T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

MATRİS OYUNLARI TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Aykut OR
Matematik Anabilim Dalı
Tezin Sunulduğu Tarih: **04/02/2014**

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Yakup HACI

ÇANAKKALE

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

AYKUT OR tarafından **PROF. DR. YAKUP HACI** yönetiminde hazırlanan "**MATRİS OYUNLARI TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yakup HACI

Danışman

Prof. Dr. Hüsnü BAYSAL

Jüri Üyesi

Prof. Dr. İsmail TARHAN

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR

Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 04/02/2014

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Aykut OR

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Yakup HACI'ya en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bu günlere gelmeme yardımcı olan, hayatta hep desteklerini hissettiğim kardeşlerime,

Beni yetiştirip bu günlere getiren anne ve babama,

Çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen, hayatımın her evresinde bana maddi ve manevi destek olan eşim Dilvin OR'a, sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Aykut OR

SİMGELER VE KISALTMALAR

Max.	Maksimum
Min.	Minimum
İnf	İnfimum
Sup	Supremum
$A_{\cdot j}$	A matrisinin j. sütunu
$A_{i\cdot}$	A matrisinin i. satırı

ÖZET

MATRİS OYUNLARI TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Aykut OR
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman : Prof. Dr. Yakup HACI
04/02/2014, 93

Oyun teorisinde amaç, oyuncuların rasyonel bir şekilde karşılıklı etkileşim ortamında kazançlarını optimize edebilmek için sahip olduğu olası seçenekleri ne zaman ve nasıl kullanacağını bilmesidir. Söz konusu seçeneklerin teorik alt yapısının incelenmesi ve geliştirilmesi oyun teorisinde önemli rol oynamaktadır. Bu doğrultuda bir oyunun matematiksel modelinin oluşturularak sonuca ulaşılması gerekmektedir. Çalışmamızda optimal stratejiler ve oyun değerinin belirlenmesi için matematikte yer alan farklı yöntemler geliştirilmiş, geliştirilen yöntemler sonlu matris oyunlarına uygulanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Aralık matris oyunları ele alınarak özellikleri incelenmiş ve çözümlerin bulunması için yöntemler geliştirilmiştir. Çalışmamızın son bölümünde sonsuz matris oyunlarının özellikleri ve oyun değerinin varlığı ile ilgili çalışmalar yapılmış bu doğrultuda bazı önermeler sunulmuştur. Ayrıca Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi ile sonsuz matris oyunlarının çözümü araştırılmıştır.

Anahtar sözcükler: Sıfır Toplamlı Oyunlar, Eyer noktası, Maxmin kriteri, Optimal strateji, Aralık matrisleri

ABSTRACT

SOME PROBLEMS OF MATRIX GAMES THEORY

Aykut OR

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Doctoral Dissertation in Mathematics

Advisor : Prof. Dr. Yakup HACI

04/02/2014, 93

The rationale behind the game theory is to know when and how to use available strategies to rationally optimize the gain in an interactive setting. Analysis and improvement of the theoretical infrastructure of the options (i.e. strategies) in question play an important part in the game theory. Accordingly, it is necessary to reach the goal by creating a mathematical model of a game. In the present study, different available models in mathematics were improved so as to determine the optimal strategies and game value, and applied to finite matrix games, so that some results were obtained.

Moreover, interval matrix games were characterized, and methods were developed to find solutions. The last part of the current study deals with the characteristics of infinite matrix games and existence of the game value, and makes some relevant propositions. Furthermore, the study also investigates the solution of infinite matrix games via Successive Approximations Method.

Keywords: Zero-Sum Games, saddle point, maxmin criteria, optimal strategy, interval matrix

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Oyun teorisi belirli bir hedefe yönelik karar verme gücüne sahip birimlerden oluşan sistemleri incelemekte kullanılan matematiksel bir yöntemdir. Bunun yanında oyun teorisi, iki yada daha fazla rakibi belirli kurallar altında birleştirerek karşılıklı olarak çelişen olasılıklara uygun, birbirlerine göre en doğru stratejiyi belirleme yöntemidir. Oyun teorisinde olası her hareketin sonuçlarına bir değer biçilir. Yani oyuncular yaptıkları her hamlede bir kazanç yada kayıp elde ederler. En kötü şartlarda bile her oyuncu bu kazançların arttığı, kayıpların azaldığı alternatifleri tercih eder. Bu süreçte oyuncuların rasyonel davrandıkları, yani kazançlarını arttırmak için sahip oldukları durumlar içerisinden en iyi tercihi yaptıkları varsayılır.

Genel olarak oyun teorisinde amaç, oyuncuların rasyonel bir şekilde karşılıklı etkileşim ortamında kazançlarını optimize edebilmek için sahip olduğu olası seçenekleri ne zaman ve nasıl kullanacağını bilmesidir.

Oyun teorisinin matematiksel temelleri 20. yy'ın başında ünlü matematikçi Neuman (1928) tarafından atılmış ve daha sonra Neumann ve Morgenstern (1944) tarafından geliştirilmiştir. İlerleyen yıllarda diğer bilim adamlarının da katkılarıyla oyun teorisinde elde edilen sonuçlar ekonomi, sosyoloji, politika, hukuk, biyoloji gibi bilim dallarında kullanılmıştır. Nash (1954), hem rekabetçi hem de işbirlikçi oyunlarda kullanılabilecek bir denge kavramını ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmalarda oyunun matematiksel modelinin oluşturulması sırasında matris, diferansiyel denklem, integral denklem, graf gibi farklı matematiksel yapılar ile karşılaşmak mümkündür.

Daha sonraki yıllarda matris oyunları ile ilgili incelenen çalışmalarda aralık matrisleri göz önüne alınarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Aralık analizi ile ilgili en geniş çalışma Moore (1979) tarafından yapılmıştır. Rohn (1993) “Inverse Interval Matrix” adlı çalışmasında aralık matrislerinin tersi ile ilgili önemli sonuçlar sunmuştur. Nirmala ve ark. (2011) temel aritmetik işlemleri değiştirerek ters aralık matrisleri üzerinde incelemeler yaparak farklı sonuçlar elde etmişlerdir.

Yukarıdaki adı geçen çalışmalarda aralık sayılarının sıralanması önem taşımaktadır. İlk olarak Moore (1979) ayrık aralıkların sıralanması üzerine, reel sayıların sıralama bağıntısını genelleştirerek benzer bir sıralama bağıntsı vermiştir. Daha sonra Ishibuchi ve

Tanaka (1990) ayrık olmayan aralıklar için farklı iki kısmi sıralama bağıntısı tanımlamışlardır. Ayrıca Sengupta ve ark. (1997), Sengupta ve Pal (2000) uygunluk fonksiyonu adını verdikleri bir fonksiyon yardımıyla aralık sayılarının sıralanması üzerine çalışma yapmışlardır.

Aralık matris oyunları, oyun teorisinde Fuzzy matris oyunlar olarak da adlandırılmaktadır. Bilindiği gibi aralıklar arasındaki büyüklük küçüklük sıralaması kesin olarak söylenememektedir. Bu durum oyun değerinin bulunmasında etkili rol oynamaktadır. Fuzzy oyunlarla ilgili yapılan ilk araştırmalar Aubin (1974,1981) ve Butnariu (1978) tarafından yapılmış ve uygun sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra**,** Campos (1989) sıfır toplamlı fuzzy matris oyunları, Sakawa ve Nishizaki (1994) Fuzzy hedefli ve Fuzzy ödemeli matris oyunları, Nayak ve Pal (2006) aralık matris oyunlarının grafik yöntem ile çözümü üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Oyuncuların strateji kümelerinin en azından birinin sonsuz boyutlu olduğu (Sonsuz matris oyunları) matris oyunları birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. İlk olarak Wald (1950) oyun değeri için bir yeter koşul bulmuştur. Daha sonra Marchi (1967) yaptığı çalışmada gerek ve yeter koşul ispatlamıştır. Tijs (1977) elde ettiği yeterli koşul, sonsuz matris oyunlarında oyun değerinin bulunmasında çok önemli rol oynamıştır. Söz konusu matris oyunları ile ilgili Cegielski (1991), Gomez (1998) ve Naya (1996, 2001) çalışmaları da vardır. Naya (2001) yaptığı araştırmada, $\infty \times \infty$ boyutlu matrisin herbir satır ve sütununa bir dizi gibi bakıp, elde edilen satır ve sütun dizilerinin aynı sayıya yakınsak olduğunu göstermiş ve oyun değerinin bu yakınsamalara bağlı karakterizasyonu ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir.

Literatürde mevcut olan bu çalışmalar incelendiğinde, sonlu matris oyunlarının çözümü ile ilgili cebirsel yöntemlerin yeterli biçimde çalışılmadığı gözlenmiştir. Bu doğrultuda, çalışmamızda matris oyunlarının çözümü için Lagrange, determinant ve ters matris yöntemlerinin teorik alt yapısı ile ilgili bilgiler verilmiş, elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, incelenen yöntemler aralık matris oyunları için de uygulanarak sonuçlar elde edilmiştir.

Çalışmanın ilk bölümünde oyun terosinin ne olduğu ve matematikteki yerinden bahsettikten sonra ikinci bölümde, oyun teorisinin temel kavramlarından, oyunların sınıflandırılmasından ve gerekli matematiksel kavramlardan bahsedilerek, oyun teorisi ve matris oyunlarının teorik altyapısına değinilmiştir.

Üçüncü bölümde; matris oyunlarının oynanma süreci ve oyuncuların mevcut stratejilerini nasıl kullanacağından bahsedilmiştir. Bu doğrultuda maximin-minimax kriteri verilerek incelenmiş, pür stratejilerde bir matris oyununun her zaman oyun değeri olmadığı dikkate alınarak karma stratejiler tanımlanmıştır. Bu strateji sınıfında matris oyununun oyun değerinin her zaman var olduğu vurgulanmıştır. Daha sonra optimal stratejiler tanımlanarak oyun değerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Bölümün sonunda pür stratejilerde baskınlık kavramından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, sonlu matris oyunlarının çözümünün bulunmasına yönelik farklı yöntemlerden bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde, bilinen klasik matris yerine elemanları aralıklar olan matrisler ele alınarak aralık analizi ile ilgili bazı özellikler araştırılmıştır. Daha sonra getiri matrisi olarak aralık matrisi ele alınmış ve uygun matris oyunlarının özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde verilen matris oyunlarının çözüm yöntemleri, aralık matris oyunlarının çözümlerinin bulunması için uygulanarak sonuçlar elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, en az bir oyuncunun strateji kümelerinin sonsuz olduğu matris oyunları araştırılmıştır. Ayrıca lineer denklem sisteminin çözümü için bilinen ardışık yaklaşımlar yöntemi, sonsuz matris oyunlarının çözümünün bulunmasında uygulanarak gerekli sonuçlara ulaşılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Giriş bölümünde oyun teorisinin matematikteki yerinden bahsettikten sonra bu bölüm de tez boyunca kullanılacak temel tanım, kavram ve teoremler verilecektir (Ahlatçıoğlu ve Tryaki, 1998; Anatol 1966; Anderson ve Geçkıl, 2010; Bakaoğlu, 1991; Barron, 2008; Guseinov ve Ark., 2010).

Tanım 2.1. Mücadele içeren herhangi bir olaya *oyun* denir.

Tanım 2.2. Oyunda karar alan birey ya da gruplara oyuncu denir. Oyuncular sırasıyla I, II, III, IV, V,… vs biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3. Oyunda mücadele eden oyuncuların sayısına uygun olarak oyuna iki kişilik, üç kişilik vs oyun denir.

Tanım 2.4. Bir oyundaki herhangi bir oyuncunun oyun boyunca ortaya çıkabilecek bütün durumlar için yaptığı seçimleri belirten kurallar bütününe strateji denir.

Stratejiler aşağıda belirtilen üç koşulu sağlamalıdır (Morris, 1994):

(i) Strateji tam olmalıdır; bir strateji oyunun bütün durumlarında uygulanabilmelidir.

(ii) Strateji kesin olmalıdır

(iii) Oyunun keyfi bir anında oyuncunun her duruma vereceği cevap alternatif seçimlerinin oluşturduğu küme içerisinden olmalıdır.

Oyuncuların sahip olduğu stratejilerin kümesi sonlu ya da sonsuz olabilir. Bunun yanında oyuncular sahip oldukları stratejileri aynı anda seçebildikleri gibi belirli bir kurala göre farklı olasılıklarda da seçebilirler. Oyuncuların sahip oldukları stratejileri seçme şekline göre düşündüğümüz de oyunun her anında aynı strateji seçildiğinde pür (saf) strateji, farklı olasılıkta stratejiler seçiliyorsa karma strateji söz konusudur. Yani oyuncunun stratejisi olasılık olayı içermiyorsa, bu stratejiye pür strateji, değerleri bir oyuncunun saf stratejilerini oynama olasılıklarını gösteren rastgele değişkene oyuncunun bir karma stratejisi denir.

Oyun sürecinde her oyuncu kendi stratejisini uygulayarak oyunu bitirmek zorundadır. Oyun bittiğinde her oyuncu kendi kullandığı ve diğer oyuncuların kullandığı stratejilerin karşılığı olarak belli bir kazanç elde eder. Bu kazanç gerçel sayı olarak verilir ve bu sayıya oyuncunun getirisi(kazancı) denir.

Tanım 2.5. Her bir katılımcının maksimum kazanca ulaşma hedefi içinde olduğu oyunlara ortaksız oyun denir.

Tanım 2.6. İki kişili sıfır toplamlı ortaksız oyuna muhalif (antagonastic) oyun denir.

