyarı 5.1.5. Bir p-asal halka, asal halka olmak zorunda değildir. Örneğin, $3\mathbb{Z}_9 6 = 0$ olduğu halde $3 \neq 0, 6 \neq 0$ dır. Yani $\mathbb{Z}_9$ bir asal halka değildir.

Teorem 5.1.6. $p \neq q$ iki asal sayı olsun. Buna göre, $\mathbb{Z}_{qp^2}$ bir p-yarıasal halkadır.

İspat: $x \in S_{\mathbb{Z}_{qp^2}}$ olsun. Buna göre, p ve q asalları x^2 elemanını böler. p ve q asal olduğundan, p ve q, x elemanını böler. Yani, $x = qpc$ olacak şekilde $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece,

$$S_{\mathbb{Z}_{qp^2}} = \{\bar{0}, \overline{qp}, 2\overline{qp}, \dots, (p-1)\overline{qp}\} = (\overline{pq})$$

elde edilir. Yani, $|S_{\mathbb{Z}_{qp^2}}| = p$ olur. $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{qp^2}$ için $\bar{a}\mathbb{Z}_{qp^2}\bar{a} \subset (\overline{pq})$ olsun. Buna göre p ve q, a elemanını böler. p ve q asal sayılar olduğuna göre pq elemanı da a elemanını böler. Öyleyse $\bar{a} \in (\overline{pq})$ olur. Dolayısıyla $S_{\mathbb{Z}_{qp^2}} = (\overline{pq})$, $\mathbb{Z}_{qp^2}$ halkasının bir yarıasal idealidir. Burada *Uyarı 5.1.2 (ii)* kullanıldığında, $\mathbb{Z}_{qp^2}$ bir p-yarıasal halka olur.

Uyarı 5.1.7. Fakat bir p-yarıasal halka, p-asal halka olmak zorunda değildir. Örneğin, $(3)(2) \subset (6) = S_{\mathbb{Z}_{12}}$ olduğu halde $(3) \nsubseteq (6)$ ve $(2) \nsubseteq (6)$ dır. Öyleyse, $S_{\mathbb{Z}_{12}}$ bir asal ideal değildir.

Örnek 5.1.8. $D = \{a + \varepsilon b \mid a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ kümesi,

$$(a + \varepsilon b) + (c + \varepsilon d) = (a + c) + \varepsilon(b + d)$$
$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon(ad + bc)$$

şeklinde tanımlanan işlemlere göre bir halkadır. $a + \varepsilon b \in S_D$ olsun. Buna göre,

$$0_D = (a + \varepsilon b)(x + \varepsilon y)(a + \varepsilon b) = axa + \varepsilon(abx + a^2 y + abx)$$

olur. Yani, her $x \in \mathbb{R}$ için $axa = 0$ olur. Buradan da $a = 0$ elde edilir. Öyleyse,

$$S_D = \{\varepsilon b \mid b \in \mathbb{R}\} = \varepsilon\mathbb{R}$$

bulunur. Şimdi $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) \in \varepsilon\mathbb{R}$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse,

$$ac + \varepsilon(ad + bc) = \varepsilon x$$

olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. Bu ise $ac = 0$, yani $a = 0$ veya $c = 0$ demektir. Böylece, $(a + \varepsilon b) \in \varepsilon\mathbb{R}$ veya $(c + \varepsilon d) \in \varepsilon\mathbb{R}$ dir. Sonuç olarak, $S_D = \varepsilon\mathbb{R}$ bir asal idealdir. Dolayısıyla *Uyarı 5.1.2 (ii)* kullanıldığında D bir $|\mathbb{R}|$-asal halka olur.

Uyarı 5.1.9. $S = \{R \mid R \text{ bir } |S_R|\text{-yarıasal halka}\}$ veya

$P = \{R \mid R \text{ bir } |S_R|\text{- asal halka}\}$

kümeleri üzerinde

$$R_1 \sim R_2 \iff |S_{R_1}| = |S_{R_2}|$$

şeklinde bir bağıntı tanımlansın. Eşitlik bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan bu bağıntı da bir denklik bağıntısı olur. Öyleyse, $\bar{R} = \{R_1 \big| |S_{R_1}| = |S_R|\}$ şeklindeki denklik sınıflarından bahsedilebilir. O zaman, asal ve yarıasal halka üzerinde araştırılan bazı problemler, 2-asal, 2-yarıasal, 3-asal, 3-yarıasal gibi halkalara taşınabilir.

5.2. Asal Radikal ile İlgili Bazı Sonuçlar

McCoy (1964, *Teorem 4.27*), bir R halkası asal halkaların bir altdirek toplamına izomorftur ancak ve ancak $\beta(R) = (0)$ olduğunu kanıtlamıştır.

Çalışmanın bu kısmında ise bir halkanın $|S_R|$-asal halkaların bir altdirekt toplamına izomorf olması ile ilgili yapılan incelemeler ve bu incelemelerin sonucunda bulunan bir genelleştirme verilmiştir.

Uyarı 5.2.1. R bir halka ve I onun bir ideali olmak üzere R/I kalan sınıf halkasını alalım. Buna göre

$$\begin{aligned} S_{R/I} &= \{ a+I \in R/I \mid (a+I)\,(R/I)\,(a+I) = 0_R + I \} \\ &= \{ a+I \mid aRa \subset I \} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Gösterim 5.2.2 R bir halka, A onun boş olmayan bir altkümesi olmak üzere,

$$\mathcal{L}_R(A) = \{a \in R \mid aRa \subset A\}$$

şeklinde gösterilsin.

Önerme 5.2.3 R bir halka, A, B onun boş olmayan iki altkümesi olmak üzere,

$$A \subset B \text{ ise } \mathcal{L}_R(A) \subset \mathcal{L}_R(B)$$

önermesi doğrudur.

İspat. $a \in \mathcal{L}_R(A)$ olsun. Buna göre, $aRa \subset A \subset B$, yani $a \in \mathcal{L}_R(B)$ olur. Sonuç olarak, $\mathcal{L}_R(A) \subset \mathcal{L}_R(B)$ bulunur.

Önerme 5.2.4. R bir halka olmak üzere, $\mathcal{L}_R(\{0\}) = S_R$ dir.

İspat. S_R kümesinin tanımı kullanılarak, $\mathcal{L}_R(\{0\}) = \{a \in R \mid aRa = \{0\}\} = S_R$ eşitliği elde edilir.

Uyarı 5.2.5 R bir halka, A onun bir altkümesi olsun. Bu durumda, $\mathcal{L}_R(A)$ toplamsal olmayabilir. Örneğin;

$$R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}\right\} \text{ ve } A = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}\right\}$$

olsun. $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_R(A)$ alalım. Buna göre, her $a, b \in \mathbb{R}$ için $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$, yani her $a \in \mathbb{R}$ için $\begin{pmatrix} ax^2 & axy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{A}$ olur. Bu ise, her $a \in \mathbb{R}$ için $axy = 0$, yani $xy = 0$ demektir. Öyleyse,

$$\mathcal{L}_R(A) = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R},\ x = 0 \text{ veya } y = 0\right\}$$

bulunur. Eğer, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_R(A)$ alınırsa, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{L}_R(A)$ olur. Yani, $\mathcal{L}_R(A)$ toplamsal değildir.

Önerme 5.2.6. R bir halka, I, R çarpımsal yarıgrubunun bir yarıgrup sağ (sol) ideali olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. $I \subset \mathcal{L}_R(I)$.

ii. $\mathcal{L}_R(I)$, R çarpımsal yarıgrubunun bir yarıgrup sağ (sol) idealidir.

iii. $S_R \subset \mathcal{L}_R(I)$.

iv. I, R halkasının bir ideali, $\pi : R \to R/I$ dönüşümü $\pi(r) = r + I$ şeklinde tanımlanan doğal epimorfizma olsun. Bu durumda $\pi(\mathcal{L}_R(I)) = S_{R/I}$ ve $\pi^{-1}(S_{R/I}) = \mathcal{L}_R(I)$ olur.

v. I, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre

I kümesi bir yarıasal idealdir ancak ve ancak $I = \mathcal{L}_R(I)$ dır.

İspat. ***(i)*** $a \in I$ olsun. I yarıgrup ideal olduğundan, $aRa \subset I$ olur. Öyleyse, $a \in \mathcal{L}_R(I)$ dır. Böylece, $I \subset \mathcal{L}_R(I)$ bulunur.

(ii) $a \in \mathcal{L}_R(I)$ olsun. $r \in R$ elemanı için, $arRar \subset (aRa)r \subset Ir \subset I$ olduğundan $ar \in \mathcal{L}_R(I)$ dır. Yani, $\mathcal{L}_R(I)$ yarıgrup sağ idealdir. $raRra \subset r(aRa) \subset rI \subset I$ olduğundan $ra \in \mathcal{L}_R(I)$ sonucuna yani $\mathcal{L}_R(I)$ kümesinin bir yarıgrup sol ideal olduğu sonucuna varılır.

(iii) $a \in S_R$ olduğunu varsayalım. Buna göre, $aRa = (0) \subset I$, yani $a \in \mathcal{L}_R(I)$ olur. Öyleyse, $S_R \subset \mathcal{L}_R(I)$ dır.