Tanım 2.7. İki kişili sıfır toplamlı oyunda oyuncuların getirileri matris şeklinde veriliyorsa böyle oyunlara matris oyunu denir.

f, X üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x \in X$ için

$f(x) \leq a$

eşitsizliğini sağlayan a sayılarının en küçüğüne f, fonksiyonunun X kümesi üzerindeki supremumu denir ve $\underbrace{sup}_{x\in X} f(x)$ ile gösterilir. Benzer biçimde $\forall x \in X$ için

$f(x) \geq b$

eşitsizliğini sağlayan b sayılarının en büyüğüne f, fonksiyonunun X kümesi üzerindeki infimumu denir ve $\underbrace{inf}_{x\in X} f(x)$ ile gösterilir.

Eğer fonksiyon supremumuna tanım kümesi üzerinde ulaşıyorsa yani

$x^* \in X$ için $f(x^*) = \underbrace{sup}_{x\in X} f(x)$

ise bu değer fonksiyonun maksimumudur. Benzer şekilde,

$x^* \in X$ için $f(x^*) = \underbrace{inf}_{x\in X} f(x)$

ise bu değer fonksiyonun minimumudur.

Özellikler

(1) $\forall x \in X$ için $f(x) \leq c$ olacak biçimde bir c sabiti varsa, $\underbrace{sup}_{x\in X} f(x) \leq c$ dir.

(2) $\forall x \in X$ için $f(x) \geq c$ olacak biçimde bir c sabiti varsa, $\underbrace{inf}_{x\in X} f(x) \geq c$ dir.

(3) f, g, X üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \underbrace{sup}_{x\in X} f(x) \leq \underbrace{sup}_{x\in X} g(x) \text{ ve } \underbrace{inf}_{x\in X} f(x) \leq \underbrace{inf}_{x\in X} g(x) \text{ dir.}$$

Tanım 2.8. (x_n) reel sayıların bir sınırlı dizisi olsun.

i. $\lim sup x_n = \underbrace{inf}_{m\geq 1}\left(\underbrace{sup}_{n\geq m} x_n\right)$

ii. $\lim inf x_n = \underbrace{sup}_{m\geq 1}\left(\underbrace{inf}_{n\geq m} x_n\right)$

sayılarına sırasıyla (x_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir.

Teorem 2.9. $X \times Y$ üzerinde tanımlı herhangi bir $f(x, y)$ fonksiyonu için

$\underbrace{sup}_{x\in X} \underbrace{inf}_{y\in Y} f(x, y) \leq \underbrace{inf}_{y\in Y} \underbrace{sup}_{x\in X} f(x, y)$

dir.

İspat: $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $f(x,y) \leq \underbrace{sup}_{x\in X} f(x,y)$ dir. Eşitsizliğin her iki tarafına infimum uygularsak $\underbrace{inf}_{y\in Y} f(x,y) \leq \underbrace{inf}_{y\in Y} \underbrace{sup}_{x\in X} f(x,y)$ elde ederiz. Dolayısıyla buradan da $\underbrace{sup}_{x\in X} \underbrace{inf}_{y\in Y} f(x,y) \leq \underbrace{inf}_{y\in Y} \underbrace{sup}_{x\in X} f(x,y)$ olur.

Not 2.10. Eğer f fonksiyonu supremum ve infimum değerlerine tanım kümesi üzerinde ulaşırsa bu taktirde

$$\underbrace{max}_{x\in X} \underbrace{min}_{y\in Y} f(x,y) \leq \underbrace{min}_{y\in Y} \underbrace{max}_{x\in X} f(x,y)$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.11. S, bir lineer (vektör) uzayın bir alt kümesi olsun. Eğer, S deki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası tümüyle S nin içinde kalıyor yani,

$x, y \in S$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$

ise S ye bir konveks küme denir.

Teorem 2.12. $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $f(\cdot): D \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda,

$f(x_*) = \min_{x\in D} f(x)$ ve $f(y_*) = \max_{x\in D} f(x)$

olacak biçimde $x_*, y_* \in D$ elemanları vardır.

Teorem 2.13. $f(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, $Y_* \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(x) = \min_{y\in Y_*} f(x,y)$$

olsun. Bu durumda $g(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyondur.

Teorem 2.14. $f(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, $Y_* \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(x) = \max_{y\in Y_*} f(x,y)$$

olsun. Bu durumda $g(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyondur.

Teorem 2.15. $S \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme $x_0 \notin S$ olsun. Keyfi $x \in S$ için

$$\langle y, x_0 \rangle \leq \langle y, x \rangle$$

olacak biçimde sıfırdan farklı $y \in \mathbb{R}^n$ vardır.

Teorem 2.16. $S \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olsun. Bu durumda,

$$S = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^{(i)} : \; x^{(i)} \in S, \lambda_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n+1, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

olur.

X, $I.$ oyuncunun stratejiler kümesi Y, $II.$ oyuncunun stratejiler kümesi ve $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ ödeme fonksiyonu ve $(x^*, y^*) \in X \times Y$ bir denge durumu olsun. O zaman $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $I.$ oyuncunun getirisini

$$f_1(x, y)$$

ile $II.$ oyuncunun getirisini

$$f_2(x, y)$$

ile gösterelim. Oyun sıfır toplamlı olduğundan

$$f_1(x, y) = f(x, y) \text{ ve } f_2(x, y) = -f(x, y) \Longrightarrow f_2(x, y) = -f_1(x, y)$$

eşitliği elde edilir. (x^*, y^*) denge durumu olduğundan

$$f_1(x, y^*) \le f_1(x^*, y^*) \text{ ve } f_2(x^*, y) \le f_2(x^*, y^*)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte $f_2 = -f_1$ alınırsa o zaman

$$-f_1(x^*, y^*) \ge -f_1(x^*, y) \Longrightarrow f_1(x^*, y^*) \le f_1(x^*, y)$$

olur. $f_1(x^*, y^*) \ge f_1(x, y^*)$ ve $f_1(x^*, y^*) \le f_1(x^*, y)$ ifadelerinden

$$f(x, y^*) \le f(x^*, y^*) \le f(x^*, y)$$

elde edilir. Bu ise (x^*, y^*) nin bir denge durumu olma şartıdır.

Denge durumuna ulaşmış yada denge ikilisi ile oynanan oyunlarda oyunculardan herhangi birinin denge durumunu veren stratejiyi seçmiş olması diğer oyuncunun elinde çok fazla alternatif bırakmadan daha fazla kaybetmemek için denge ikilisini veren diğer stratejiyi kullanmasını gerektirir.

(x^*, y^*) denge durumu ise bu taktirde $f(x, y^*) \le f(x^*, y^*)$ eşitsizliğine göre $II.$ oyuncu y^* stratejisi ile oynadığında $I.$ oyuncunun oyundan beklediği en fazla kazanç $f(x^*, y^*)$ kadardır. Söz konusu kazancı alabilmek, elde edebilmek için x^* denge stratejisi ile oynaması gerekir. Aksi taktirde $f(x, y^*) \le f(x^*, y^*)$ eşitliğinden de görüldüğü gibi getirisi azalacaktır. Benzer biçimde, $I.$ oyuncu da x^* denge stratejisi ile oynadığında $II.$ oyuncu kaybını arttırmamak için y^* denge stratejisi ile oynamak zorunda kalır. Aksi taktirde kaybı artacaktır.

Gerçekten $I.$ oyuncu stratejisini değiştirdiğinde kazancı azalmakta, $II.$ oyuncu stratejisini değiştirdiğinde I. oyuncunun kazancını arttırmakta dolayısıyla kendi kazancını azaltmaktadır. Böylece hiçbir oyuncu (x^*, y^*) denge durumunu bozamaz.

Teorem 2.17. $X \times Y$ üzerinde tanımlanmış $f(x, y)$ fonksiyonunun eyer noktalarına sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\underbrace{max}_{x \in X} \underbrace{inf}_{y \in Y} f(x, y)$, $\underbrace{min}_{y \in Y} \underbrace{sup}_{x \in X} f(x, y)$ minimaxlarının varlığı ve $\underbrace{max}_{x \in X} \underbrace{inf}_{y \in Y} f(x, y) = \underbrace{min}_{y \in Y} \underbrace{sup}_{x \in X} f(x, y)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Uyarı 2.18. $X \times Y$ kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun iki eyer noktası veya denge durumu (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) ise bu durumda (x_1, y_2) ve (x_2, y_1) noktalarıda eyer noktası veya denge durumudur.

İspat. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) f fonksiyonunun iki eyer noktası veya denge durumu olsun. O halde, $\forall x \in X$ ve , $\forall y \in Y$ için

$$f(x, y_1) \leq f(x_1, y_1) \leq f(x_1, y) \qquad (2.1)$$

$$f(x, y_2) \leq f(x_2, y_2) \leq f(x_2, y) \qquad (2.2)$$

olur. Eşitsizlikler her x, y için sağlandığından $x = x_2$ ve $y = y_2$ için de sağlanır. Dolayısıyla bu ifadeleri (2.1) eşitsizliğinde yerine yazarsak;

$$f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1) \leq f(x_1, y_2) \qquad (2.3)$$

olur. Benzer işlemi (2.2) eşitsizliği için yaparsak yani $x = x_1$ ve $y = y_1$ alıp ikinci (2.2) eşitliğinde yerine yazarsak;

$$f(x_1, y_2) \leq f(x_2, y_2) \leq f(x_2, y_1) \qquad (2.4)$$

buluruz. (2.1) ve (2.2) eşitsizliklerinden

$$f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1) \leq f(x_1, y_2) \leq f(x_2, y_2) \leq f(x_2, y_1) \qquad (2.5)$$

ifadesi elde edilir. (2.5) eşitliğinden (x_1, y_2) ve (x_2, y_1) noktalarının eyer noktası veya denge durumu olduğu görülür.

2.1. Oyunların Sınıflandırılması

Oyun teorisinde oyunlar şans oyunları ve strateji oyunları olarak ikiye ayrılabilir. Şans oyunları doğaya karşı oynanan tek kişilik oyunlardır. Bu tür oyunlarda oyuncu sonuçları kontrol edemez. Strateji oyunları ise iki ya da daha fazla oyuncudan oluşur. Strateji oyunları oyuncu sayısına, strateji sayısına, oyunun sonucuna, oyuncuların sahip olduğu bilgiye ve zamana göre gruplandırılmaktadır. Oyuncuların sayısına uygun olarak oyunlar iki kişilik, üç kişilik vs. oyunlar olmak üzere sınıflandırılabilir. Oyunlar strateji sayısına göre aşağıdaki biçimde sınıflandırılmaktadır: Oyunculardan her ikisinin stratejilerinin kümesi sonlu ise oyuna sonlu oyun, her iki oyuncunun da stratejileri kümesi sonsuz ise oyuna sonsuz oyun ve herhangi bir oyuncunun stratejilerinin kümesi sonlu diğer oyuncunun stratejilerinin kümesi sonsuz olduğu durumda oyun yarı sonsuz oyun olarak adlandırılmaktadır.

Strateji oyunları oyunun sonucuna göre, sıfır toplamlı oyunlar veya sıfır toplamlı olmayan oyunlar olmak üzere ikiye ayrılır. Sıfır toplamlı oyunlarda oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşittir. Sıfır toplamlı olmayan oyunlarda oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşit değildir. Böyle bir oyunda oyunculardan biri kazanırken diğerlerinin kaybetme zorunluluğu yoktur. Her bir oyuncu oyun sonunda kaybedebilir de kazanabilir de.

Oyuncuların sahip oldukları bilgi açısından oyunlar ikiye ayrılır. Eğer oyundaki oyuncular oyunun geçmiş her anını biliyor ise bu özellikteki bir oyuna tam bilgiye dayalı oyun denir. Örneğin satranç böyle bir oyundur. Oyunun başından itibaren her iki oyuncuda rakibinin hangi hamleyi oynadığını bilir. Eğer oyun hakkında oyuncuların bir kısmı diğer oyuncuların sahip olmadığı bir bilgiye sahip ise bu özellikteki oyuna tam bilgiye dayalı olmayan oyunlar denir. Oyunlar zaman faktörüne göre statik ve dinamik oyunlar olmak üzere ikiye ayrılır. Statik oyunlar belli bir zaman dilimi içerisinde tüm kararların aynı anda alındığı oyunlardır. Dinamik oyunlar ise kararların belli bir sekil de peşi sıra alındığı oyunlardır.

BÖLÜM 3

MATRİS OYUNLARI

Getiri (kazanç) fonksiyonu bir matris ile ifade edilen iki kişilik sıfır toplamlı oyunlara matris oyunu denilmektedir. Yani matris oyunları, $I.$ oyuncunun stratejilerine karşılık matrisin satırları, $II.$ oyuncunun stratejilerine karşılık matrisin sütunlarının karşılık geldiği ve bu satır ve sütunların kesişimlerinde oyuncuların getirilerinin yazılması sonucu elde edilen oyunlardır. Bu bölümde incelenecek olan tanımlar ve teoremler Barron (2008), Dutta (1999), Guseinov ve Ark. (2010), Morris (1994), Owen (1995), Neumann ve Morgenstern (1967), Wentsel (1965) çalışmalarında detaylı olarak yer almaktadır.

$I.$ oyuncunun n tane, $II.$ oyuncunun m tane pür stratejisi olması halinde getiri matrisi

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

biçiminde ifade edilir.

Oyunda $I.$ oyuncu $i.$ satırı seçer yani I_i stratejisini uygular, buna karşılık $II.$ oyuncu da $j.$ sütunu seçer yani II_j stratejisini uygularsa, $i.$ satır ve $j.$ sütunun kesişimindeki a_{ij} elemanı $I.$ oyuncunun getirisini (kazancını) göstermekte iken oyun sıfır toplamlı olduğundan $-a_{ij}$ değeride $II.$ oyuncunun kaybını göstermektedir. Bundan dolayı matris oyunlarında oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşit olduğu için getiri (kazanç) matrisi olarak tez boyunca $I.$ oyuncunun kazançlarına göre düzenlenmiş olan getiri matrisi kullanılacaktır.