(iv) $\pi(\mathcal{L}_R(I)) = \{\pi(a) \mid a \in \mathcal{L}_R(I)\} = \{a + I \mid aRa \subset I\} = S_{R/I}$ eşitliğinden dolayı $\pi(\mathcal{L}_R(I)) = S_{R/I}$ sonucu elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(S_{R/I}) &= \{a \in R \mid \pi(a) \in S_{R/I}\} = \{a \in R \mid a + I \in S_{R/I}\} \\ &= \{a \in R \mid aRa \subset I\} = \mathcal{L}_R(I) \end{aligned}$$

eşitliğinden ise $\pi^{-1}(S_{R/I}) = \mathcal{L}_R(I)$ elde edilir.

(v) $a \in \mathcal{L}_R(I)$ olsun. Buna göre, $aRa \subset I$ olur. Hipotez kullanılarak, $a \in I$ yazılır. Yani, $\mathcal{L}_R(I) \subset I$ olur. Diğer yandan, *(i)* ile $I \subset \mathcal{L}_R(I)$ bulunur. Dolayısıyla eşitlik sağlanır. Tersine, $\mathcal{L}_R(I) = I$ ve $a \in R$ için $aRa \subset I$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{L}_R(I)$ kümesinin tanımı kullanıldığında $a \in \mathcal{L}_R(I)$ yani hipotezden $a \in I$ olur. Dolayısıyla, I bir yarıasal idealdir.

Önerme 5.2.7. R bir halka olsun. Bu durumda,

R halkası bir $|S_R|$-yarıasal halkadır ancak ve ancak $\mathcal{L}_R(S_R) = S_R$ dir.

İspat. R bir $|S_R|$-yarıasal halka ve $a \in \mathcal{L}_R(S_R)$ olsun. Bu durumda, $aRa \subset S_R$, yani $a \in S_R$ olur. Böylece, $\mathcal{L}_R(S_R) \subset S_R$ elde edilir. *Önerme 4.1.5 (i)* ve *Önerme 5.2.6 (i)* kullanılarak, $\mathcal{L}_R(S_R) = S_R$ bulunur. Tersine, $aRa \subset S_R$ olsun. Böylece, $a \in \mathcal{L}_R(S_R) = S_R$, yani $a \in S_R$ olur. Dolayısıyla, R bir $|S_R|$-yarıasal halkadır.

Teorem 5.2.8 R bir halka, I onun bir ideali ve $\pi : R \to R/I$ dönüşümü $\pi(r) = r + I$ şeklinde tanımlanan doğal epimorfizma olsun. Eğer, R/I bir $|S_{R/I}|$-asal halka ve $S_{R/I}$, R/I halkasının bir ideali ise $\pi^{-1}(S_{R/I}) = \mathcal{L}_R(I)$, R halkasının bir asal idealidir. Tersine, $\pi^{-1}(S_{R/I}) = \mathcal{L}_R(I)$, R halkasının bir asal ideali ise R/I bir $|S_{R/I}|$-asal halkadır.

İspat. R/I bir $|S_{R/_I}|$-asal halka olsun. *Uyarı 5.1.2 (i)* kullanılırsa, $S_{R/I}$ bir asal ideal olur. Böylece, $\pi^{-1}(S_{R/I}) = \mathcal{L}_R(I)$ bir asal idealdir. Tersine, $\pi^{-1}(S_{R/I}) = \mathcal{L}_R(I)$, R halkasının bir asal ideali olsun. $\mathcal{L}_R(I)$ bir ideal ve $I \subset \mathcal{L}_R(I)$ olduğundan *III.İzomorfizma Teoremi* ile $\mathcal{L}_R(I)/I$, R/I halkasının bir ideali olur ve böylece

$$(R/I)/(\mathcal{L}_R(I)/I) \cong R/\mathcal{L}_R(I) \tag{5.1}$$

elde edilir. Öte yandan *Önerme 5.2.6 (iv)* kullanıldığında ise

$$\mathcal{L}_R(I)/I = \pi(\mathcal{L}_R(I)) = S_{R/I}$$

bulunur. (5.1) ile birlikte

$$(R/I)/\left(S_{R/I}\right) \cong R/\mathcal{L}_R(I)$$

elde edilir. Burada $\mathcal{L}_R(I)$ bir asal ideal olduğundan *Önerme 2.48* ile $R/\mathcal{L}_R(I)$ bir asal halkadır. Bu yüzden, yukarıdaki izomorfizma ile $(R/I)/\left(S_{R/I}\right)$ halkası da bir asal halka olur. Yani, $S_{R/I}$ bir asal idealdir. Sonuç olarak *Uyarı 5.1.2 (ii)* ile R/I bir $|S_{R/I}|$-asal halka olur.

Lemma 5.2.9 R bir halka olsun. Eğer $|S_R|$-yarıasal halka, S_R onun bir ideali ise $\beta(R) = S_R$ dir. Tersine $\beta(R) = S_R$ ise R bir $|S_R|$-yarıasal halka olur.

İspat. R bir $|S_R|$-yarıasal halka ve S_R onun bir ideali olsun. *Sonuç 4.1.8* ile $S_R \subset \beta(R)$ bulunur. *Uyarı 5.1.2 (i)* ile S_R bir yarıasal ideal olduğuna göre *Teorem 2.31 (ii)* kullanılarak $\beta(R) \subset S_R$ olur. Dolayısıyla, $\beta(R) = S_R$ eşitliği sağlanır. Tersine $\beta(R) = S_R$ olsun. Bu durumda S_R bir yarıasal ideal olur. Öyleyse R bir $|S_R|$-yarıasal halkadır.

Sonuç 5.2.10. R bir $|S_R|$-yarıasal halka, I, S_R onun iki ideali ve $\beta(I)$, I halkasının asal radikali olsun. Buna göre, $\beta(I) = I \cap S_R$ dir.

İspat. R bir $|S_R|$-yarıasal halka, I, S_R onun iki ideali ve $\beta(I)$, I halkasının asal radikali olsun. *Teorem 2.53* ve *Lemma 5.2.9* kullanılarak, $\beta(I) = I \cap \beta(R) = I \cap S_R$ eşitliği sağlanır.

Teorem 5.2.11. R bir $|S_R|$-yarıasal halka ve S_R onun bir esas ideali olsun. Buna göre, $M_n(R)$ bir $|S_{M_n(R)}|$-yarıasal halkadır ve $|S_{M_n(R)}| = |S_R|^{n^2}$ dir.

İspat. R bir $|S_R|$-yarıasal halka ve S_R onun bir esas ideali olsun. Buna göre, *Lemma 5.2.9* ile $\beta(R) = S_R$ olur. *Teorem 2.54 ve Önerme 4.1.9 (iii)* kullanılırsa,

$$\beta(M_n(R)) = M_n(\beta(R)) = M_n(S_R) = S_{M_n(R)}$$

eşitliği elde edilir. *Teorem 2.31 (ii)* ile $\beta(M_n(R))$ bir yarıasal ideal olduğuna göre, $S_{M_n(R)}$ kümesi de bir yarıasal ideal olur. Böylece, *Uyarı 5.1.2 (ii)* ile $M_n(R)$ bir $|S_{M_n(R)}|$-yarıasal halka olur. *Önerme 4.1.9 (iii)* kullanılarak da $|S_{M_n(R)}| = |S_R|^{n^2}$ yazılır.

Lemma 5.2.12. R bir halka ve $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ onun ideallerinin bir ailesi olsun. Buna göre,

$$\mathcal{L}_R\left(\bigcap_i I_i\right) = \bigcap_i \mathcal{L}_R(I_i)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $a \in \mathcal{L}_R(\bigcap_i I_i)$ olsun. O zaman, $aRa \subset \bigcap_i I_i$ olur. Böylece, her $i \in \Lambda$ için $aRa \subset I_i$ olur. Yani, her $i \in \Lambda$ için, $a \in \mathcal{L}_R(I_i)$ bulunur. Bu yüzden, $a \in \bigcap_i \mathcal{L}_R(I_i)$ elde edilir. Böylece, $\mathcal{L}_R(\bigcap_i I_i) \subset \bigcap_i \mathcal{L}_R(I_i)$ olur. Benzer işlemler ile, $\bigcap_i \mathcal{L}_R(I_i) \subset \bigcap_i \mathcal{L}_R(I_i)$ olduğu da görülür. Dolayısıyla, istenen eşitlik sağlanmış olur.

Lemma 5.2.13. R bir halka, I bir ideali olsun. Eğer I yarıasal ideal ise, $\mathcal{L}_R(I^2) = I$ dır.

İspat. I bir yarıasal ideal olsun. Buna göre, *Önerme 5.2.3* ve *Önerme 5.2.6 (v)* kullanılarak

$$\mathcal{L}_R(I^2) \subset \mathcal{L}_R(I) = I$$

kapsaması elde edilir. Şimdi $a \in I$ alalım. I bir ideal olduğundan, $aRa \subset I^2$ yazılabilir. Yani, $a \in \mathcal{L}_R(I^2)$ dır. Dolayısıyla, $I \subset \mathcal{L}_R(I^2)$ olur. Böylece istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 5.2.14. R bir halka, $\{H_i\}_{i\in\Lambda}$ halkalar ailesi ve her bir $i \in \Lambda$ için S_{H_i}, H_i halkasının ideali olsun. Eğer, R halkası H_i, $|S_{H_i}|$-asal halkalarının bir altdirekt toplamına izomorf ise $\beta(R) = S_R$ dir.