$I.$ oyuncunun pür stratejilerinin kümesi $\{I_1, I_2, \ldots I_n\}$ ve $II.$ oyuncunun pür stratejilerinin kümesi $\{II_1, II_2, \ldots, II_m\}$ olmak üzere (I_i, II_j) ikilisi matris oyununda bir durum belirlemektedir.

Tanım 3.1. Bir matris oyununda $I.$ oyuncunun I_i pür stratejisi ve $II.$ oyuncunun II_j pür stratejisi ile oynadıklarında ortaya çıkan a_{ij} elemanı, aynı anda, matriste bulunduğu satırdaki en küçük bulunduğu sütundaki en büyük eleman ise bu taktir de a_{ij} elemanına denge noktası denir.

Tanıma göre,

$i = 1,2, \ldots, n, j = 1,2, \ldots, m$ için $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$

eşitsizliğini sağlayan (I_{i^*}, II_{j^*}) durumuna uygun matris elemanı bir denge noktasıdır.

Denge noktasını veren stratejiler, en iyi sonucu belirlediğinden oyuncuların kendileri için seçtikleri en iyi stratejiler olacaktır. Denge durumunda ortaya çıkan bu değer $I.$ oyuncunun ulaşabileceği en yüksek getiriyi, $II.$ oyuncununda ulaşabileceği en düşük kaybı gösterir. Eğer her iki oyuncuda denge durumunda sahip oldukları bu ödemeleri veren stratejileri seçmezlerse elde edecekleri kazançtan daha az veya kaybedecekleri kayıptan daha fazla kayıp elde ederler. Dolayısıyla oyuncular denge durumunu veren en iyi stratejilerini seçmediklerinde oyun değerinden daha az kazanıp daha fazla kaybedebilirler.

Şimdi bize verilen bir problemin getiri matrisini oluşturmaya çalışalım.

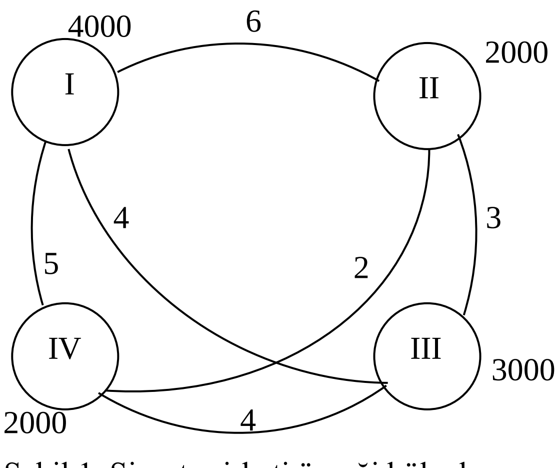
Örnek 3.2. Dört bölgeye ayrılmış bir ilçede X ve Y gibi iki sigorta şirketi bayi açmak için girişimde bulunmuşlardır. Aşağıdaki diyagramda bu bölgelerdeki potansiyel müşteri sayıları ve bölgeler arası mesafeler (yollar) gösterilmektedir. X firması Y firmasına göre daha iyi isim yapmış bir firmadır ve bundan dolayı X firmasının açtığı bayi rakip firmaya göre;

Yakın mesafedeki müşterilerin %70 ini

Eşit uzaklıkta olan müşterilerin %50 sini

Uzakta olan müşterilerin ise %30 unu

almakta ve geri kalan müşteriler sigortalarını Y firmasından yaptırmaktadırlar. Her iki firmanın da amacı daha fazla sayıda müşteri almak olduğundan getiri matrisi aşağıdaki biçimde oluşturulur.



Şekil 1. Sigorta şirketi örneği bölgeler arası mesafeler ve potansiyel müşteri sayıları

Çözüm. X firmasının şubesini i bölgesine kurma stratejisini X_i, $i = 1,2,3,4$ ve Y firmasının şubesini j bölgesine kurma stratejisi Y_j olsun. (X_i,Y_j) durumunda X in kazanacağı müşteri sayıları cinsinden getiri matrisi şöyle oluşturulur.

(X_1,Y_1) durumunda; Yani X firması 1. bölgeye, Y firması da 1. bölgeye bayilerini açmış olsunlar. Bu durumda

$$(X_1,Y_1) = 4000\frac{50}{100} + 2000\frac{50}{100} + 3000\frac{50}{100} + 1000\frac{50}{100} = 5000$$

$$(X_1,Y_2) = 4000\frac{70}{100} + 2000\frac{30}{100} + 3000\frac{30}{100} + 1000\frac{30}{100} = 4600$$

$$(X_2,Y_1) = 4000\frac{30}{100} + 2000\frac{70}{100} + 3000\frac{70}{100} + 1000\frac{70}{100} = 5400$$

elde edilir. Benzer biçimde diğer bileşenlerde bulunarak getiri matrisi aşağıdaki biçimde oluşturulur.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5000 & 4600 & 4600 & 5200 \\ 5400 & 5000 & 4200 & 5000 \\ 5400 & 5800 & 5000 & 5800 \\ 4800 & 5000 & 4200 & 5000 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Matris oyunlarında her iki oyuncununda kendi stratejileri ve rakibin stratejileri doğrultusunda kazancını maksimize edecek şekilde rasyonel olarak hareket ettikleri kabul edilmektedir.

3.1. Maksimin-Minimaks Kriteri

Her oyunda olduğu gibi matris oyunlarında da oyuncular kazançlarını arttırmaya yani getirilerini maksimalleştirmeye çalışmaktadır. Bu yüzden $I.$ oyuncu $\{I_1, I_2, \dots I_n\}$ pür stratejilerini ve $II.$ oyuncu $\{II_1, II_2, \dots, II_m\}$ pür stratejilerini kullanarak $I.$ oyuncu kazançlarını arttırmaya $II.$ oyuncu da $I.$ oyuncunun kazancını azaltmaya yani kendi kaybını minimalleştirmeye çalışacaktır. Dolayısıyla $I.$ oyuncunun amacı a_{ij} leri maksimalleştrimek iken, oyun sıfır toplamlı olduğundan, $II.$ oyuncunun amacı $-a_{ij}$ leri maksimalleştirmek yani $I.$ oyuncunun kazancını minimalleştirmek olacaktır.

$I.$ oyuncu mevcut pür stratejilerinden $i.$ stratejisini seçmiş olsun. Bu durumda $I.$ oyuncu $i.$ satırdaki elemanlara talip olmuş olur. Buna karşılık $II.$ oyuncu $I.$ oyuncunun kazançlarını azaltmak amacıyla bir strateji seçeceğinden $i.$ satırdaki

$$\underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} \; a_{ij}$$

olacak biçimdeki j stratejisini seçer. Buna göre I. oyuncu i. pür stratejisinden $\underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} a_{ij}$ kadar kazancı garanti etmiş olur. I. oyuncunun amacı kazancını maksimalleştirmek olduğu için I. oyuncu için en iyi kazancı veren strateji $\underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} \underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} a_{ij}$ kadar kazancı I. oyuncuya kazandıracaktır. Dolayısıyla I. oyuncunun oyundan beklediği kazanç $\underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} \underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} a_{ij}$ den daha az olamaz.

Benzer biçimde II. oyuncunun j. stratejisini seçtiğini varsayalım. Bu durumda II. oyuncu matrisin j. sütunundaki elemanlardan herhangi birini rakibine sunuyor demektir. Dolayısıyla I. oyuncu kazancını maksimalleştirmek amacıyla $\underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$ kadar kazancı elde etmiş olur. Yani II. oyuncunun j. pür stratejisini uyguladığında beklediği kayıp $\underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$ kadardır. II. oyuncu kaybını azaltmak amacıyla en az kaybedeceği stratejiyi seçecektir ki bu strateji $\underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} \underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$ yi veren stratejidir. Söz konusu strateji II. oyuncunun kayıplarının $\underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} \underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$ den büyük olamayacağını gösterir. Bu ifadeler aşağıdaki şematik yapı ile de gösterilebilir.

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \underbrace{min}_{j} a_{1j} \\ \underbrace{min}_{j} a_{2j} \\ \vdots \\ \underbrace{min}_{j} a_{nj} \end{matrix} \\
\swarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad \searrow & & \\
\underbrace{max}_{i} a_{i1} \quad \underbrace{max}_{i} a_{i2} \qquad \underbrace{max}_{i} a_{im} & &
\end{array}
$$

Not 3.1.1. $\underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} \underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} a_{ij}$ değeri I. oyuncunun kazançlarının alt sınırını benzer biçimde $\underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} \underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$ değeri de II. oyuncunun kayıplarının üst sınırını göstermektedir.

Her iki oyuncunun rasyonel davranışlarından yararlanarak elde edilen

$$V_A = \underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} \underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

değerine oyunun pür (saf) stratejiler sınıfında alt değeri,

$$V_{\text{Ü}} = \underbrace{min}_{j=1,2,\ldots,m} \underbrace{max}_{i=1,2,\ldots,n} a_{ij}$$

değerine de oyunun pür stratejiler sınıfında üst değeri denir. Bu iki değerin eşit olduğu noktada oyun dengeye ulaşacaktır.

Örnek 3.1.2. İki albay belirli iki bölgeyi ele geçirmek için savaşacaklar. I. Albayın emrinde 4 alay (belirli sayıdaki askeri birlik) II. Albayın emrinde 3 alay bulunmaktadır. Bölgeye daha fazla alay gönderen albay bölgeyi ele geçirecek ve puanı da bölgeyi ele geçirdiği için 1 ayrıca diğer albayın gönderdiği alay sayısı olacak. (Yani, I. Albay 4 alay, II. Albay 3 alay gönderdi. I. Albay bölgeyi daha fazla alay gönderdiği için ele geçirecek artı bunun üzerine II. Albayın alay sayısı eklenecek yani puanı $1 + 3 = 4$ olacak) Bu oyunun stratejilerini belirleyip getiri matrisini oluşturunuz.

Çözüm. Öncelikle oyuncuların stratejilerini belirleyelim. Burada oyunu I. Albay kazanmış gibi düşünüp getiri matrisini ona göre oluşturacağız. I. Albayın stratejilerini yazalım. Ele geçirilecek 2 bölge olduğundan stratejiler ikililer olarak gösterilir. Örneğin (a, b) şeklindeki bir strateji birincisine a kadar alay, ikincisine b kadar alay gönderildiğini belirtmektedir. Bundan dolayı oyuncuların stratejileri aşağıdaki biçimde oluşturulur.

1.Albayın Stratejileri		2.Albayın Stratejileri	
1. Bölge	2. Bölge	1. Bölge	2. Bölge
4	0	3	0
0	4	0	3
3	1	2	1
1	3	1	2
2	2		

Şekil 2. Albay örneği strateji değerleri

Burada ikililerin ilki birinci bölgeye gönderilen alay sayısı, ikinci bileşen ikinci bölgeye gönderilen alay sayısını göstermektedir. Stratejileri uygulamaya başlayalım.

I. Albay ilk stratejisini uygulasın (4,0), buna karşı II. Albay da ilk stratejisini uygulasın (3,0). Birinci bölgeye I. Albay daha fazla alay gönderdiği için bölgeyi ele geçirir ve buradan 1 puan alır. Ayrıca II. Albayın gönderdiği alay sayısı kadar da puan (yani 3 puan) alır. İkinci bölgeye her iki albayda asker göndermediğinden herhangi bir puan söz konusu değildir. Dolayısıyla a_{11} = 3 + 1 = 4 dür.

Benzer biçimde I. Albay ilk stratejisini (4,0), uygulasın. Buna karşın II. Albay ikinci stratejisini (0,3) uygulasın. I. Albay ilk bölgeyi alır ama ikinci bölgeyi kaybeder ilk bölgeyi aldığı için +1 puan ikinci bölgeyi kaybettiği için -1 puan alır. Dolayısıyla toplam puanı 0 olur. Yani a_{12} = 0 bulunur.

Benzer biçimde I. Albayın ilk stratejisine karşılık II. Albay 3. stratejisini uygulasın. Yani I. Albayın (4,0) stratejisine karşı II.Albay (2,1) stratejisini oynasın. Bu durumda I. Albay ilk bölgeyi fazla (4) alay gönderdiği için ele geçirecek +1 puan kazanacak, ayrıca II. Albayın birinci bölge için gönderdiği alay sayısı 2 olduğundan +2 puanda oradan alacak yani 1+2 = 3 puan olacak. Ayrıca I.Albay ikinci bölgeye hiç alay göndermeyip II.Albay 1 alay gönderdiğinden ikinci bölgeyi kaybedecek oradan -1 puan alacak. O halde ilk bölgeden 3 puan, ikinci bölgeden -1 puan toplamda 2 puan olur. Benzer biçimde devam edilerek getiri matrisi aşağıdaki biçimde oluşur.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Getiri matrisi elde edilen matris oyunu için minimaxları oluşturalım.

$$\underbrace{max}_{i=1,2,3,4,5} \underbrace{min}_{j=1,2,3,4} a_{ij} = max\left\{ \underbrace{min}_{j=1,2,3,4} a_{1j}, \underbrace{min}_{j=1,2,3,4} a_{2j}, \underbrace{min}_{j=1,2,3,4} a_{3j}, \underbrace{min}_{j=1,2,3,4} a_{4j}, \underbrace{min}_{j=1,2,3,4} a_{5j} \right\}$$

$$= max\{0,0,-1,0,-2\} = 0$$

$$\underbrace{min}_{j=1,2,3,4} \underbrace{max}_{i=1,2,3,4,5} a_{ij} = min\left\{ \underbrace{max}_{i=1,2,3,4,5} a_{i1}, \underbrace{max}_{i=1,2,3,4,5} a_{i2}, \underbrace{max}_{i=1,2,3,4,5} a_{i3}, \underbrace{max}_{i=1,2,3,4,5} a_{i4} \right\}$$

$$= min\{4,4,3,3\} = 3$$

olarak bulunur. Yani $\underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} \underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} a_{ij} \neq \underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} \underbrace{max}_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$ dir. Bu ise matris oyunun pür stratejiler sınıfında bir denge noktası yani oyun değeri olmadığını gösterir. Oyun değerinin olmaması matris oyununun pür stratejilerde bir çözümünün olmadığı anlamına gelir.

Şimdi bir matris oyununun pür stratejiler sınıfında üst ve alt değerlerinin karakterize eden aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.3. I. oyuncunun kazançlarının alt sınırı, II. oyuncunun kayıplarının üst sınırından büyük değildir. Yani $V_A \leq V_Ü$ dür.

İspat. I. oyuncu I_{i_*} pür stratejisini, II. oyuncu II_{j_*} pür stratejisini seçmiş olsun. Bu durumda

$$\underbrace{min}_{j=1,2,\dots,m} a_{i_* j} \leq a_{i_* j_*}$$

olur. Bu ifade keyfi i_* için sağlandığından her iki tarafı i ye göre maksimize edersek

$$\underbrace{max}_{i}\underbrace{min}_{j} a_{ij} \leq \underbrace{max}_{i} a_{ij_*}$$

elde edilir. Yine benzer biçimde son eşitsizlik de soldaki ifade sabit bir sayı ve keyfi j_* için yazıldığından her j için

$$\underbrace{max}_{i}\underbrace{min}_{j} a_{ij} \leq \underbrace{min}_{j}\underbrace{max}_{i} a_{ij}$$

olur. Sonuç olarak $V_A \leq V_Ü$ elde edilmiş olur.

3.2. Karma Stratejiler

Bir matris oyununda pür stratejiler sınıfında denge (eyer) noktası mevcut ise oyuncular söz konusu noktaya ulaşabilmek için uygun stratejilerini seçebiliyorlardı. Bir önceki örnekte de görüldüğü gibi matris oyunlarında pür stratejiler yardımıyla her zaman denge noktasının elde edilmesi mümkün değildir. Bu nedenle farklı stratejiler sınıfı ele alınarak incelenmesi gerekmektedir.

Tanım 3.2.1. A nxm lik bir matris oyunu olmak üzere, $I.$ oyuncunun n tane $II.$ oyuncunun m tane pür stratejisi olsun. Keyfi $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ olacak biçimdeki $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vektörüne $I.$ oyuncunun karma stratejisi ve keyfi $j = 1,2,\dots,m$ için $y_j \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$ olacak biçimdeki $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ vektörüne $II.$ oyuncunun karma stratejisi denir.

$I.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesini

$$S_n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall i = 1,2,\dots,n \; için \; x_i \geq 0 \text{ ve } \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

ile $II.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesini

$$S_m = \{Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) : \forall j = 1,2,\dots,m \; için \; y_j \geq 0 \text{ ve } \textstyle\sum_{j=1}^{m} y_j = 1\}$$

ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.2. $I.$ ve $II.$ oyuncunun S_n ve S_m karma stratejilerinin kümeleri kompakt ve konvekstir.

İspat. S_n ve S_m kümelerinin kompakt olması için kapalı ve sınırlı olması gerekmektedir. Bundan dolayı önce sınırlı olmayı inceleyelim.

S_n, $I.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesi ve $x \in S_n$ olsun. Bu durumda keyfi $1,2,\dots,n \; için \; x_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ olduğundan

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

olur. Dolayısıyla keyfi $x \in S_n$ için $\|x\| \leq 1$ elde edilmiş olur. Bu da S_n kümesinin sınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi S_n kümesinin kapalı olduğunu görelim. Bunun için S_n kümesinden bir dizi alalım. Yani,

Keyfi $k = 1,2, \dots$ için $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \in S_n$ olacak biçimde $(x^{(k)})$ dizisini alalım.

$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(*)}$

olsun. $x^{(*)} = \left(x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)}\right) \in S_n$ olduğunu gösterelim.

$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(*)}$ olduğundan keyfi $i = 1,2, \dots, n$ için $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olur.

$x^{(k)} \in S_n$ olduğundan keyfi $k = 1,2, \dots$ için $x_i^{(k)} \geq 0$ olur.

$k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan $x_i^{(*)} \geq 0$

olur. Benzer biçimde,

$x^{(k)} \in S_n$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} = 1$ olur.

Her $k = 1,2, \dots$ için $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(*)} = 1$$

olur. Yani

$$x^{(*)} = \left(x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)}\right) \in S_n$$

olur. bu da bize S_n kümesinin kapalı olduğunu gösterir.

Şimdi S_n kümesinin konveks bir küme olduğunu gösterelim.

Keyfi $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right) \in S_n$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun.

$$\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} \in S_n$$

olduğunu kanıtlayalım.

$$\begin{aligned}
\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} &= \alpha\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right) + (1-\alpha)\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right) \\
&= \left(\alpha x_1^{(1)}, \alpha x_2^{(1)}, \dots, \alpha x_n^{(1)}\right) + \left((1-\alpha)x_1^{(2)}, (1-\alpha)x_2^{(2)}, \dots, (1-\alpha)x_n^{(2)}\right) \\
&= \left(\alpha x_1^{(1)} + (1-\alpha)x_1^{(2)}, \alpha x_2^{(1)} + (1-\alpha)x_2^{(2)}, \dots, \alpha x_n^{(1)} + (1-\alpha)x_n^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $x^{(1)}, x^{(2)} \in S_n$ olduğundan

(i) $x_i^{(1)} \geq 0$ ve $x_i^{(2)} \geq 0$ dır. Dolayısıyla keyfi $i = 1,2,\dots,n$ için

$$\alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha)x_i^{(2)} \geq 0$$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} = 1$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i^{(2)} = 1$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha)x_i^{(2)}\right] &= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} x_i^{(2)} \\ &= \alpha + (1-\alpha) = 1\end{aligned}$$

olur. (i) ve (ii) öncüllerinde elde edilen ifadelerden $\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} \in S_n$ olduğu bulunur. Dolayısıyla S_n kümesi konvekstir. Benzer biçimde S_m kümesinin de kompakt ve konveks küme olduğu söylenebilir.

Burada karma stratejiler ile ilgili şu yorumu yapabiliriz. $I.$ oyuncu mevcut pür stratejilerinden keyfi bir i stratejisini x_i olasılığıyla seçecektir. Benzer biçimde $II.$ oyuncu da $j.$ stratejisini y_j olasılığıyla seçecektir. Eğer oyunda $I.$ oyuncu $i.$ stratejisini 1 olasılıkla diğer tüm pür stratejilerini 0 olasılıkla seçtiği yani $X = \{0,0,\dots,0,1,0,\dots,0\}$ karma stratejisi ile oynadığında sadece $i.$ pür stratejisi ile oynamış olur. Bundan dolayı mevcut pür stratejiler aslında karma stratejilerin özel bir halidir.

Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

olan bir oyunda $I.$ oyuncu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ karma stratejisi ve $II.$ oyuncu keyfi II_j pür stratejisini seçtiğinde yani $j.$ bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olan bir karma strateji, $I.$ oyuncunun beklenen kazancı (getirisi)

$$h(X, II_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\,, j = 1,2,\dots,m$$

olur. Benzer biçimde $I.$ oyuncu keyfi I_i pür stratejisi ve $II.$ oyuncu $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ karma stratejisini seçtiğinde $I.$ oyuncunun beklenen kazancı (getirisi)

$$h(I_i, Y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\,, i = 1,2,\dots,n$$

olur. Bundan dolayı $I.$ oyuncu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ karma stratejisi ve $II.$ oyuncu $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ karma stratejisini seçtiğinde $I.$ oyuncunun beklenen kazancı:

$$h(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

olarak bulunur. Söz konusu ifade matris olarak

$$h(X,Y) = XAY^T$$

biçiminde gösterilir. Burada Y^T vektörü, $Y^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in S_m$ vektörünün transpozesidir.

Tanım 3.2.3. $\forall X \in S_n$ ve $\forall Y \in S_m$ için,

$$XAY^{*T} \leq X^* AY^{*T} \leq X^* AY^T$$

olacak biçimdeki (X^*, Y^*) ikilisine karma stratejiler sınıfında eyer noktası veya denge durumu denir.

Denge durumuna ulaşmamızı sağlayan X^* ve Y^* stratejilerine denge stratejileri denir.

Teorem 3.2.4.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

keyfi matrisi için aşağıdaki ifadelerden biri doğrudur.

(i) Her $j = 1,2, \ldots, m$ için $XA_{.j} \geq 0$ olacak biçimde $X \in S_n$ vardır.

(ii) Her $i = 1,2, \ldots, n$ için $A_{i.}Y^T \leq 0$ olacak biçimde $Y \in S_m$ vardır.

Teorem 3.2.5. Matris oyunlarının karma stratejiler sınıfında her zaman oyun değeri vardır. Yani

$$\underbrace{max}_{X \in S_n} \underbrace{min}_{Y \in S_m} h(X,Y) = \underbrace{min}_{Y \in S_m} \underbrace{max}_{X \in S_n} h(X,Y)$$

dir.

3.3. Optimal Stratejiler ve Oyun Değerinin Bazı Özellikleri

Tanım 3.3.1. v oyun değeri olmak üzere,

$$\underbrace{min}_{y \in S_m} h(X^*, Y) = \underbrace{max}_{x \in S_n} \underbrace{min}_{y \in S_m} h(X,Y) = v$$

olacak biçimdeki $X^* \in S_n$ stratejisine $I.$ oyuncunun optimal stratejisi benzer biçimde

$$\underbrace{max}_{x\in S_n} h(X,Y^*) = \underbrace{min}_{y\in S_m} \underbrace{max}_{x\in S_n} h(X,Y) = v$$

olacak biçimdeki $Y^* \in S_m$ stratejisine ise $II.$ oyuncunun optimal stratejisi denir.

Tanım 3.3.2. $X^* \in S_n,\ I.$ oyuncunun optimal stratejisi, $Y^* \in S_m,\ II.$ oyuncunun optimal stratejisi ve v oyunun değeri olmak üzere (X^*, Y^*, v) üçlüsüne oyunun çözümü denir.

Teorem 3.3.3. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun karma stratejiler sınıfında her zaman çözümü vardır.

İspat. Teorem 3.2.5 gereği iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun karma stratejiler sınıfında her zaman değeri var olduğundan

$$\underbrace{min}_{Y\in S_m} \underbrace{max}_{X\in S_n} h(X,Y) = \underbrace{max}_{X\in S_n} \underbrace{min}_{Y\in S_m} h(X,Y) = v$$

olur. $S_n \subset \mathbb{R}^n$, $S_m \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme ve $h: S_n \times S_m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (X,Y) ye göre sürekli olduğundan Teorem 2.13 ve Teorem 2.14 den

$$f(X) = \underbrace{min}_{Y\in S_m} h(X,Y) \text{ ve } g(Y) = \underbrace{max}_{X\in S_n} h(X,Y)$$

olacak biçimdeki $f: S_n \to \mathbb{R}$ ve $g: S_m \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidirler. O halde $S_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme,

$$f(X) = \underbrace{min}_{Y\in S_m} h(X,Y) \text{ olacak}$$

biçimdeki $f: S_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\underbrace{min}_{Y\in S_m} h(X^*,Y) = \underbrace{max}_{X\in S_n} \underbrace{min}_{Y\in S_m} h(X,Y)$$

olacak biçimde $X^* \in S_n$ vardır. Dolayısıyla optimal strateji tanımı gereği $X^* \in S_n$ stratejisi $I.$ oyuncunun optimal stratejisi olur.

Benzer biçimde; $S_m \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme, $g(Y) = \underbrace{max}_{X\in S_n} h(X,Y)$ olacak biçimdeki $g: S_m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\underbrace{max}_{X\in S_n} h(X,Y^*) = \underbrace{min}_{Y\in S_m} \underbrace{max}_{X\in S_n} h(X,Y)$$

olacak biçimde $Y^* \in S_m$ vardır. Dolayısıyla optimal strateji tanımı gereği $Y^* \in S_m$ stratejisi $II.$ oyuncunun optimal stratejisi olur. Böylece $X^* \in S_n,\ I.$ oyuncunun optimal stratejisi, $Y^* \in S_m$, $II.$ oyuncunun optimal stratejisi ve v oyunun değeri olduğundan, (X^*, Y^*, v) üçlüsü oyunun çözümü olur.

Şimdi bu kısımda optimal stratejiler ve oyun değeri ile ilgili bazı özellikleri verelim.

Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

biçiminde olan bir matris oyununu ele alalım. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ I. oyuncunun karma stratejisi ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ II. oyuncunun karma stratejisi olsun. Bunun yanında getiri matrisinin i. satırını $A_{i.}$ ve j. sütununu da $A_{.j}$ ile gösterelim.

(i) $h(X,Y) = XAY^T = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$$= x_1(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} + x_2(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2m}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$x_n(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

olur. Dolayısıyla

$$h(X,Y) = XAY^T = \sum_{i=1}^{n} x_i\, A_{i.} Y^T$$

$$h(X,Y) = XAY^T = \sum_{i=1}^{n} X\, A_{.j} y_j$$

biçiminde de ifade edilebilir.