İspat. R halkası H_i, $|S_{H_i}|$-asal halkalarının bir altdirekt toplamına izomorf olsun. *Teorem 2.56* kullanıldığında, her bir $i \in \Lambda$ için, $R/K_i \cong H_i$ and $\bigcap_i K_i = (0)$ olacak şekilde R halkasının K_i ideallerinin varlığı söylenebilir. Üstelik, *Teorem 5.2.8* uygulandığında, $\pi^{-1}(S_{H_i}) = \mathcal{L}_R(K_i)$ bir asal ideal olur. Öyleyse, *Teorem 2.31 (i)*, *Lemma 5.2.12* ve *Önerme 5.2.14* kullanılarak, $\{P_i\}_{i\in\Lambda}$ kümesi R halkasının tüm asal ideallerinin ailesi olmak üzere

$$\beta(R) = \bigcap_i P_i \subset \bigcap_i \mathcal{L}_R(K_i) = \mathcal{L}_R\left(\bigcap_i K_i\right) = \mathcal{L}_R((0)) = S_R$$

yazılabilir. Yani $\beta(R) \subset S_R$ olur. Bu durumda, *Sonuç 4.1.8* kullanılarak, $\beta(R) = S_R$ eşitliği elde edilir.

Bu teoremin tersinin ispatında bize yardımcı olabilecek bazı önermeler verelim.

Uyarı 5.2.15. R birimli ve değişmeli bir halka, I, J onun eşmaksimal idealleri olsun. Buna göre I^2 ile J ve I ile J^2 idealleri de eşmaksimal olur.

İspat. R birimli olduğundan $R = R^2$ dir. Öte yandan I, J eşmaksimal idealler olduğuna göre $R = R^2 = (I + J)^2$ eşitliği geçerlidir. $x \in R$ alalım. Bu durumda $a \in I, b \in J$ olmak üzere $x = (a + b)^2$ yazılır. Buna göre

$$x = a^2 + ab + ba + b^2 \in I^2 + J$$

olur. Yani $R \subset I^2 + J$ dolayısıyla $I^2 + J = R$ elde edilir. Öyleyse, I^2 ile J idealleri eşmaksimal ideallerdir. Benzer şekilde, I ile J^2 ideallerinin de eşmaksimal olduğu görülür.

Bu durumda *Önerme 2.59* düşünülerek bu uyarının aşağıdaki gibi bir sonucu verilebilir:

Sonuç 5.2.16. R birimli, değişmeli bir halka ve $\{I_i \mid 1 \leq i \leq n \text{ ve } n \geq 2\}$ kümesi R halkasının ikili eşmaksimal ideallerinin bir ailesi olsun. Buna göre,

$$\left(\bigcap_i I_i\right)^2 = \bigcap_i (I_i)^2$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5.2.17. R birimli değişmeli bir halka, $(S_R)^2 = (0)$ ve R halkasının her asal ideal çifti ikili eşmaksimal olsun. Eğer, $\beta(R) = S_R$ ise R halkası $i \in \Lambda$ olmak üzere H_i, $|S_{H_i}|$-asal halkalarının bir altdirekt toplamına izomorftur.

İspat. $\beta(R) = S_R$ olsun. *Teorem 2.31 (i)* uygulanırsa, $\{P_i\}_{i \in \Lambda}$ kümesi R halkasının tüm asal ideallerinin ailesi olmak üzere, $\beta(R) = S_R = \bigcap_i P_i$ olur. *Sonuç 5.2.16* uygulanarak, $\bigcap_i {P_i}^2 = (\bigcap_i P_i)^2 = (S_R)^2 = (0)$ olur. Buna göre, $(P_i)^2 = K_i$ olmak üzere, $\bigcap_i K_i = (0)$ yazılır. *Lemma 5.2.13* kullanıldığında $\mathcal{L}_R(K_i) = \mathcal{L}_R((P_i)^2) = P_i$ eşitliği bulunur. Yani $\mathcal{L}_R(K_i)$ bir asal idealdir. *Teorem 5.2.8* ile R/K_i bir $|S_{R/K_i}|$-asal halka olur. $0 \neq r \in R$ ve $\pi_i: R \to R/K_i$ doğal epimorfizma olmak üzere her bir $i \in \Lambda$ için $\pi_i(r) = 0$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse, $r \in Ker\pi_i = K_i$, yani $r \in \bigcap_i K_i = (0)$ bulunur. Bu durum $r \neq 0$ olması ile çelişir. O zaman, *Teorem 2.55* ile $H_i = R/K_i$ olmak üzere, R halkası H_i, $|S_{H_i}|$-asal halkalarının bir altdirekt toplamına izomorf olur.

Örnek 5.2.18 $R = \mathbb{Z}_{12}$ olsun. Buna göre, $S_R = \{0,6\}$ olur. (2),(3) idealleri R halkasının asal idealleri olduğundan $\beta(R) = (2) \cap (3) = (6) = S_R$ ve $(S_R)^2 = (0)$ olur. $K_1 = (2)^2 = (4)$ ve $K_2 = (3)^2 = (3)$ olmak üzere

$$R/K_1 = R/(4) = \{0 + (4), 1 + (4), 2 + (4), 3 + (4)\} \cong \mathbb{Z}_4$$

ve

$$R/K_2 = R/(3) = \{0 + (3), 1 + (3), 2 + (3)\} \cong \mathbb{Z}_3$$

olur. Burada $\mathbb{Z}_4$, 2-asal halka, $\mathbb{Z}_3$ asal halka yani 1-asal halkadır. Gerçekten de, $12 = 2^2 3$ olarak yazılabildiğinden $\mathbb{Z}_{12}$ halkası $\mathbb{Z}_4$ ile $\mathbb{Z}_3$ halkalarının bir altdirekt toplamına izomorf olur.

5.3. Kesirler Halkası ve Yerelleştirme ile İlgili Bazı Sonuçlar

Bu kısımda bir $|S_R|$-asal halkasının yerelleştirmesi incelenmiş ve yarıasallığının kaynağını bulmak için bir yöntem verilmiştir.

Uyarı 5.3.1 (Hungerford, 1974, III, *sf.142*) R değişmeli bir halka ve P onun bir asal ideali olsun. Buna gore, P ve $S = R - P$ kümeleri çarpımsal kümedir.

İspat. P idealinin çarpımsal küme olduğu açıktır. $a, b \in S$ olsun. Öyleyse, $a, b \notin P$ olur. *Önerme 2.22* ile $ab \notin P$ yazılabilir. Bu ise $ab \in S$ demektir. Bu yüzden S bir çarpımsal kümedir.

Uyarı 5.3.2 R değişmeli $|S_R|$-asal halka ve S_R onun bir ideali olsun. Buna göre, *Uyarı 5.3.1* ile $S = R - S_R$ bir çarpımsal küme olur. Öyleyse, $S^{-1}R = R_{S_R}$ yerelleştirmesinden bahsedilebilir.

Teorem 5.3.3 R birimli, değişmeli $|S_R|$-asal halka, S_R onun bir ideali ve $S = R - S_R$ olsun. Buna göre, $S_{S^{-1}R} = S^{-1}S_R$ dir.

İspat. $\frac{r}{s} \in S_{S^{-1}R}$ olsun. $S_{S^{-1}R}$ kümesinin tanımından,

$$\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{x}{s_1}\right)\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{0}{s}, \qquad \forall \frac{x}{s_1} \in S^{-1}R$$

olur. Burada (2.2) uygulanırsa

$$\frac{r^2 x}{s^2 s_1} = \frac{0}{s}, \qquad \forall x \in R, s_1 \in S$$

bulunur. (2.1) kullanıldığında ise

$$(r^2 x s)s_2 = 0, \forall x \in R, \exists s_2 \in S$$

elde edilir. Böylece, herhangi bir $s \in S$ için, $r^2 R s = (0) \subset S_R$ olur. S_R kümesinin asallığından dolayı, $r \in S_R$ veya $s \in S_R$ olur. $s \in S$ olduğuna göre, $s \in S_R$ olamaz. Dolayısıyla, $r \in S_R$ olmalıdır. Böylece, $\frac{r}{s} \in S^{-1}S_R$ yazılır. O zaman, $S_{S^{-1}R} \subset S^{-1}S_R$ olur.

$\frac{r}{s} \in S^{-1}S_R$ olduğunu kabul edelim. Buna göre, $r \in S_R$ ve $s \in S$ olur. Her $\frac{x}{s_1} \in S^{-1}R$ için,

$$\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{x}{s_1}\right)\left(\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{rxr}{ss_1s}\right)=\frac{0}{s}$$

bulunur. Yani, $\frac{r}{s}\in S_{S^{-1}R}$ dir. Bu yüzden $S^{-1}S_R\subset S_{S^{-1}R}$ yazılır. Böylece istenen eşitlik sağlanır.

Uyarı 5.3.4. R birimli, değişmeli $|S_R|$-asal halka, S_R onun bir ideali olsun. Buna göre, *Uyarı 5.1.2 (i)* ile S_R bir asal idealdir. $S\cap S_R=\emptyset$ olduğundan *Lemma 2.63 (ii)* kullanıldığında $S^{-1}S_R$ kümesi $S^{-1}R$ halkasının bir asal ideali olur. Böylece, $S_{S^{-1}R}=S^{-1}S_R$ bir asal ideal olur. Sonuç olarak, $S^{-1}R$ bir $|S^{-1}S_R|$-asal halkadır.

Örnek 5.3.5. $S_{\mathbb{Z}_9}=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6}\}$ olduğuna göre, $S=\mathbb{Z}_9-S_{\mathbb{Z}_9}=\{\bar{1},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{7},\bar{8}\}$ bulunur. $\frac{x}{y}\in S_{S^{-1}\mathbb{Z}_9}$ olsun. Böylece her $\frac{r}{s}\in S^{-1}\mathbb{Z}_9$ için $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{0}{s}$, yani $\frac{xrx}{ysy}=\frac{0}{s}$ olur. (2.1) ile

$$x^2rss_1=0,\forall r\in\mathbb{Z}_9,s\in S,\exists s_1\in S$$

bulunur. Yani $x^2s_1=0$ olacak şekilde $s_1\in S$ vardır. S kümesinin her elemanı tersinir olduğuna göre $x^2=0$ bulunur. Bu durumda $x=\bar{0},\bar{3},\bar{6}$ olabilir. Bu ise $x\in S_{\mathbb{Z}_9}$ demektir. Buna göre

$$S_{S^{-1}\mathbb{Z}_9}=\left\{\frac{x}{y}\,\middle|\,x\in S_{\mathbb{Z}_9},y\in S\right\}=S^{-1}S_{\mathbb{Z}_9}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$\frac{\bar{3}}{\bar{4}}=\frac{\bar{3}}{\bar{7}}=\frac{\bar{6}}{\bar{2}}=\frac{\bar{6}}{\bar{5}}=\frac{\bar{6}}{\bar{8}}=\frac{\bar{3}}{\bar{1}}$$

ve

$$\frac{\bar{3}}{\bar{5}}=\frac{\bar{3}}{\bar{8}}=\frac{\bar{6}}{\bar{1}}=\frac{\bar{6}}{\bar{4}}=\frac{\bar{6}}{\bar{7}}=\frac{\bar{3}}{\bar{2}}$$

olduğu kullanılarak

$$S_{S^{-1}\mathbb{Z}_9}=S^{-1}S_{\mathbb{Z}_9}=\left\{\frac{\bar{0}}{\bar{1}},\frac{\bar{3}}{\bar{1}},\frac{\bar{3}}{\bar{2}}\right\}$$

bulunur.

5.4. Lie Çarpım Üzerindeki Bazı Genelleştirmeler

Herstein (1970) yaptığı çalışmada, R, 2-burulmasız olan bir yarıasal halka ve U onun bir Lie ideali olmak üzere şu sonuçları elde etmiştir. *(i)* $[U,U]\subset Z(R)$ *ise* $U\subset Z(R)$ dir. *(ii)* $t\in R$ için $\big[[U,U],t\big]=(0)$ ise $[U,t]=(0)$ dır. *(iii)* $t\in R$ için $\big[t,[t,U]\big]=(0)$ ise $[t,U]=(0)$ dır. Ayrıca Herstein (1976, *Lemma 1.3*), R, 2-burulmasız olan bir yarıasal halka, $U\neq(0)$ onun hem Lie ideali hem de althalkası olmak üzere $U\subset Z(R)$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsadığını kanıtlamıştır.

Bu kısımda, yukarıda verilen bu teoriler bir $|S_R|$-yarıasal halka için genelleştirilmiştir.

Önerme 5.4.1. $R,$ 2-burulmasız halka, $x \in R$ olsun. Buna göre, $2x \in S_R$ ise $x \in S_R$ dir.

İspat. $2x \in S_R$ olsun. S_R kümesinin tanımından $(2x)R(2x) = (0)$ olur. R, 2-burulmasız olduğundan $xRx = (0)$ olur. Böylece, $x \in S_R$ bulunur.

Önerme 5.4.2. R bir halka, Q onun yarıasal ideali olsun. Buna göre, $Z(R) - Q$ kümesinde nilpotent eleman yoktur.

İspat. $\alpha \in Z(R) - Q$ nilpotent elemanını alalım. O zaman, $\alpha^k = 0$ ve $\alpha^{(k-1)} \neq 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buna göre, $0 = \alpha^k = \alpha\alpha^{(k-1)}$, yani $\alpha R\alpha^{(k-1)} = (0)$ olur. Öyleyse, $\alpha^{(k-1)}R\alpha^{(k-1)} = (0) \subset Q$ bulunur. Q bir yarıasal ideal olduğundan, $\alpha^{(k-1)} \in Q$, yani $\alpha \in Q$ olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla, $Z(R) - Q$ kümesinde nilpotent eleman yoktur.

Lemma 5.4.3 R bir halka, Q onun ideali ve $d,$ R üzerinde bir türev olsun. Buna göre, aşağıdakiler sağlanır:

i. $M(Q) = \{r \in R \mid d(R)r \subset Q\}$ kümesi R halkasının bir idealidir.

ii. Q bir yarıasal ideal olmak üzere $R/M(Q)$ halkası 1-yarıasal, yani yarıasal, halkadır.

iii. $R,$ 2-burulmasız $|S_R|$-yarıasal bir halka ve S_R onun bir ideali ise $R/M(S_R)$ halkası 2-burulmasız olan 1-yarıasal, yani yarıasal halkadır.

İspat. ***(i)*** $a, b \in M(Q)$ olsun. Her $x \in R$ için $d(x)(a + b) = d(x)a + d(x)b \in Q$ olduğundan $a + b \in M(Q)$ dir. $m \in M(Q)$ ve $s \in R$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $d(x)ms \in Q,$ yani $ms \in M(Q)$ olur. Ayrıca $x \in R$ için $d(xs)m = d(x)sm + xd(s)m$ eşitliğinden, $d(x)sm \in Q$ bulunur. Yani, $sm \in M(Q)$ elde edilir. Sonuç olarak, $M(Q)$ bir idealdir.

(ii) $x + M(Q) \in S_{R/M(Q)}$ olsun. Buna göre, $xRx \subset M(Q)$ olur. $M(Q)$ kümesinin tanımı kullanıldığında her $y \in R$ için, $d(y)xRx \subset Q$ yani $d(y)xRd(y)x \subset d(y)xRx \subset Q$ olur. Q bir yarıasal ideal olduğundan her $y \in R$ için $d(y)x \in Q$ olur. Bu durumda, $x \in M(Q)$ bulunur. Bu ise, $x + M(Q) = 0_R + M(Q)$ demektir. Dolayısıyla, $R/M(Q)$ halkası 1-yarıasal halka olur.

(iii) $R/M(S_R)$, 1-yarıasal halka olduğundan, 2-burulmasız olduğunu göstermek yeterlidir. $x + M(S_R) \in R/M(S_R)$ olmak üzere $2(x + M(S_R)) = 0 + M(S_R)$ olsun. Bu durumda, $2x \in M(S_R)$ olur. $M(S_R)$ kümesinin tanımı kullanıldığında, her $y \in R$ için $d(y)(2x) \in S_R$ bulunur. *Önerme 5.4.1* uygulanırsa, her $y \in R$ için $d(y)x \in S_R$ elde edilir.

Bu ise $x \in M(S_R)$ demektir. Böylece, $x + M(S_R) = 0_R + M(S_R)$ bulunur. Dolayısıyla, $R/M(S_R)$ halkası 2-burulmasız halkadır.

Lemma 5.4.4. R bir halka, Q onun bir ideali, U bir Lie ideali olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler doğrudur:

- **i.** $M_1(Q) = \{x \in R \mid x[U,R] \subset Q\}$ ve $Q(M_1) = \{x \in R \mid M_1(Q)x \subset Q\}$ kümeleri, R halkasının iki idealidir.
- **ii.** Q bir yarıasal ideal olmak üzere $M_1(Q) \cap Q(M_1) \subset Q$ olur.

İspat. ***(i)*** $x, y \in M_1(Q)$ olsun. O zaman, her $u \in U, r \in R$ için

$$(x + y)[u,r] = x[u,r] + y[u,r] \in Q$$

olur. Yani, $x + y \in M_1(Q)$ olur. Böylece, $M_1(Q)$ toplamsal olur. Şimdi, $x \in M_1(Q), s \in R$ olduğunu kabul edelim. Buna göre, her $u \in U, r \in R$ için

$$sx[u,r] \in Q$$

olur. Yani, $sx \in M_1(Q)$ dir. Üstelik, $x[u,sr] \in Q$ ve $x[u,sr] = xs[u,r] + x[u,s]r$ olduğundan, $xs[u,r] \in Q$ yani $xs \in M_1(Q)$ bulunur. Sonuçta, $M_1(Q)$ kümesi R halkasının bir idealidir. Q toplamsal olduğundan, $Q(M_1)$ kümesi de toplamsaldır. $x \in Q(M_1), r \in R$ olsun. $M_1(Q)x \subset Q$ olduğundan $M_1(Q)xr \subset Q$ olur. Yani $xr \in Q(M_1)$ bulunur. Üstelik, $M_1(Q)r \subset M_1(Q)$ olduğu kullanılırsa, $M_1(Q)rx \subset Q$ elde edilir. Öyleyse, $rx \in Q(M_1)$ olur. Böylece, $Q(M_1)$ kümesi de R halkasının bir idealidir.