(ii) I. oyuncu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ karma stratejisi ve II. oyuncu keyfi II_j pür stratejisini seçtiğinde I. oyuncun beklenen kazancının (getirisinin) $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$ olduğunu biliyoruz. I. oyuncunun söz konusu kazancı

$$h(X, II_j) = XA_{.j} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$$

biçiminde, benzer şekilde I. oyuncu keyfi I_i pür stratejisi ve II. oyuncu $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ karma stratejisini seçtiğinde I. oyuncunun beklenen kazancını (getirisini)

$$h(I_i, Y) = A_{i.} Y^T = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$$

biçiminde ifade edilir.

(iii) Oyun değeri v olan bir oyunda $I.$ oyuncu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ optimal karma stratejisi ve $II.$ oyuncu keyfi II_j pür stratejisini seçtiğinde

$$h(X, II_j) = XA_{.j} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq v, j = 1,2, \dots, m$$

(iv) Benzer biçimde $I.$ oyuncu keyfi I_i pür stratejisi ve $II.$ oyuncu $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ optimal karma stratejisini seçtiğinde

$$h(I_i, Y) = A_{i.} Y^T = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq v, i = 1,2, \dots, n$$

(v) Her iki oyuncuda optimal karma stratejilerini seçtiklerinde oyun değeri,

$$v = h(X, Y) = XAY^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.3.4. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi olsun. Keyfi i için $x_i > 0$ ve keyfi j için $y_j > 0$ olan I_i ve II_j pür stratejisine sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun aktif stratejileri denir.

Teorem 3.3.5. (X, Y, v), getiri matrisi $(A)_{nxm}$ olan bir matris oyununun çözümü olsun. Eğer mevcut pür stratejilerin hepsi aktif strateji ise bu taktirde,

(i) $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = v$

(ii) $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = v$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $x_k > 0$ olacak biçimde bir k sayısı var ve $\sum_{j=1}^{m} a_{kj} y_j \neq v$ olsun. (X, Y, v) oyunun çözümü olduğundan $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisidir. Dolayısıyla $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq v$ dir. Kabulümüzden

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j < v$$

olur. (X, Y, v) oyunun çözümü olduğu için $v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$ dir. O halde

$$v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right) < \sum_{i=1}^{n} x_i (v) = v$$

yani $v < v$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla varsayımımız

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \neq v$$

ifadesi doğru değildir. Teoremin diğer kısmı da benzer yolla gösterilebilir.

Teorem 3.3.6. Getiri matrisi $A = (a_{ij}), i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,m$ ve oyun değeri v olan bir Γ matris oyunu verilmiş olsun. O zaman $B = (b_{ij}) = ba_{ij} + c, b > 0$ getiri matrisli Γ_B matris oyununda oyuncuların optimal karma stratejileriyle Γ matrisinin optimal karma stratejileri aynıdır. Γ_B oyununun oyun değeri ise $v_b = bv + c$ ile belirlenir.

İspat. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ Γ oyununda oyuncuların optimal karma stratejileri olsun . Benzer şekilde $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ Γ_B oyununda oyuncuların optimal karma stratejileri olsun . O zaman aşağıdaki eşitliklerin sağlanacağı açıktır.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq v, j = 1,2,\dots,m \\ &\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq v, i = 1,2,\dots,n \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} b_{ij} p_i \geq v_B, j = 1,2,\dots,m \\ &\sum_{j=1}^{m} b_{ij} q_j \leq v_B, i = 1,2,\dots,n \end{aligned}\right\}$$

ikinci eşitsizlikte $b_{ij} = ba_{ij} + c$ yazalım. O halde

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (ba_{ij} + c)\, p_i \geq v_B \\ &\sum_{j=1}^{m} (ba_{ij} + c) q_j \leq v_B \end{aligned}\right\}$$

olur. Elde edilen bu eşitliklerde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra söz konusu ifadeler

$$\left.\begin{aligned} b\sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i + c \geq v_B \\ b\sum_{j=1}^{m} a_{ij}q_j + c \leq v_B \end{aligned}\right\}$$

biçiminde olur. $b > 0$ olduğundan son eşitsizlikler

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i \geq \frac{v_B - c}{b}, \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}q_j \leq \frac{v_B - c}{b}$$

olarak ifade edilir. Bu ifadeler de

$$\frac{v_B - c}{b} = v$$

olarak alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i \geq v, \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}q_j \leq v$$

olur. Dolayısıyla

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) = p$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = (q_1, q_2, \dots, q_m) = q$$

$$v_b = bv + c$$

ifadeleri elde edilir.

3.4. Karma Stratejilerde Baskınlık

Getiri matrisi

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

olan matris oyununda

$$a_{ij} \geq a_{kj}\,, \ \forall j = 1,2, \dots, m$$

eşitsizliği sağlanıyor ise I. oyuncunun I_i stratejisi I_k stratejisine baskındır denir. Benzer biçimde

$$a_{ij} \leq a_{il}, \forall i = 1,2, \dots, n$$

ise II. oyuncunun II_j stratejisi II_l stratejisine baskındır denir.

Eğer oyunculardan herhangi biri baskın stratejileri ile oynarsa bu taktirde diğer oyuncunun strateji seçimine bağlı olmadan baskın strateji ile elde ettiği kazanç daha fazla olacaktır. Örneğin I. oyuncu I_i stratejisi ile oynadığında buna karşın II. oyuncu hangi stratejisi ile oynarsa oynasın, $I.$ oyuncu I_k stratejisi ile oynadığı anda elde ettiği kazançtan daha fazla kazanç elde eder.

Benzer durumda $II.$ oyuncuda baskın strateji ile oynadığında kaybını daha aza indirmiş olur. Getiri matrisi verilen bir oyunda baskın stratejilerin varlığı araştırılarak oyun matrisinin sadeleştrilmesi ve bu adımdan sonra çözümün bulunması amaca uygun olacaktır.

Matris oyunlarında oyuncular baskın olmayan stratejileri tercih etmeyeceklerinden bastırılan stratejileri temsil eden satır veya sütunlar getiri matrisinden silinir.

Burada oyunun çözümünden çıkarılan stratejiler acaba optimum strateji olabilir mi? şeklinde bir soru akla gelebilir. Buna şu şekilde cevap verilir: Göz önüne alınan matris oyununda optimal stratejileri sırasıyla X^* ve Y^* olsun. Ayrıca k satırı ile l sütunu problemden çıkarılmış olsun o zaman

$$h(k, Y^*) < \underbrace{max}_{i=1,2,\ldots,n} \; h(i, Y^*)$$

yani $I.$ oyuncunun herhangi bir strateji oynayarak elde edeceği beklenen kazanç k'dan büyük olduğu için k optimal strateji olamaz.

$II.$ oyuncu için:

$$h(X^*, l) > \underbrace{min}_{j=1,2,\ldots,m} \; h(X^*, j)$$

yani $II.$ oyuncu sahip olduğu herhangi bir j stratejini seçerse beklenen kaybı l'den küçük olduğu için l stratejisi $II.$ oyuncunun optimal stratejisi olamaz.

Bu açıklamadan görüldüğü gibi basılan stratejiler optimal strateji olmaz.

Getiri matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olan bir matris oyunu verilmiş olsun. Stratejilerin baskınlığını bu matris oyununda inceleyelim.

Her $i = 1,2,3$ için $a_{i2} \leq a_{i4}$

olduğundan $II.$ oyuncunun II_2 stratejisi II_4 stratejisine baskındır. Dolayısıyla $II.$ oyuncu kaybının daha fazla olduğu bu stratejisini kullanmaz. Bundan dolayı silinerek getiri matrisi sadeleştirilecektir. Söz konusu durumdan sonra getiri matrisi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Benzer biçimde devam edilecek olursa, Her $j = 1,2,3$ için $a_{3j} \geq a_{1j}$

olduğundan I. oyuncunun I_3 stratejisi I_1 stratejisine baskındır. Dolayısıyla I. Oyuncu kazancını arttırmak amacıyla daha fazla kazanacağı I_3 stratejisini seçecektir. Bu yüzden basılan stratejiyi kullanmayacaktır. Yani getiri matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

biçimine dönüşür. Elde edilen son matris içinde baskın stratejiler aranır. Bu sebeple,

Her $i = 1,2$ için $a_{i2} \leq a_{i3}$

olduğundan II. oyuncunun II_2 stratejisi II_3 stratejisine baskındır. Bundan dolayı 4x4 lük biçimde verilmiş matris oyununun getiri matrisi, baskın stratejilerin silinmesi sonucu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde 2x2 lik bir matrise indirgenmiştir. Getiri matrisi 2x2 lik bu matris incelendiğinde stratejilerin baskınlığı görülmemektedir. Bu durumda süreç sona erer. Sadeleştirilmiş oyunun çözümü verilen oyununda çözümü olmasından dolayı, göz önüne alınan matris oyununun yerine elde edilen matrise uygun oyunun çözümünün bulunması yeterli olacaktır.

BÖLÜM 4

MATRİS OYUNLARININ ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bilindiği gibi matris oyununun çözümünü bulmak, oyundaki her iki oyuncunun optimal stratejilerinin seçilmesi ve bu optimal stratejilere karşılık oyun değerinin bulunması demektir.

Eğer X^* ve Y^* sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun optimal stratejileri ise $I.$ oyuncunun ortalama kazancı yada beklentisi $h(X^*, Y^*)$ olur. Bu ise oyunun değerine eşittir. Matris oyununda oyunculardan herhangi biri optimal stratejisiyle oynarsa diğer oyuncu içinde en akılcı çözüm kendi optimal stratejisiyle oynamaktır.

4.1. 2x2-lik Oyunların Çözüm Yöntemi

Getiri matrisi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ biçiminde 2x2 lik bir matrisi ile verilen matris oyununun pür stratejilerde çözümü olmadığını varsayalım. Bilindiği gibi bu durumda verilen matris oyununun karma stratejilerde çözümü vardır. $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun optimal karma stratejileri olsun. Oyuncuların stratejileri arasında baskınlık ve denklik olmadığından her iki oyuncunun karma stratejileri pür strateji değildir. Yani herbir pür stratejinin oynanma olasılığı sıfırdan büyüktür. Dolayısıyla

$$0 < x_1, x_2 < 1 \text{ ve } 0 < y_1, y_2 < 1$$

dir. Bu optimal stratejileri bulmaya çalışacağız. Önce $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $X = (x_1, x_2)$ yi bulalım.

Aktif stratejilerin özelliğine göre eğer oyuncuların herhangi birisi optimal stratejisini seçtiğinde, diğer oyuncunun hangi stratejisini seçtiğine bağlı olmadan birinci oyuncunun kârı değişmez aynı kalır ve bu değer oyun değerine eşit olur (Morris, 1994).

$I.$ oyuncu X optimal stratejisini seçtiğinde karşı taraf (yani $II.$ oyuncu) kâr değeri değişmeksizin istenilen pür stratejisini seçebilir.

Getiri matrisi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olan oyunda, $I.$ oyuncu $X = (x_1, x_2), 0 < x_1, x_2 < 1$ ve $II.$ oyuncu $Y = (y_1, y_2), 0 < y_1, y_2 < 1$ karma optimal stratejilerini seçsinler. Bu durumda, (X, Y) denge durumu için

$$v = h(X, Y) = XAY^T = (x_1\ x_2) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla,

$$v = y_1(x_1 a_{11} + x_2 a_{21}) + y_2(x_1 a_{12} + x_2 a_{22}) \tag{4.1}$$

olarak ifade edilir. X optimal strateji olduğundan, yani

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v\,, i = 1,2, \dots, m$$

(4.1) eşitliğinde parantez içindeki ifadeler oyun değeri v den küçük eşit olurlar. Varsayalım ki bu ifadelerden biri oyun değeri v den küçük olsun yani,

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} < v \tag{4.2}$$
$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \leq v$$

olsun. Karma stratejilerin özelliği gereği $y_1 + y_2 = 1$ ve $y_1, y_2 \geq 0$ olduğundan ve (4.2) eşitsizliğinden (4.1) eşitsizliğinin sağ tarafı kesinlikle v den küçük olur. (4.1) eşitliğinin sağlanması için kabulümüzün aksi gerekir bu da

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} = v \tag{4.3}$$
$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} = v$$

olduğunu verir. Buradan bu iki eşitlikten ve karma stratejilerin özelliklerinden

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} = x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \Rightarrow x_1 a_{11} + (1 - x_1) a_{21} = x_1 a_{12} + (1 - x_1) a_{22}$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

biçiminde bulunur. $x_2 = 1 - x_1$ olduğu için x_2 ifadesi de kolayca elde edilmiş olur.

(4.1) eşitsizliği $v = x_1(a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + x_2(a_{21} y_1 + a_{22} y_2)$ biçiminde yazıldığında benzer işlemler yapılarak

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = v \tag{4.4}$$
$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = v$$

ifadesi elde edilir. Buradan da,

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

biçiminde elde edilir. Sonuç olarak $I.$ oyuncunun $X = (x_1, x_2)$ ve $II.$ oyuncunun $Y = (y_1, y_2)$ karma stratejileri bulunmuş olur. Oyuncuların karma stratejileri bulunduğundan bu ifadeler (4.1) eşitliğinde yerine yazıldığında oyun değeri,

$$v = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

olarak elde edilir.

Uyarı 4.1.1. A tersinir bir matris olmak üzere (4.3) ve (4.4) eşitlikleri matris gösterimi ile ifade edildiğinde $XA = (v, v)$ ve $AY^T = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$ biçiminde olur. Buradan,

$XA = (v, v) \Rightarrow XA = v(1,1)$, $(1,1) = J$ dersek, $XA = vJ$ elde edilir. A tersinir bir matris ise bu taktirde son eşitlikten $X = vJA^{-1}$ olur. Son eşitlik sağdan J^T (J^T, J nin transpozesidir) ile çarpılırsa

$$XJ^T = vJA^{-1}J^T \Rightarrow 1 = vJA^{-1}J^T \Rightarrow v = \frac{1}{JA^{-1}J^T}$$

elde edilir. Elde edilen bu $v = \frac{1}{JA^{-1}J^T}$ ifadesi $XA = vJ$ eşitliğinde yerine konulursa

$$XA = \frac{J}{JA^{-1}J^T} \Rightarrow X = \frac{JA^{-1}}{JA^{-1}J^T}$$

biçiminde bulunur. Benzer biçimde

$$Y = \frac{A^{-1}J^T}{JA^{-1}J^T}$$

olur.

Teorem 4.1.2. Getiri matrisi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olan matris oyununun denge noktası olmasın bu taktirde oyuncuların tek bir optimal stratejileri ve oyun değeri

$$X = \frac{JA^*}{JA^*J^T} \quad Y = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T} \quad v = \frac{|A|}{JA^*J^T}$$

biçiminde bulunur (Owen, 1995) ($A^* = adjA, |A| = detA,\ J = (1,1)$).

Örnek 4.1.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi ile verilen matris oyununun çözümünü araştırınız.

Çözüm. Daha öncede belirttiğimiz gibi matris oyununun çözümünü bulmak için (X^*, Y^*, v) üçlüsünü elde etmek gerekmektedir. O halde $I.$ ve $II.$ oyuncu sırasıyla $X^*\ ve\ Y^*$ karma optimal stratejileri ile oynadığında $I.$ oyuncu v kadarlık kazancı garantilerken $II.$ oyuncuda kaybının v den fazla olmasını engellemiş olur.

Bu durumda $I.$ oyuncunun $X^* = (x_1, 1 - x_1)$ karma stratejisi.

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-5}{1+2-3-5} = \frac{3}{5}$$

ve $x_2 = 1 - x_1 = \frac{2}{5}$ şeklinde bulunur. Yani $X^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ olur. Benzer yolla $II.$ oyuncunun $Y^* = (y_1, 1 - y_1)$ karma stratejisi de;

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-3}{1+2-3-5} = \frac{1}{5}$$

ve $y_2 = 1 - y_1 = \frac{4}{5}$ elde edilir. Yani $Y^* = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ olur. Oyuncular optimal stratejilerini kullandıklarında ortaya çıkan oyun değeri de;

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1.2 - 3.5}{1+2-3-5} = \frac{13}{5}$$

olur. Sonuçta göz önüne alınan oyunun çözümü $(X^*, Y^*, v) = (\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{13}{5})$ biçiminde elde edilir.

4.2. Grafik Yöntem

Grafik yöntem genellikle $nx2$ ve $2xm$ boyutlu matris oyunlarında kullanılır. Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \end{bmatrix}$$

biçiminde olan $2xm$ lik bir oyunu ele alalım. $I.$ oyuncunun 2 ve $II.$ oyuncunun m tane pür stratejisinin olduğunu ve oyunda mevcut pür stratejilerden hiç birinin diğerine baskın olmadığını varsayalım. Eğer x, $I.$ oyuncunun herhangi bir stratejisini oynama olasılığı ise karma strateji tanımı gereğince $1 - x$ de $I.$ oyuncunun diğer stratejisini oynama olasılığı olacaktır. Üstelik stratejiler arasında baskınlık söz konusu olmadığından $0 < x < 1$ dir.

$I.$ oyuncunun X karma stratejisi ve $II.$ oyuncu keyfi $j.$ pür stratejisini seçtiğini varsayalım. Bu durumda $I.$ oyuncunun elde edeceği kazanç yada $II.$ oyuncunun $I.$ oyuncuya yapacağı beklenen ödeme

$$h\left(X, II_j\right) = xa_{1j} + (1 - x)a_{2j}, j = 1,2, \dots, m \tag{4.5}$$

biçiminde olacaktır. Burada j nin her bir değeri için yukarıdaki ifade bir doğru belirtmektedir. $II.$ oyuncunun amacı $I.$ oyuncunun kazancını minimalleştirmek olduğundan

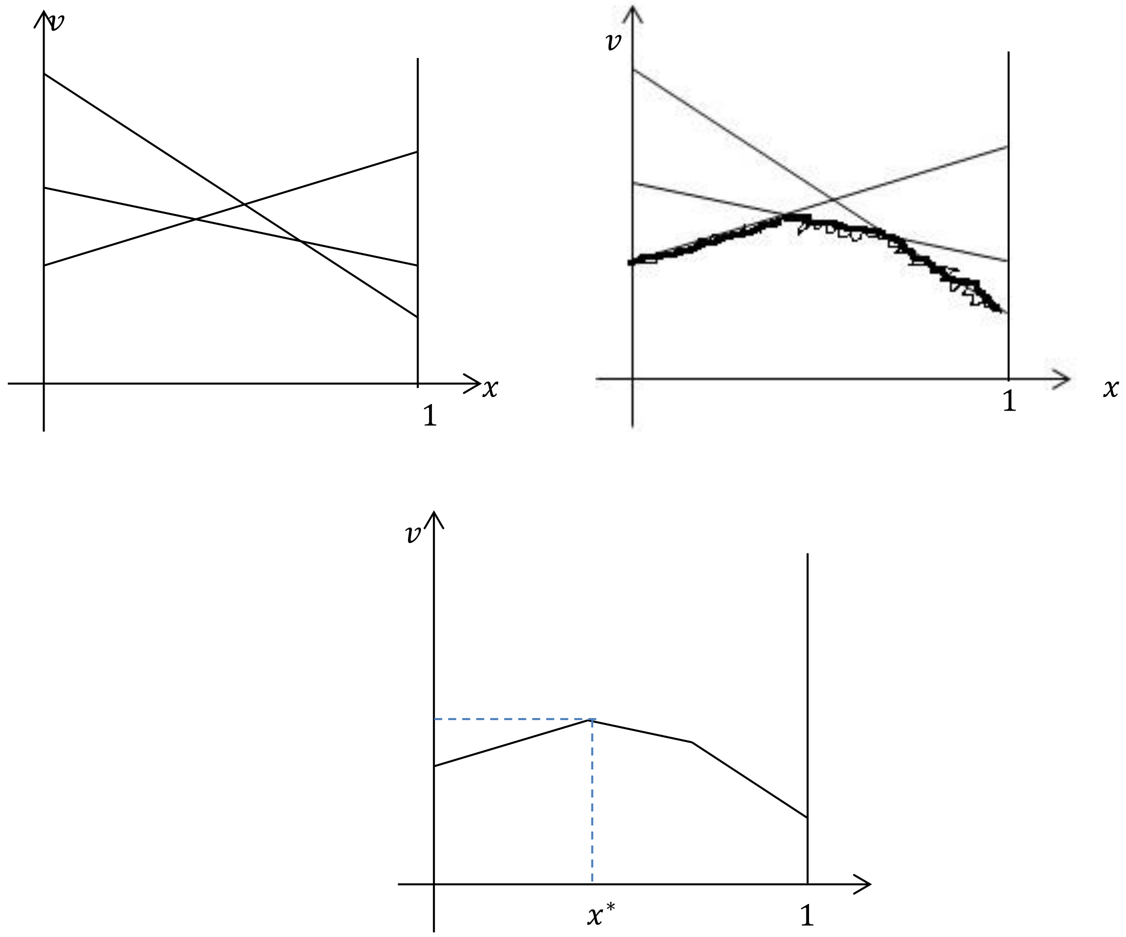
$$\underbrace{min}_{j} \left(xa_{1j} + (1 - x)a_{2j}\right) \tag{4.6}$$

den fazla kaybetmeyecektir. (4.6) ifadesinin grafiği $II.$ oyuncunun stratejilerine karşılık gelen doğruların alt zarfıdır ve bu zarf şekilde kalın kırık çizgi ile gösterilmiştir. $I.$ oyuncu kazancını maksimalleştirmek için $\underbrace{max}_{X} \underbrace{min}_{j} \left(xa_{1j} + (1 - x)a_{2j}\right)$ kadar kazancı garantiler.

$$v = \underbrace{max}_{X} \underbrace{min}_{j} \left(xa_{1j} + (1 - x)a_{2j}\right)$$

olduğundan, oyun değeri, (4.6) ile çizilen doğrulardan oluşan eğrinin en üst noktası olur. Bu en üst noktadaki değeri veren nokta x^* olsun. Bu x^* değeri için $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $X^* = (x^*, 1 - x^*)$ olur (Ferguson, 2008).

Grafiksel olarak çözüm yönteminin ayrıntıları aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3. Grafik yöntem ile 2xm lik oyunun çözümü

Şimdi $II.$ oyuncunun optimal stratejisini belirleyelim. $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ $II.$ oyuncunun karma optimal stratejisi olsun. Keyfi $j = j^*$ için II_{j^*} pür stratejisi II. oyuncunun aktif stratejisi ise bu taktirde teroem 3.4 den v oyun değeri olmak üzere $h(X^*, II_{j^*}) = v$ olur. Aktif strateji özelliğine gore $j.$ pür stratejiyi oynama olasılığı sıfır olan karma strateji için $y_j = 0$ olur.

$I.$ oyuncu herhangi bir pür stratejisi ve $II.$ oyuncu Y^* karma stratejisi ile oynadığında yani o stratejiyi seçtiğinde beklenen değer;

$$h(I_{i^*}, Y^*) = v \qquad (4.7)$$

olur. (4.7) eşitliği yardımıyla $II.$ oyuncunun karma optimal $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ stratejisi bulunur.

Örnek 4.2.1. Savaş halinde bulunan iki ülkeden X ülkesi Y ülkesine saldırmaktadır. X ülkesi elinde bulunan iki savaş uçağını, 4 farklı yoldan yaklaşarak saldıracağı bir bölgenin üzerine gönderiyor. Buna karşılık Y ülkesi elinde bulunan 4 uçak savar füzesi ile saldırılacak hedefi korumaya çalışmaktadır. Uçaksavar füzeleri sadece yerleştirildiği yaklaşma alanını kullana uçağa karşı etkilidir ve onu düşürmesi kesindir. İkinci bir uçağa karşı hiçbir etkisi bulunmamaktadır. Ancak aynı yaklaşım alanını kullanan ikinci bir uçak ikinci füzeyle engellenebilmektedir. X ülkesi hedefi yoketmek için çaba gösterirken Y ülkesi hedefi korumak için çaba gösterecektir. Şimdi uygun getiri matrisini oluşturarak, grafik yöntem ile çözümü belirleyelim (Ahlatçıoğlu ve Tiryaki, 1998).

Çözüm. X ve Y ülkesinin pür stratejilerini belirleyelim.

X ülkesinin stratejileri:

X_1: Uçakları farklı yaklaşım alanına göndermek

X_2: Uçakları aynı yaklaşım alanına göndermek

Y ülkesinin stratejileri:

Y_1: Her bir yaklaşım alanına bir füze yerleştirmek

Y_2: Bir yaklaşım alanına 2 füze, iki füzeyi birer birer yaklaşım alanlarına yerleştirmek

Y_3: İki yaklaşım alanına iki füze yerleştirip diğerlerini boş bırakmak

Y_4: Bir yaklaşım alanına 3 füze, diğer bir yaklaşım alanına bir füze, diğer iki yaklaşım alanını boş bırakmak

Y_5: Tüm füzeleri bir yaklaşım alanına yerleştirip diğerlerini boş bırakmak.

(X_1, Y_1): Uçaklar ayrı gidecek ve her bir alanda bir füze bulunacağından uçakların hedefi yok etme şansı 0 dır. Yani $a_{11} = 0$ dır.

(X_1, Y_2): Uçaklardan birisinin boş yaklaşma alanını bulması halinde hedef tahrip edilecektir. Dolayısıyla aranan olasılık, 1. veya 2. uçağın dört gözden boş olanını bulma olasılığıdır. Yani $a_{12} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ olur.

(X_1, Y_3): İki yaklaşma alanı boş olduğundan hedefi tahrip etme olasılığı: $a_{13} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

(X_1, Y_4): Uçaklar farklı bölgelere gittiğinden, hedef sadece füze olan yaklaşım alanlarına saldırı geldiğinde korunur onun dışında hedef tahrip edilecektir. Yani $a_{14} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

(X_1, Y_5): Her uçak farklı yaklaşım alanına gittiğinden ve hedef sadece bir bölgedeki dört uçak savar tarafından korunduğundan her türlü hedef tahrip edilecektir. Yani $a_{15} = 1$.

(X_2, Y_1): İki uçak birlikte gidecek, fakat yaklaşma alanlarında sadece bir uçağa karşı tedbir alındığından, uçaklardan birisi düşerken diğeri hedefi tahrip edecektir. Yani $a_{21} = 1$ olur.

(X_2, Y_2): Uçaklar, iki füzenin bulunduğu yaklaşma alanları haricinde hedefi yok edeceklerdir. Bu nedenle, $a_{22} = \frac{3}{4}$ olur.

(X_2, Y_3): İki tane boş yaklaşma alanını bulma olasılığı, hedefi tahrip etme olasılığına eşittir. Buna gore, $a_{23} = \frac{1}{2}$ olur.

(X_2, Y_4): Uçaklar sadece 3 füze olan yaklaşım alanında hedefi yok edemeyeceklerdir ancak bunun dışındaki 3 yaklaşım alanında da hedef yok edilecektir. Dolayısıyla $a_{24} = \frac{3}{4}$.