(ii) $x, y \in M_1(Q) \cap Q(M_1)$ olsun. Buna göre $x, y \in M_1(Q)$ ve $x, y \in Q(M_1)$ olur. $M_1(Q)y \subset Q$ ve $x \in M_1(Q)$ olduğuna göre $xy \in Q$ bulunur. $M_1(Q) \cap Q(M_1)$ bir ideal olduğundan $(M_1(Q) \cap Q(M_1))^2 \subset Q$ dir. Q yarıasal olduğuna göre $M_1(Q) \cap Q(M_1) \subset Q$ bulunur.

Lemma 5.4.5 R bir halka, Q bir ideali, U bir Lie ideali ve $M_1(Q)$, $Q(M_1)$ kümeleri *Lemma 5.4.4* ile verilen kümeler olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

- **i.** $M_2(Q) = \{x \in R \mid x[U,U] \subset Q\}$ ve $Q(M_2) = \{x \in R \mid M_2(Q)x \subset Q\}$ kümeleri R halkasının iki idealidir.
- **ii.** $M_1(Q) \subset M_2(Q)$,
- **iii.** $Q(M_2) \subset Q(M_1)$,
- **iv.** Q bir yarıasal ideal olmak üzere $M_2(Q) \cap Q(M_2) \subset Q$ dur.

İspat. ***(i)*** $M_2(Q)$ kümesinin toplamsal olduğu kolayca görülür. $x \in M_2(Q), r \in R$ olsun. $x[U,U] \subset Q$ olduğuna göre $rx[U,U] \subset Q$, yani $rx \in M_2(Q)$ olur. Öte yandan her $u, v \in U$ ve her $r \in R$ için, $[[u,v],r] = [u,[v,r]] + [[u,r],v] \in [U,U]$ olur. Bu durumda, $[[U,U],R] \subset [U,U]$ bulunur. Yani $[U,U]$ bir Lie idealdir. Buna göre $u, v \in U$

için,

$$x[[u,v],r] = x[u,v]r - xr[u,v]$$

eşitliğinde $[[u,v],r] \in [U,U]$ olur. Ayrıca, $x \in M_2(Q)$ olduğuna göre $x[[u,v],r] \in Q$ ve $x[u,v] \in Q$ dur. Q bir ideal olduğundan $xr[u,v] \in Q$ olmalıdır. Buna göre $xr[U,U] \subset Q$, yani $xr \in M_2(Q)$ olur. Yani, $M_2(Q)$ bir idealdir. Q toplamsal olduğundan, $Q(M_2)$ kümesi de toplamsal olur. $x \in Q(M_2), r \in R$ olsun. $M_2(Q)x \subset Q$ olduğundan $M_2(Q)xr \subset Q$ olur. Yani $xr \in Q(M_2)$ bulunur. Üstelik, $M_2(Q)r \subset M_2(Q)$ olduğu kullanılırsa, $M_2(Q)rx \subset Q$ elde edilir. Öyleyse, $rx \in Q(M_2)$ olur. Böylece, $Q(M_2)$ kümesi de R halkasının bir idealidir.

(ii) $x \in M_1(Q)$ olsun. Buna göre, $x[U,R] \subset Q$ olur. Burada, $x[U,U] \subset x[U,R] \subset Q$ yazılır. Böylece, $x \in M_2(Q)$ elde edilir.

(iii) $x \in Q(M_2)$ olsun. Buradan $M_2(Q)x \subset Q$ yazılır. *(ii)* kullanıldığında,

$$M_1(Q)x \subset M_2(Q)x \subset Q$$

olur. Böylece, $x \in Q(M_1)$ bulunur.

(iv) $M_2(Q)$ ve $Q(M_2)$ kümeleri ideal olduğuna göre, $M_2(Q) \cap Q(M_2)$ kümesi de bir ideal olur. *Lemma 5.4.4 (ii)* şıkkında uygulanan benzer bir yöntemle $M_2(Q) \cap Q(M_2) \subset Q$ elde edilir.

Teorem 5.4.6. R bir 2-burulmasız halka, U hem althalkası hem de bir Lie ideali olsun. Buna göre $[U,R] \cap Q = (0)$ olacak şekilde R halkasının bir Q yarıasal ideali varsa

$U \subset Z(R)$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat. U halkası değişmeli olmasın. O zaman, $xy - yx \neq 0$ olacak şekilde $x, y \in U$ vardır. U hem bir Lie ideal hem de bir althalka olduğundan, $r \in R$ olmak üzere, $[x,yr] = y[x,r] + [x,y]r$ eşitliği kullanılarak,

$$[x,y]r \in U, \quad \forall r \in R \tag{5.2}$$

yazılır. Herhangi bir $s \in R$ için $[[x,y]r,s] = [x,y]rs - s[x,y]r$ eşitliğinde (5.2) kullanıldığında, $R[x,y]R \subset U$ olur. Burada $R[x,y]R$ bir idealdir. Üstelik, $R[x,y]R \neq (0)$ dır. Çünkü, $R[x,y]R = (0)$ olsa, $(R[x,y])^2 = (0) \subset Q$ olur. Q bir yarıasal ideal olduğundan *Önerme 2.29* ile $R[x,y] \subset Q$ olur. Q bir ideal olduğundan, $[x,y]R[x,y] \subset Q$ olur. Q idealinin yarıasallığından, $[x,y] \subset Q$ bulunur. Aynı zamanda, $[x,y] \in [U,R]$ olduğundan, $[x,y] \in [U,R] \cap Q = (0)$ olur. Dolayısıyla, $[x,y] = 0$ çelişkisi elde edilir. Öyleyse, $R[x,y]R \neq (0)$ olmalıdır. Dolayısıyla, U sıfırdan farklı olan bir ideali kapsamış olur.

Şimdi, U halkasının değişmeli olduğunu kabul edelim. $a \in U$ alalım. Buna göre, her $x \in R$ için, $[a,x] \in U$ olur. U halkası değişmeli olduğundan,

$$[[a,x],a] = 0, \forall x \in R$$

bulunur. Burada, x yerine xy, $y \in R$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \big[[a,xy],a\big] \\ &= [x[a,y],a] + \big[[a,x]y,a\big] \\ &= x\big[[a,y],a\big] + [x,a][a,y] + [a,x][y,a] + \big[[a,x],a\big]y \\ &= -[a,x][a,y] - \ -[a,x][a,y] \end{aligned}$$

olur. Yani her $x,y \in R$ için $2[a,x][a,y] = 0$ olur. R, 2-burulmasız olduğundan

$$[a,x][a,y] = 0, \quad \forall x,y \in R$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine yx alınır ve aynı eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= [a,x][a,yx] \\ &= [a,x]y[a,x] + [a,x][a,y]x \\ &= [a,x]y[a,x] \end{aligned}$$

bulunur. Yani, $[a,x]R[a,x] = (0) \subset Q$ elde edilir. Q yarıasal olduğundan, $[a,x] \in Q$ olur. Aynı zamanda da $[a,x] \in [U,R]$ dır. Hipotez kullanılırsa, her $x \in R$ için $[a,x] = 0$ olur. Dolayısıyla, $a \in Z(R)$ dir. Öyleyse $U \subset Z(R)$ dir. Böylece ispat biter.

Lemma 5.4.7. R bir 2-burulmasız halka olsun. $t \in R$ için, $[t,R] \cap Q = (0)$ olacak şekilde R halkasının bir Q yarıasal ideali varsa,

$$\big[t,[t,R]\big] = (0) \text{ ise } t \in Z(R)$$

olur.

İspat. $x, y \in R$ alalım. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= \big[t,[t,xy]\big] \\ &= \big[\,t,x[t,y]\big] + \ [t,[t,x]y] \\ &= x[t,[t,y]] \ + \ 2[t,x][t,y] \ + \ [t,[t,x]]y \\ &= 2[t,x][t,y] \end{aligned}$$

bulunur. R, 2-burulmasız olduğuna göre

$$[t,x][t,y] = 0, \quad \forall x,y \in R$$

olur. Burada y yerine yz, $z \in R$ alınır ve aynı eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [t,x][t,yz] \\ &= [\,t,x]y[t,z] + [t,x][t,y]z \\ &= [\,t,x]y[t,z] \end{aligned}$$

olur. Yani, her $x,z \in R$ için $[\,t,x]R[t,z] = (0) \subset Q$ bulunur. Q bir yarıasal ideal olduğundan, $[t,R] \subset Q$ olur. Buna göre, $[t,R] = [t,R] \cap Q = (0)$ olur. Dolayısıyla, $[t,R] = (0)$, yani $t \in Z(R)$ sonucu elde edilir.

Uyarı 5.4.8. R halkası üzerinde tanımlanan $I_t(x) = [t, x]$ iç türevini alalım. Buna göre, *Lemma 5.4.7* kullanılarak

$$I_t^2(x) = 0 \text{ ise } I_t(x) = 0$$

yazılır.

Lemma 5.4.9 R, 2-burulmasız halka, U Lie ideali olsun. Buna göre $[U, R] \cap Q = (0)$ olacak şekilde R halkasının bir Q yarıasal ideali varsa

$$[\,U, U\,] \subset Z(R) \text{ ise } U \subset Z(R)$$

olur.

İspat. $[\,U, U] = (0)$ ise, $t \in U$ olduğunda $[t, [t, R]] = (0)$ olur. Aynı zamanda hipotezden, $[t, R] \cap Q = (0)$ olur. Öyleyse *Lemma 5.4.7* kullanılarak $t \in Z(R)$ elde edilir.

Şimdi $[U, U] \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\alpha = [s, t] \neq 0$ olacak biçimde $s, t \in U$ vardır. Hipotezden, $\alpha \in Z(R)$ dir. R üzerinde, $d(x) = [x, t]$ iç türevi alınırsa $d(s) = \alpha$ olur. Her $x \in R$ için

$$d^2(x) = [[x, t], t] \in [U, U] \subset Z(R)$$

olur. Yani, $d^2(x) \in Z(R)$ dir. $x \in R$ için, $\beta = d^2(x)$ olsun. Buna göre, $d^2(sx) \in Z(R)$ olur. Bununla birlikte, $d^2(s) = 0$ ve $s \in U$ olduğundan

$$d^2(sx) = d^2(s)x + 2d(s)d(x) + sd^2(x) = 2\alpha d(x) + \beta s$$

yazılabilir. Kısaca, herhangi $x \in R$ için, $2\alpha d(x) + \beta s \in Z(R)$ dir. $\alpha, \beta \in Z(R)$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= [s, 2\alpha d(x) + \beta s] \\ &= [s, 2\alpha d(x)] + [s, \beta s] \\ &= 2\alpha[s, d(x)] \end{aligned}$$

yani

$$2\alpha[s, d(x)\,] = 0, \quad \forall x \in R$$

olur. Burada $x = st$ alınırsa, $d(st) = sd(t) + d(s)t = \alpha t$ olur. Buna göre, son eşitlikten

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha[s, d(st)] = 2\alpha[s, \alpha t] \\ &= 2\alpha^2[s, t] = 2\alpha^3 \end{aligned}$$

bulunur. R, 2-burulmasız halka olduğundan, $\alpha^3 = 0$ olur. Yani α nilpotent bir eleman olur. Aynı zamanda $\alpha \notin Q$ dur. Çünkü $\alpha \in Q$ olsa, $\alpha \in [U, R] \cap Q = (0)$, yani $\alpha = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Buradan, $\alpha \in Z(R) - Q$ olur. Fakat *Önerme 5.4.2* ile $\alpha = 0$ çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla, $[U, U] \neq (0)$ olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 5.4.10. R, 2-burulmasız $|S_R|$-yarıasal halka, S_R onun bir ideali ve U bir Lie ideali olsun. Buna göre $[U, R] \cap S_R = (0)$ olmak üzere, $t \in R$ için

$$\big[[U, U], t\big] = (0) \text{ ise } [U\,, t] = (0)$$

olur.

İspat. R halkası üzerinde, $d(x) = [x, t]$ iç türevini alalım. Hipotezden, her $u \in [U, U]$ için $d(u) = 0$ dır. Üstelik $[U, U]$ bir Lie ideal olduğuna göre her $r \in R$ ve her $u \in [U, U]$ için, $[u, r] \in [U, U]$ olur. Öyleyse, $d([u, r]) = 0$ elde edilir. Türev tanımı ve $d(u) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$[u, d(r)] = 0, \quad \forall u \in [U, U], r \in R \tag{5.3}$$

olur. Bu eşitlikte $r = x^2, x \in R$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [u, d(x^2)] = [u, d(x)x] + [u, xd(x)] \\ &= d(x)[u, x] + [u, d(x)]x + x[u, d(x)] + [u, x]d(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, (5.3) ve $[u, x] \in [U, U]$ olması kullanıldığında, $2d(x)[u, x] = 0$ bulunur. R halkası 2-burulmasız halka olduğuna göre,

$$d(x)[u, x] = 0, \forall u \in [U, U], x \in R$$

elde edilir. Bu eşitlikte x yerine $x + v, v \in [U, U]$ alınır ve aynı eşitlik ile $d(v) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$d(x)[u, v] = 0, \forall x \in R, u, v \in [U, U]$$

olur. Öyleyse *Lemma 5.4.3* ile verilen kümenin tanımı gereği $[[U, U], [U, U]] \subset M(S_R)$ olmalıdır. Ayrıca, *Lemma 5.4.3 (iii)* ile $R/M(S_R)$ halkasının 2-burulmasız, 1-yarıasal halka olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, $\bar{U} = U/M(S_R)$ kümesi $\bar{R} = R/M(S_R)$ halkasının bir Lie idealidir. Çünkü, $\bar{u} \in \bar{U}, \bar{r} \in \bar{R}$ için,

$$[\bar{u}, \bar{r}] = [u + M(S_R), r + M(S_R)] = [u, r] + M(S_R)$$

olur. Burada $[u, r] \in U$ olduğu kullanılırsa $[\bar{u}, \bar{r}] \in \bar{U}$, yani $[\bar{U}, \bar{R}] \subset \bar{U}$ bulunur.

$\left[[\bar{U}, \bar{U}], [\bar{U}, \bar{U}]\right] = \bar{0}$ dır. Çünkü, $\left[[\bar{u}, \bar{v}], [\bar{w}, \bar{t}]\right] \in \left[[\bar{U}, \bar{U}], [\bar{U}, \bar{U}]\right]$ için,

$$\begin{aligned} \left[[\bar{u}, \bar{v}], [\bar{w}, \bar{t}]\right] &= [[u + M(S_R), v + M(S_R)], [w + M(S_R), t + M(S_R)]] \\ &= \left[[u, v] + M(S_R), [w, t] + M(S_R)\right] \\ &= \left[[u, v], [w, t]\right] + M(S_R) \end{aligned}$$

olur. Burada, $\left[[u, v], [w, t]\right] \in [[U, U], [U, U]] \subset M(S_R)$ olduğu kullanılırsa, $\left[[\bar{u}, \bar{v}], [\bar{w}, \bar{t}]\right] = \bar{0}$ bulunur. $[\bar{U}, \bar{U}]$ bir Lie ideal olduğuna göre, *Lemma 5.4.9* ard arda uygulanırsa $[\bar{U}, \bar{U}] \subset \bar{Z}$ ve $\bar{U} \subset \bar{Z}$ olur. Yani, $[\bar{U}, \bar{R}] = \bar{0}$ dir. O zaman, $[U, R] \subset M(S_R)$ yazılır. Buradan ise

$$d(x)[U, R] \in S_R, \forall x \in R$$

elde edilir. Öyleyse, *Lemma 5.4.4* ile verilen kümenin tanımı kullanıldığında her $x \in R$ için,

$d(x) \in M_1(S_R)$ olur. Burada x yerine $u \in U$ alınırsa, $d(u) \in M_1(S_R)$ olur. Yine *Lemma 5.4.4 (ii)* kullanıldığında $M_1(S_R) \cap S_R(M_1) \subset S_R$ bulunur. $M_1(S_R)[U,R] \subset S_R$ olduğuna göre, $[U,R] \subset S_R(M_1)$ kapsaması elde edilir. O zaman, $d(u) = [u,t] \in S_R(M_1)$ bulunur. Böylece, $d(u) \in M_1(S_R) \cap S_R(M_1)$ olur. Bu durumda, $d(u) \in M_1(S_R) \cap S_R(M_1) \subset S_R$, yani $d(u) \in S_R$ bulunur. Öyleyse, $d(u) \in [U,R] \cap S_R = (0)$ olur. O zaman, her $u \in U$ için $[u,t] = 0$ olur. Sonuç olarak $[U,t] = (0)$ sonucu elde edilir.

Teorem 5.4.11. R, 2-burulmasız $|S_R|$-yarıasal halka, S_R onun bir ideali ve U bir Lie ideali olsun. Buna göre $[U,R] \cap S_R = (0)$ olmak üzere, $t \in R$ için

$$[\,t,[t,U\,]\,] = (0) \text{ ise } [\,t\,,U] = (0)$$

olur.

İspat. R üzerinde, $d(x) = [t,x]$ iç türevi alınırsa, hipotezden

$$d^2(u) = 0, \ \ \forall u \in U \tag{5.4}$$

olur. O zaman, $u,v \in U$ için $[u,v] \in U$ olduğuna göre, (5.4) ile

$$0 = d^2[u,v] = [d^2(u),v] + 2[d(u),d(v)] + [u,d^2(v)] = 2[d(u),d(v)]$$

olur. R halkası 2-burulmasız olduğundan,

$$[d(u),d(v)] = 0\,, \ \forall u,v \in U \tag{5.5}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, $uv \in U$ olacak biçimde $u,v \in U$ alalım. Bu durumda, (5.4) eşitliği kullanılarak

$$0 = d^2(uv) = d^2(u)v + 2d(u)d(v) + ud^2(v) = 2d(u)d(v)$$

bulunur. R, 2-burulmasız halka olduğundan $uv \in U$ olacak şekildeki her $u,v \in U$ için

$$d(u)d(v) = 0 \tag{5.6}$$

olur. Ayrıca, $r \in R$ için $u[u,r] = [u,ur] - [u,u]r$ eşitliği düşünülürse, $u[u,r] \in U$ olur. Bu nedenle, (5.6) eşitliğinde v yerine $[u,r]$ alınırsa

$$d(u)d[u,r] = 0\,, \ \forall u \in U\,, r \in R \tag{5.7}$$

bulunur. Buna göre, $d(d(u)[u,r]) = d^2(u)[u,r] + d(u)d[u,r]$ eşitliğinde (5.4) ve (5.7) kullanılırsa, $d(d(u)[u,r]) = 0$, yani $[d(u)[u,r],t] = 0$ bulunur. Böylece