(X_2, Y_5): Tüm füzeler bir bölgede olduğundan sadece o yaklaşım alanına yönelindiğinde hedef korunabilirken diğer üç durumda hedef yok edilecektir. Yani $a_{25} = \frac{3}{4}$ olur. Aktif stratejiler sonucu harp oyununun getiri matrisi

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

ile ifade edilmektedir. Şimdi getiri matrisini bildiğimiz 2x5 lik matris oyununun çözümünü bulalım. $I.$ oyuncu $X = (x, 1 - x), 0 < x < 1$ karma stratejisi ve $II.$ oyuncu $II_j, j = 1,2,3,4,5$ pür stratejilerini seçsinler. Şu halde $I.$ oyuncunun getirisi $h(X, II_j) = xa_{1j} + (1 - x)a_{2j}$ ile hesaplanır. Ancak dikkat edilecek olursa, $II.$ oyuncunun yani Y ülkesinin 4. pür stratejisi 5. pür stratejisine baskındır. Yani $II_5 \geq II_4$ dir. Dolayısıyla Y ülkesi kayıplarını arttıracak olan II_5 stratejisini tercih etmez. Bundan dolayı oyunun getiri matrisi

$$A^* = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

olarak elde edilir. Benzer biçimde elde edilen son getiri matrisinde $II_4 \geq II_3$ olduğundan Y ülkesi kayıplarının artacağı II_4 stratejisini tercih etmez. Dolayısıyla basılan II_4 stratejisini silerek getiri matrisi

$$A^* = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla sadeleştirilmiş oyunun çözümünü bulalım.

$$h(X, II_1) = xa_{11} + (1 - x)a_{21} = x(0) + (1 - x)(1) = 1 - x$$

$$h(X, II_2) = xa_{12} + (1 - x)a_{22} = x\left(\frac{1}{2}\right) + (1 - x)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3 - x}{4}$$

$$h(X, II_3) = xa_{13} + (1-x)a_{23} = x\left(\frac{5}{6}\right) + (1-x)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2x+3}{6}$$

elde edilen bu üç doğrunun grafiğini çizelim. Daha sonra

$$\underbrace{min}_{j=1,2,3} \left(xa_{1j} + (1-x)a_{2j}\right)$$

doğrusunun grafiğini çizelim. Son grafikteki maksimum değer yani oyun değeri,

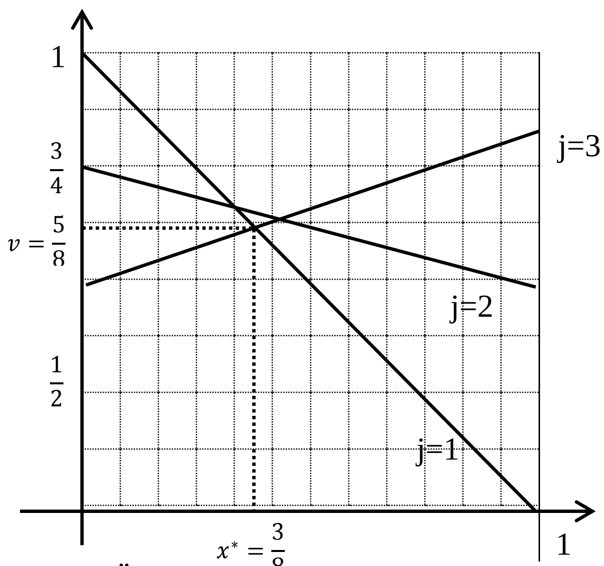
$$v = \underbrace{max}_{X}\underbrace{min}_{j}\left(xa_{1j} + (1-x)a_{2j}\right)$$

ile bulunur. Bu değer $j = 1$ ve $j = 3$ değerleri için çizilen doğru denklemlerinin kesişimlerinden elde edilmektedir. Dolayısıyla bu doğru denklemlerinin ortak çözümü yapıldığında

$$1 - x = x\frac{5}{6} + (1-x)\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{8}$$

bulunur. Bulunan bu $x = \frac{3}{8}$ değeri optimal stratejiyi verir.

Dolayısıyla $I.$ oyuncu yani X ülkesi için için optimal strateji $X = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ dir. X optimal strateji olduğundan $v = h\left(X, II_j\right) = xa_{1j} + (1-x)a_{2j}, j = 1,2,3$ eşitliğinden $v = \frac{5}{8}$ olur. Yani X ülkesi birinci pür stratejisini (uçakları farklı yaklaşma alanlarına gönderme) $\frac{3}{8}$ olasılıkla, ikinci pür stratejisini (uçakları aynı yaklaşma alanlarına gönderme) de $\frac{5}{8}$ olasılıkla uygulamaktadır yada seçmektedir denilir. Bu durumda garantilediği kazanç yani hedefi yok etme olasılığı $\frac{5}{8}$ dir. Elde edilen bu sonuç aşağıdaki şekilde de gösterilmiştir.



Şekil 4. Örnek 4.2.1 in grafik yöntem ile çözümü

Şimdi Y ülkesinin yada II. oyuncunun optimal stratejisini belirleyelim. X ülkesinin optimal stratejisi belirlenirken $j = 1$ ve $j = 3$ değerleri için çizilen doğru denklemlerinin kesişimlerinden faydalanılmıştır. Dolayısıyla X ülkesi için optimal strateji belirlenmesinde Y ülkesinin birinci ve üçüncü pür stratejileri kullanılırken ikinci pür strateji kullanılmamıştır. Yani ikinci pür strateji aktif strateji değildir. Bu da bize ikinci pür stratejinin oynanma olasılığının sıfır olduğunu verir. Bu nedenle Y ülkesinin yani II. oyuncunun karma optimal stratejisi

$$Y^* = (y_1^*, 0, 1 - y_1^*)$$

biçiminde olacaktır. X ülkesi için optimal strateji $X^* = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ olduğundan ve (4.7) eşitliğinden $h(I_1, Y^*) = v$ ve $h(I_2, Y^*) = v$ olur. $v = \frac{5}{8}$ olduğundan

$$h(I_1, Y^*) = \frac{5}{8} \text{ ve } h(I_2, Y^*) = \frac{5}{8} \text{ olur.} \tag{4.8}$$

olur. (4.8) eşitliğinden

$$\left.\begin{aligned} h(I_1, Y^*) &= 0y_1^* + \frac{1}{2}0 + \frac{5}{8}(1 - y_1^*) = \frac{5}{8} - \frac{5}{8}y_1^* = \frac{5}{8} \\ h(I_2, Y^*) &= 1y_1^* + \frac{3}{4}0 + \frac{1}{2}(1 - y_1^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1^* = \frac{5}{8} \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) eşitliklerinden

$$\frac{5}{8} - \frac{5}{8}y_1^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_1^* \Rightarrow y_1^* = \frac{1}{4}$$

olur. Dolayısıyla Y ülkesinin optimal stratejisi $Y^* = (y_1^*, 0, 1 - y_1^*) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$ olarak bulunur. Sonuç olarak verilen matris oyununun çözümü

$$(X^*, Y^*, v) = \left(\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right), \frac{5}{8}\right) \text{ olur.}$$

4.3. Lineer Programlama Yöntemi

Getiri matrisi $A = (a_{ij}), i = 1,2, \ldots, n, j = 1,2, \ldots, m$ olan oyunu ele alalım. Genelliği bozmaksızın, getiri matrisinin bütün elemanlarının pozitif olduğunu kabul edelim. Aksi halde Teorem 3.3.5 gereğince öyle c sayısı bulunabilirki o sayı matrisin bütün elemanlarına eklenerek, göz önüne alınan getiri matrisi bütün elemanları pozitif olan matrise dönüştürülebilir. Bu durumda, oyuncuların optimal karma stratejileri değişmez (Azimli, 2011).

Daha önce de ispatlandığı gibi oyuncuların sırasıyla $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ optimal karma stratejileri ve oyunun v değeri için aşağıdakiler sağlanacaktır.

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq v,\ j = 1,2,\dots,m\end{array}\right\} \tag{4.10}$$

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\ y_j \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq v,\ i = 1,2,\dots,n\end{array}\right\} \tag{4.11}$$

Yukarıdaki denklemlerin her iki yanını $v > 0$ sayısına bölelim ve aşağıdaki gösterimleri dikkate alalım.

$$p_i = \frac{x_i}{v}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$q_j = \frac{y_j}{v}, \qquad j = 1,2,\dots,m$$

Bu adımdan sonra (4.10) ve (4.11) problemleri sırasıyla aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{v}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq 1, \qquad p_i \geq 0\ \ i = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = \frac{1}{v}, \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq 1, \qquad q_j \geq 0\ \ j = 1,2,\dots,m$$

Oyunun kuralına göre $I.$ oyuncu öyle x_i değerlerini dolayısıyla öyle $p_i, i = 1,2,\dots,n$ değerlerini bulmaya çalışacak ki v oyun değeri maksimal olsun. O halde birinci problemin çözümü

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \to min,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq 1 \tag{4.12}$$

koşullarını sağlayan $p_i \geq 0\ i = 1,2,\dots,n$ değerlerinin bulunması problemine dönüştürülür (Öztürk, 2011)..

II. oyuncu öyle y_j değerlerini dolayısıyla öyle $q_j,\ j = 1,2,\dots,m$ değerlerini bulmaya çalışacakki v oyun değeri minimal olsun. O halde ikinci problemin çözümü

$$\sum_{j=1}^{m} q_j \to max,\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq 1 \tag{4.13}$$

koşullarını sağlayan $q_j \geq 0,\ (j = 1,2,\dots,m)$ değerlerinin bulunması problemine dönüştürülür.

Görüldüğü gibi (4.12) ve (4.13) problemleri birbirinin dualidir. O nedenle birinin çözülmesi yeterli olacaktır. Bilinen simpleks metot uygulanarak problemler çözülebilir

(Öztürk, 2011). Çözüm sonucu p_i, $(i = 1,2,\dots,n)$, q_j, $(j = 1,2,\dots,m)$ ve v değeri elde edilir. O halde optimal karma stratejilerin x_i ve y_j değerleri aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} x_i &= vp_i,\ (i = 1,2,\dots,n) \\ y_j &= vq_j\ \ (j = 1,2,\dots,m) \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Aşağıdaki yöntem ile de matris oyunlarının çözümleri lineer programlama problemine dönüştürülerek çözülebilir. Bilindiği gibi $A = (a_{ij}), i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,m$ getiri matrisli oyunda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sırasıyla I. oyuncunun ve II. oyuncunun karma stratejileri, oyunun v değeri (4.10) ve (4.11) koşullarını sağlamaktadır.

(4.10) ve (4.11) ifadelerini x_{n+j}, $j = 1,2,\dots,m$ ve y_{m+i}, $i = 1,2,\dots,n$ negatif olmayan değişkenler yardımıyla sırasıyla aşağıdaki biçimde yazalım.

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i - x_{n+j} = v,\ j = 1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,\dots,n+m \end{array}\right\} \tag{4.15}$$

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{m} y_i a_{ij} - y_{m+i} = v,\ i = 1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \\ y_j \geq 0,\ j = 1,2,\dots,m+n \end{array}\right\} \tag{4.16}$$

(4.15) de $j = 1$ e uygun eşitliği ele alalım ve o eşitliği $j = 2,3,\dots,m$ ye uygun diğer bütün eşitliklerden çıkartalım. Bu taktirde,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i - x_{n+1} = v \tag{4.17}$$

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - a_{i1})x_i - x_{n+j} + x_{n+1} = 0,\ j = 2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,\dots,n+m \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

elde edilir.

Oyun kuralı gereğince I. oyuncu v değerini maksimalleştirmek istediğinden (4.17) ve (4.18) problemlerinin çözümü aşağıdaki lineer programlama problemlerine dönüştürülür. (4.18) kısıtları dikkate alınarak (4.17) ifadesini maksimalleştirmelidir.

Benzer şekilde (4.16) de $i = 1$ e uygun eşitliği ele alalım ve o eşitliği $i = 2,3,\dots,n$ ye uygun diğer bütün eşitliklerden çıkartalım. bu taktirde

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j}y_j + y_{m+1} = v \tag{4.19}$$

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij}-a_{1j}\right)y_j - y_{m+1} + y_{m+i} = 0,\ i = 2,\dots,n \\ \textstyle\sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \\ y_j \geq 0,\ j = 1,2,\dots,m+n \end{aligned}\right\} \qquad (4.20)$$

ifadeleri elde edilir. O zaman oyun kuralı gereğince $II.$ oyuncu v değerini minimalleştirmek istediğinden (4.19) ve (4.20) problemlerinin çözümü aşağıdaki lineer programlama problemine dönüştürülür.

(4.20) kısıtları dikkate alınarak (4.19) ifadesini minimalleştirmelidir.

Örnek. 4.3.1. Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilmiş olan oyunu lineer programlama yöntemiyle çözelim.

Çözüm. Getiri matrisi verilmiş oyunda A nın bütün elemanlarına +2 sayısını ilave ederek, stratejik denk

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisini elde edelim. $I.$ ve $II.$ oyunncuların karma stratejileri sırasıyla $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ile oyun değeri v olsun. Kabul edelim ki $II.$ oyuncu karma $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ stratejisi ve $I.$ oyuncu keyfi pür stratejisi ile oynasın bu durumda $I.$ oyuncunun getirisinden ((4.11) denkleminden) aşağıdaki biçimde bir denklem sistemi elde edilir.

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 + 4y_4 \leq v$$
$$y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 4y_4 \leq v$$
$$2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 \leq v$$
$$4y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 \leq v$$

Elde edilen bu eşitliklerin her iki tarafı $\frac{1}{v}$ ile çarpılır ve $q_j = \frac{y_j}{v}$ $(j = 1,2,3,4)$ dönüşümü dikkate alınırsa

Amaç: $(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \rightarrow max$

Kısıtlar:
$$2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 \leq 1$$
$$q_1 + 2q_2 + 5q_3 + 4q_4 \leq 1$$
$$2q_1 + 3q_2 + 4q_3 + q_4 \leq 1$$
$$4q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 2q_4 \leq 1$$
$$q_j \geq 0\ (j = 1,2,3,4)$$

lineer programlama problemi elde edilir. Elde edilen lineer programlama modelinin başlangıç simpleks tablosu aşağıdaki biçimde yazılır.