$$d(u)[u,r] \in C\ (t)\ , \forall u \in U\ , r \in R$$

olur. Burada, $r = tw$, $w \in R$ alınır, bu ifade ve $C(t)$ kümesinin bir althalka olduğu kullanılırsa

$$d(u)[u,tw] = d(u)t[u,w] + d(u)[u,t]w = td(u)[u,w] + \left(d(u)\right)^2 w$$

eşitliğinden,

$$\left(d(u)\right)^2 w \in C(t)\ , \forall u \in U, w \in R$$

bulunur. $C(t)$ kümesinin tanımından

$$0 = [\left(d(u)\right)^2 w, t] = \left(d(u)\right)^2 [w,t] + [\left(d(u)\right)^2, t]w$$

olur. Öte yandan, hipotez kullanıldığında $0 = d([u,t]) = [d(u),t] + [u,d(t)] = [d(u),t]$, yani her $u \in U$ için $d(u) \in C(t)$ elde edilir. $C(t)$ bir althalka olduğuna göre $d(u)^2 \in C(t)$ yazılabilir. O zaman bulunan son eşitlikten

$$\left(d(u)\right)^2 [\mathrm{w}, \mathrm{t}] = 0\ , \forall u \in U\ , r \in R$$

elde edilir. Burada, w yerine wu alınır ve aynı eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \left(d(u)\right)^2 [wu,t] \\ &= \left(d(u)\right)^2 w[u,t] + (d(u))^2 [w,t]u \\ &= \left(d(u)\right)^2 w[u,t] \end{aligned}$$

yani

$$\left(d(u)\right)^2 w[u,t] = 0, \qquad \forall u \in U, w \in R$$

olur. Buradan her $u \in U$ için $\left(d(u)\right)^2 R \left(d(u)\right)^2 = (0)$elde edilir. Yani, $\left(d(u)\right)^2 \in S_R$ bulunur. Aynı zamanda

$$\left(d(u)\right)^2 = [u,t][u,t] = [u[u,t],t] - u[[u,t],t]$$

eşitliğinde hipotez ve $u[u,t] \in U$ olduğu kullanıldığında $\left(d(u)\right)^2 \in [U,R]$ bulunur. O halde, $\left(d(u)\right)^2 \in [U,R] \cap S_R = (0)$, yani

$$\left(d(u)\right)^2 = 0, \ \ \forall u \in U$$

bulunur. Burada u yerine $u + v$, $v \in U$ alınır ve aynı eşitlik ile (5.5) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (d(u+v))^2 \\ &= (d(u) + d(v))^2 \\ &= \left(d(u)\right)^2 + d(u)d(v) + d(v)d(u) + \left(d(v)\right)^2 \\ &= 2d(u)d(v) \end{aligned}$$

bulunur. R, 2-burulmasız halka olduğundan

$$d(u)d(v) = 0, \ \ \forall u, v \in U \tag{5.8}$$

elde edilir. O halde,

$$[ud(v), t] = u[d(v), t] + [u, t]d(v) = u[[v, t], t] + d(u)d(v) = 0$$

olduğundan, $ud(v) \in C(t)$ olur. Benzer şekilde, $d(u)v \in C(t)$ olduğu da görülebilir.

$r \in R$ ve $v, w \in U$ için $u = [rd(v), w]$ olsun. U bir Lie ideal olduğundan, $u \in U$ dur. Herhangi $z \in U$ için, $ud(z) = [rd(v), w]d(z) = r[d(v), w]d(z) + [r, w]d(v)d(z)$ eşitliğinde, (5.8) kullanılırsa $ud(z) = rd(v)wd(z)$ eşitliği elde edilir. $ud(z) \in C(t)$ olduğundan, $rd(v)wd(z) \in C(t)$ bulunur. Yani her $v, w, z \in U$ için $Rd(v)wd(z) \subset C(t)$ yazılır. O zaman, $d[Rd(v)wd(z)] = (0)$ olur. (5.4) ve (5.8) ifadeleri kullanılırsa,

$$d(R)d(v)wd(z) = (0), \ \ \forall v, w, z \in U \tag{5.9}$$

elde edilir. Buna göre, $x, y \in R$ için

$$0 = d(xy)d(v)wd(z) = d(x)yd(v)wd(z) + xd(y)d(v)wd(z)$$

olur. (5.9) eşitliği kullanılırsa, $d(x)Rd(v)wd(z) = (0)$ bulunur. O zaman,

$$d(v)wd(z)Rd(v)wd(z) = (0)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $d(v)wd(z) \in S_R$ olur. Yani

$$d(v)Ud(z) \subset S_R \, , \ \forall v, z \in U \tag{5.10}$$

olur. Buna göre, $v \in U$, $s \in R$ için $d(v)Ud([v, s]) \subset S_R$ yazılır. Öte yandan, her $u, v \in U$ için $d(u)v \in C(t)$ olduğuna göre, her $r \in R$, $u, v \in U$ için $d(u)[v, r] \in C(t)$ olur. Burada r yerine rs, $s \in R$ alınırsa, $d(u)[v, r]s + d(u)r[v, s] \in C(t)$ olur. O zaman,

$$\begin{aligned} 0 &= d(d(u)[v, r]s + d(u)r[v, s]) \\ &= d^2(u)r[v, s] + d(u)d(r[v, s]) + d^2(u)[v, r]s + d(u)d([v, r]s) \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede, (5.4) ve (5.8) kullanılırsa

$$0 = d(u)[v, r]d(s) + d(u)d(r)[v, s] + d(u)rd[v, s], \qquad \forall u, v \in U, r, s \in R$$

elde edilir. Özel olarak, $r \in U$ alınırsa (5.8) ve (5.10) kullanılarak, $d(u)[v, r]d(s) \in S_R$ olduğu görülür. Böylece,

$$d(u)[U, U]d(r) \subset S_R \, , \qquad \forall u \in U, r \in R$$

bulunur. Burada r yerine xy, $x, y \in R$ alınır ve aynı ifade kullanılırsa

$$d(u)[U, U]xd(y) \subset S_R \, , \qquad \forall u \in U, x, y \in R$$

elde edilir. Buna göre, S_R bir ideal olduğundan

$$(d(U)[U,U]R)^2 = (d(U)[U,U]R)(d(U)[U,U]R) \subset S_R$$

yani, $(d(U)[U,U]R)^2 \subset S_R$ bulunur. Burada $d(U)[U,U]R$ kümesi bir sağ ideal ve S_R kümesi bir yarıasal ideal olduğuna göre, *Önerme 2.28* kullanıldığında $d(U)[U,U]R \subset S_R$ olur. Buradan ise, yine S_R bir ideal olduğuna göre, $d(U)[U,U]Rd(U)[U,U] \subset S_R$ elde edilir. S_R aynı zamanda bir yarıasal ideal olduğundan $d(U)[U,U] \subset S_R$ dir. *Lemma 5.4.5* ile verilen kümenin tanımından $d(U) \subset M_2(S_R)$ olur. O zaman, U bir Lie ideal olduğuna göre, $d([U,U]) \subset d(U) \subset M_2(S_R)$ yani $d([U,U]) \subset M_2(S_R)$ bulunur. Öte yandan, $d(U) \subset U$ olduğu kullanılarak,

$$d([U,U]) = [d(U),U] + [U,d(U)] \subset [U,U]$$

bulunur. Buna göre, $M_2(S_R)d([U,U]) \subset M_2(S_R)[U,U] \subset S_R$ yani $M_2(S_R)d([U,U]) \subset S_R$ olur. *Lemma 5.4.5* ile verilen kümenin tanımı kullanıldığında $d([U,U]) \subset S_R(M_2)$ olmalıdır. *Lemma 5.4.5 (iv)* kullanıldığında ise, $d([U,U]) \subset M_2(S_R) \cap S_R(M_2) \subset S_R$, yani $d([U,U]) \subset S_R$ bulunur. Aynı zamanda $d([U,U]) \subset [U,U] \subset [U,R]$ olduğuna göre, $d([U,U]) \subset [U,R] \cap S_R = (0)$ elde edilir. Yani, $d([U,U]) = (0)$ olur. Bu eşitlikten $[[U,U],t] = (0)$ yazılır. *Lemma 5.4.10* uygulandığında ise $[U,t] = (0)$ sonucu elde edilir.

Sonuç 5.4.12.. R, 2-burulmasız $|S_R|$-yarıasal halka, S_R bir ideali ve U bir Lie ideali olsun. Buna göre $[U,R] \cap Q = (0)$ olacak şekilde bir Q yarıasal ideali varsa

i. $t \in R$ için, $[[U,U],t] = (0)$ ise $[U,t] = (0)$ dır.

ii. $t \in R$ için, $[t,[t,U]] = (0)$ ise $[U,t] = (0)$ dır.

BÖLÜM 6
SONUÇ VE ÖNERİLER

Dhara ve Ali (2013) R yarıasal halkasının değişmeliliğini, I onun sıfırdan farklı bir sol ideali ve F bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türevi olmak üzere her $x, y \in I$ için

- $F(xy) \pm xy = 0$,
- $F(xy) \pm yx = 0$,
- $F(x)F(y) \pm xy = 0$,
- $F(x)F(y) \pm yx = 0$,
- $F(xy) \pm xy \in Z(R)$,
- $F(xy) \pm yx \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \pm xy \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \pm yx \in Z(R)$

koşulları altında incelemişlerdir. Bu çalışmada ise, $F, f, H: R \to R$ dönüşümler, F, f ile belirlenen bir çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve H bir çarpımsal sol merkezleyen olmak üzere, her $x, y \in R$ için

- $F(xy) \mp H(xy) = 0$,
- $F(xy) \mp H(yx) = 0$,
- $F(x)F(y) \mp H(xy) = 0$,
- $F(xy) \mp H(xy) \in Z(R)$,
- $F(xy) \mp H(yx) \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \mp H(xy) \in Z(R)$

koşulları altında halkanın değişmeliliği incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda, R bir yarıasal halka, $F: R \to R$, f ile belirlenen çarpımsal (genelleştirilmiş)-türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olmak üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- Her $x, y \in R$ için $F(xy) \mp H(xy) = 0$ ise $f = 0$ olur. Üstelik her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$ ve $F = \pm H$ olur.
- Her $x, y \in R$ için
  - $F(xy) \mp H(yx) = 0$,
  - $F(x)F(y) \mp H(xy) = 0$

  koşullarından biri sağlanıyor ise $f = 0$ olur.

  Üstelik her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$ ve her $x \in R$ için $[F(x), x] = 0$ dır.
- Her $x, y \in R$ için

- $F(xy) \mp H(xy) \in Z(R)$,
- $F(xy) \mp H(yx) \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \mp H(xy) \in Z(R)$

koşullarından biri sağlanıyor ise her $x \in R$ için $[f(x), x] = 0$ dır.

Sonuç olarak da, R bir asal halka, $F: R \to R$, sıfırdan farklı d türevi ile belirlenen bir çarpımsal genelleştirilmiş türev ve $H: R \to R$ bir çarpımsal sol merkezleyen olmak üzere her $x, y \in R$ için

- $F(xy) \mp H(xy) \in Z(R)$,
- $F(xy) \mp H(yx) \in Z(R)$,
- $F(x)F(y) \mp H(xy) \in Z(R)$

koşullarından biri sağlanıyorsa R halkasının değişmeli olduğu ispatlanmıştır.

R bir halka, A boş olmayan bir altkümesi olmak üzere $S_R(A) = \{a \in R \mid aAa = (0)\}$ şeklinde tanımlanan ve yarıasallığın kaynağı olarak isimlendirilen bir küme tanımlanmış ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra $|S_R|$-indirgenmiş halka $|S_R|$-bölge, $|S_R|$-bölümlü halka adı verilen üç yeni yapı tanıtılmış ve bu yeni yapılarda, halka teorideki bazı temel özellikler verilmiştir. Son olarak da her sonlu $|S_R|$-bölgenin birimli olduğu, yani bir $|S_R|$-bölümlü halka olduğu gösterilmiştir.

Diğer bir kısımda ise $|S_R|$-yarıasal halka ve $|S_R|$-asal halka adı verilen iki yeni yapı tanımlanmış, bu halkaların asal ve yarıasal halka arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca asal, yarıasal halkanın daha geneli olduğunu gösteren bazı örnekler verilmiştir.

McCoy (1964, *Teorem 4.27*), bir R halkası asal halkaların bir altdirek toplamına izomorftur ancak ve ancak $\beta(R) = (0)$ olduğunu kanıtlamıştır. Bu teori temel alınarak bir halkanın $|S_R|$-asal halkalarının bir altdirekt toplamına izomorf olması ile ilgili yapılan incelemeler verilmiş ve aşağıdaki gibi bir genelleştirmeye ulaşılmıştır:

R bir halka, $\{H_i\}_{i\in\Lambda}$ halkalar ailesi ve her bir $i \in \Lambda$ için S_{H_i}, H_i halkasının ideali olsun. R halkası H_i, $|S_{H_i}|$-asal halkalarının bir altdirek toplamına izomorf ise $\beta(R) = S_R$ dir. Tersine ise, R birimli değişmeli bir halka, $(S_R)^2 = (0)$ ve R halkasının her asal ideal çifti ikili eşmaksimal olsun. Eğer, $\beta(R) = S_R$ ise R halkası $i \in \Lambda$ olmak üzere H_i, $|S_{H_i}|$-asal halkalarının bir altdirek toplamına izomorftur.

Çalışmanın diğer bir aşamasında ise R birimli değişmeli bir $|S_R|$-asal halka, S_R onun bir ideali, $S = R - S_R$ olmak üzere, $S^{-1}R$ yerelleştirmesinin bir $|S^{-1}S_R|$-asal halka olduğu ispatlanmış ve $S_{S^{-1}R} = S^{-1}S_R$ eşitliği elde edilmiştir.

Herstein (1970) yaptığı çalışmada, R, 2-burulmasız olan bir yarıasal halka ve U onun bir Lie ideali olmak üzere, şu sonuçları elde etmiştir:

- $[U,U] \subset Z(R)$ ise $U \subset Z(R)$ dir.
- $t \in R$ için $\big[[U,U],t\big] = (0)$ ise $[U,t] = (0)$ dır.
- $t \in R$ için $\big[t,[t,U]\big] = (0)$ ise $[t,U] = (0)$ dır.

Ayrıca Herstein (1976, *Lemma 1.3*), R, 2-burulmasız olan bir yarıasal halka, $U \neq (0)$ onun hem Lie ideali hem de althalkası olmak üzere $U \subset Z(R)$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsadığını kanıtlamıştır. Bu çalışmada ise bir $|S_R|$-yarıasal halka için aşağıdaki şekilde genelleştirmelere ulaşılmıştır:

- R bir 2-burulmasız halka, U hem althalkası hem de bir Lie ideali olsun. Buna göre $[U,R] \cap Q = (0)$ olacak şekilde R halkasının bir Q yarıasal ideali varsa $U \subset Z(R)$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.
- R bir 2-burulmasız halka, U bir Lie ideali olsun. Buna göre $[U,R] \cap Q = (0)$ olacak şekilde R halkasının bir Q yarıasal ideali varsa, $[U,U] \subset Z(R)$ olduğunda $U \subset Z(R)$ dir.
- R, 2-burulmasız $|S_R|$-yarıasal halka ve S_R onun bir ideali, U bir Lie ideali olsun. Buna göre $[U,R] \cap S_R = (0)$ olmak üzere, $t \in R$ için

  (i) $\big[[U,U],t\big] = (0)$ ise $[U,t] = (0)$ dır.

  (ii) $\big[t,[t,U]\big] = (0)$ ise $[U,t] = (0)$ dır.

KAYNAKLAR

Ali A., Filippis V. D., Shujat F., 2013. On One Sided Ideals of a Semiprime Ring with Generalized Derivations. Aequat. Math. 85(3): 529-537.

Ashraf M., Rehman N., 2001. On Derivations and Commutativity in Prime Rings. East-west J. Math. 3(1): 87-91.

Ashraf M., Ali A., Ali S., 2007. Some Commutativity Theorems for Rings with Generalized Derivations. Southeast Asian Bull. Math. 31: 415-421.

Aydın N., Kandamar H., 2015. Soyut Cebir. Paradigma Akademi.

Bresar M., 1991. On the Distance of the Composition of Two Derivations to the Generalized Derivations. Glasgow Math. J. 33: 89-93.

Daif M. N., 1991. When a Multiplicative Derivation is Additive. Int. J. Math.&Math. Sci. 14(3): 615-618.

Daif M. N., Bell H. E., 1992. Remarks on Derivations on Semiprime Rings. Int. J. Math.&Math. Sci.15(1): 205-206.

Daif M. N., El-Sayiad M.S.T., 1997. Multiplicative Generalized Derivations which are Additive. East-west J. Math. 9(1): 31-37.

Dhara B., 2010. Remarks on Generalized Derivations in Prime and Semiprime Rings, Int. J. Math.&Math. Sci. 2010: Article ID 646587, 6 pages.

Dhara B., Ali S., 2013. On Multiplicative (Generalized)-Derivations in Prime and Semiprime Rings. Aequat. Math. 86(1-2): 65-79.

Herstein I. N., 1970. On the Lie Structure of an Associative Ring. Journal of Algebra. 14: 561-571

Herstein I. N., 1976. Rings with Involution. The University of Chicago Press.

Hungerford T. W., 1974. Algebra, Springer-Verlag.

McCoy N. H., 1964. The Theory of Rings. The Macmillan Co.

Posner E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8: 1093-1100.

Sharp R.Y., 2000. Steps in Commutative Algebra, Cambridge University Press.

Quadri M. A., Khan M. S., Rehman N., 2003. Generalized Derivations and Commutativity of Prime Rings. Indian J.Pure Appl.Math. 34(9): 1393-1396.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Didem KARALARLIOĞLU CAMCI

Doğum Yeri : Bandırma

Doğum Tarihi : 08.10.1977

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : ÇOMÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (1996-2000)

Yüksek Lisans Öğrenimi : ÇOMÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ABD (2000-2003)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI –Diğer

K. Camcı D., Aydın N., 2017. On Multiplicative (Generalized)-Derivations in Semiprime Rings. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 66(1): 153-164.

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

ÇOMÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi) 2000-2006

ÇOMÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Öğretim Görevlisi) 2006-…

İLETİŞİM

E-posta Adresi : didemk@comu.edu.tr