Çizelge 1. Başlangıç simpleks çizelgesi

c_j		1	1	1	1	0	0	0	0	Çözüm
		y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	2	3	1	4	1	0	0	0	1
0	S_2	1	2	5	4	0	1	0	0	1
0	S_3	2	3	4	1	0	0	1	0	1
0	S_4	4	2	2	2	0	0	0	1	1
z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z_j - c_j$		-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	

Bu başlangıç çizelgesi simpleks yöntem ile çözüldüğünde

$$q_1 = \frac{5}{46},\ q_2 = \frac{7}{46}, q_3 = \frac{3}{46}, q_4 = \frac{3}{46},$$

olarak bulunur. $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = \frac{1}{v}$ olduğundan

$$v = \frac{1}{\frac{5}{46}+\frac{7}{46}+\frac{3}{46}+\frac{3}{46}} = \frac{23}{9}$$

olur. $y_j = vq_j \ \ (j = 1,2,3,4)$ eşitliğinden

$$y_1 = vq_1 = \frac{23}{9}\frac{5}{46} = \frac{5}{18}, \qquad y_2 = vq_2 = \frac{23}{9}\frac{7}{46} = \frac{7}{18}$$

$$y_3 = vq_3 = \frac{23}{9}\frac{3}{46} = \frac{1}{6}, \qquad y_4 = vq_4 = \frac{23}{9}\frac{3}{46} = \frac{1}{6}$$

olarak elde edilir. Benzer biçimde $I.$ oyuncu karma $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ stratejisi ve $II.$ oyuncu keyfi pür stratejisi ile oynasın bu durumda $I.$ oyuncunun getirisinden ((4.10) denkleminden) aşağıdaki biçimde bir denklem sistemi elde edilir.

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq v$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq v$$

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq v$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \geq v$$

Elde edilen bu eşitliklerin her iki tarafı $\frac{1}{v}$ ile çarpılır ve $\frac{x_i}{v} = p_i \ \ (i = 1,2,3,4)$ dönüşümü dikkate alınırsa

Amaç: $(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \rightarrow min$

Kısıtlar: $2p_1 + p_2 + 2p_3 + 4p_4 \geq 1$

$3p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 \geq 1$

$p_1 + 5p_2 + 4p_3 + 2p_4 \geq 1$

$4p_1 + 4p_2 + p_3 + 2p_4 \geq 1$

$p_i \ \geq 0 \ (i = 1,2,3,4)$

lineer programlama problemi elde edilir. Elde edilen lineer programlama modelinin başlangıç simpleks tablosu oluşturularak

$$p_1 = \frac{8}{69}, p_2 = \frac{3}{69}, p_3 = \frac{7}{69}, p_4 = \frac{9}{69}$$

değerleri elde edilir. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{v}$ olduğundan

$$v = \frac{1}{p_1+p_2+p_3+p_4} = \frac{23}{9}$$

olur. $x_i = vp_i \ \ (i = 1,2,3,4)$ eşitliği yardımıyla

$$x_1 = vp_1 = \frac{23}{9}\frac{8}{69} = \frac{8}{27}, \qquad x_2 = vp_2 = \frac{23}{9}\frac{3}{69} = \frac{1}{9}$$

$$x_3 = vp_3 = \frac{23}{9}\frac{7}{69} = \frac{7}{27}, \qquad x_4 = vp_4 = \frac{23}{9}\frac{9}{69} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur. Yani I. oyuncunun ve II. oyuncunun karma stratetejileri sırasıyla $X = \left(\frac{8}{27}, \frac{3}{27}, \frac{7}{27}, \frac{9}{27}\right)$, $Y = \left(\frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{3}{18}, \frac{3}{18}\right)$ olarak bulunur. Teorem 3.3.6 yardımıyla oyun değeri $v^* = v - 2 = \frac{23}{9} - 2 = \frac{5}{9}$ olur.

4.4. Ters Matris Yöntemi

Matris oyunlarının çözüm yöntemleri, matris oyunları teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Getiri matrisinin karakteristik özellikleri, matris oyunları çözüm yönteminde önemli bir unsurdur. Ters matris yöntemi de bu şekilde bir çözüm yöntemidir. Söz konusu yöntem nxn lik tersinir matrisler üzerinde geçerlidir. Ayrıca, oyuncuların aktif stratejileri için geçerlidir (Germeier, 1971). Aktif stratejilerin özelliği gereği, mevcut pür stratejileri oynama olasılıkları sıfırdan büyük olan stratejilerdir.

Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ile verilmiş matris oyununu göz önüne alalım. A tersinir bir matris olsun. I. oyuncu keyfi i pür stratejisi ile, II. oyuncu keyfi $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ optimal karma stratejisiyle oynasın. Bu durumda, v oyun değeri olmak üzere I. oyuncunun beklenen kazancının (getirisinin) $i = 1,2, \ldots, n$ için

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = v$$

biçiminde olduğunu söylemiştik. Söz konusu ifade

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = v$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = v$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n = v$$

biçiminde bir denklem sistemi olarak yazılır. Bu denklem sistemi, matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow AY^T = v(1^T)_{nx1} \qquad (4.21)$$

biçiminde elde edilir. A tersinir olduğundan A^{-1} vardır. Bundan dolayı (4.21) eşitliği soldan A^{-1} ile çarpılırsa

$$A^{-1}(AY^T) = A^{-1}v(1^T)_{nx1} \Rightarrow (A^{-1}A)Y^T = A^{-1}v(1^T)_{nx1} \Rightarrow Y^T = A^{-1}v(1^T)_{nx1}$$

dir. Yani,

$$Y^T = A^{-1}v(1^T)_{nx1} \qquad (4.22)$$

eşitliği elde edilir. v oyun değeri biliniyorsa son eşitlikten II. oyuncunun optimal stratejisi, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bulunur. O halde v oyun değerini bulmaya çalışalım. $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ optimal karma strateji olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

dir. Dolayısıyla

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \Rightarrow (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\mathbf{1})_{1xn}Y^T = 1 \qquad (4.23)$$

olarak bulunur. (4.22) eşitliği soldan $(\mathbf{1})_{1xn}$ ile çarpılırsa

$$(\mathbf{1})_{1xn}Y^T = (\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}v(1^T)_{nx1} \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.23) eşitliğini (4.24) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$1 = (\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}v(\mathbf{1}^T)_{nx1} = v(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}v(\mathbf{1}^T)_{nx1}$$

olur. (4.21) eşitliğinden $v \neq 0$ dır. Bundan dolayı son eşitlikten $(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}v(\mathbf{1}^T)_{nx1}$ değeri sıfırdan farklı olur. Dolayısıyla v oyun değeri

$$v = \frac{1}{(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}(\mathbf{1}^T)_{nx1}}$$

olarak bulunur.

Şimdi benzer biçimde I. oyuncunun optimal stratejisini belirleyelim. I. oyuncu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ optimal karma stratejisiyle, II. oyuncu keyfi j pür stratejisi ile oynasın. Bu durumda, v oyun değeri olmak üzere I. oyuncunun beklenen kazancının (getirisinin) $j = 1,2, \dots, n$ için

$$\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} = v$$

olur. Dolayısıyla elde edilen bu ifade n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir sistemdir. Bu sistemi matris formunda yazdığımızda

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = v \Longrightarrow XA = v(\mathbf{1})_{1xn}$$

olarak ifade edilir. A tersinir olduğundan, son eşitliği sağdan A^{-1} ile çarparsak, $(XA)A^{-1} = v(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1} \Longrightarrow X = v(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}$ olur. Yani,

$$X = v(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1} \tag{4.25}$$

dir. v oyun değeri bilinirse I. oyuncunu optimal karma $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ stratejisini hesaplamak kolay olacaktır. Bu nedenle v değerini belirleyelim. X karma strateji olduğundan karma strateji özelliği gereği

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

dir. Dolayısıyla

$$1 = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = X(\mathbf{1^T})_{nx1} \Longrightarrow X(\mathbf{1^T})_{nx1} = 1$$

olur. (4.25) eşitliğini $(\mathbf{1^T})_{nx1}$ ile çarparsak,

$$X(\mathbf{1^T})_{nx1} = v(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}(\mathbf{1^T})_{nx1}$$

dir. $X(\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}})_{nx1} = 1$ olduğundan ve $(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}(\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}})_{nx1}$ ifadesi sıfırdan farklı olduğu için v oyun değerini

$$v = \frac{1}{(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}(\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}})_{nx1}}$$

olarak elde etmiş oluruz. Elde ettiğimiz bu oyun değeri ifadesini (4.25) te yerine yazarsak bu taktirde $I.$ oyuncunun karma optimal stratejisi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bulunur.

Örnek 4.4.1 Getiri matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ ile verilen matris oyununun çözümünü ters matris yöntemi ile bulunuz.

Çözüm. Öncelikle verilen 3x3 lük kare matrisin tersini bulalım. $A^{-1} = \frac{adjA}{detA}$ olduğundan

$$detA = 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.11 - 3.1 + 4.(-2) = -27$$

$$adj(A^T) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -10 & -2 \\ -14 & -2 & 5 \\ -5 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

olur. Dolayısıyla $A^{-1} = \frac{adjA}{detA} = -\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 11 & -14 & -5 \\ -10 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ elde edilir. $I.$ oyuncu keyfi i pür stratejisi ile, $II.$ oyuncu keyfi $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ optimal karma stratejisiyle oynasın. Bu durumda, v oyun değeri olmak üzere $I.$ oyuncunun beklenen getirisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}$$

biçimindedir. (4.22) eşitliğinden $Y^T = A^{-1}v(1^T)_{nx1}$ biçiminde verildiğinden oyun değerini $v = \frac{1}{(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}(\mathbf{1}^T)_{nx1}}$ ifadesinden bularak $II.$ oyuncunun karma optimal stratejisi elde edilir. O halde

$$v = \frac{1}{(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}(\mathbf{1}^T)_{nx1}} = \frac{1}{(1\ 1\ 1)\begin{bmatrix} -\frac{11}{27} & \frac{14}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{2}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{4}{27} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{27}{14}$$

olur. Bu nedenle

$$Y^T = A^{-1}v(1^T)_{nx1} = \frac{27}{14}\begin{bmatrix} -\frac{11}{27} & \frac{14}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{2}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{4}{27} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{14} \\ \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

yani $Y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right)$ olur. Benzer biçimde $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi (4.25) eşitliğinden

$$X = v(\mathbf{1})_{1xn}A^{-1}$$

olduğu bilindiği için $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi

$$X = \frac{27}{14}(1\ 1\ 1)\begin{bmatrix} -\frac{11}{27} & \frac{14}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{2}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{4}{27} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{1}{7}\right)$$

olarak elde edilir.

4.5. Determinant Yöntemi

$I.$ oyuncunun n tane pür stratejisi ve $II.$ oyuncunun da benzer olarak n tane pür stratejisinin olduğu bir oyunu göz önüne alalım. Üstelik bu pür stratejilerden hiç birisi diğerine baskın olmasın. Böyle bir oyunun getiri matrisi,

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

biçiminde verilsin. Üstelik getiri matrisinin determinantı sıfırdan farklı olsun. $I.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $II.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesi $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere. aktif stratejilerin özelliğine göre eğer bir oyuncu kendi optimal stratejisini uygularsa o zaman karşı tarafın aktif stratejilerinin kümesi dışına çıkmamak koşulu ile uyguladığı stratejilere bağlı olmadan ilk oyuncunun kârı değişmez kalır ve oyun değerine eşit olur.

$I.$ oyuncu optimal karma stratejisi ve $II.$ oyuncu keyfi $j.$ pür stratejisi ile oynasın. Bu durumda $I.$ oyuncunun getirisi

$$v = h(X, II_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\, , j = 1,2, \ldots, n$$

biçimindedir.

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = v$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = v$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = v$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

eşitliklerinden $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ değerini bulalım. Bunun için determinant yönteminden yararlanalım (Anton, 1991).

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} v & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ v & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{v\begin{vmatrix} 1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{v|A_1|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & v & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & v & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & v & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{v\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 1 & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & 1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{v|A_2|}{|A|}$$

Benzer şekilde devam edilecek olursa;

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & v \\ a_{12} & a_{22} & \dots & v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & v \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{v\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{v|A_n|}{|A|}$$

olur.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

olduğu için

$$\frac{v|A_1|}{|A|} + \frac{v|A_2|}{|A|} + \cdots + \frac{v|A_n|}{|A|} = 1 \Rightarrow \frac{v(|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|)}{|A|} = 1$$

$$v = \frac{|A|}{|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|}$$

olur. Bulunan bu oyun değerini yukarıdaki eşitliklerde yerlerine yazarak $I.$ oyuncunun karma optimal stratejisi elde edilebilir. Yani

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|}$$

… … … … … … … … … … … ….

$$x_n = \frac{|A_n|}{|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|}$$

olur. Sonuç olarak I. oyuncunun $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ optimal karma stratejisi ve oyun değeri bulunmuş olur.

Benzer biçimde, I. oyuncunun keyfi i. pür stratejisi II. oyuncunun optimal karma $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ stratejisi ile oynadığını varsayalım. Bu durumda I. oyuncunun getirisi (3.16) dan

$$h(I_i, Y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \,, i = 1,2, \dots, n$$

ile ifade edilir. Bundan dolayı

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = v \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n = v \end{gathered}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

eşitliklerinden $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ değerini determinant yöntemi ile belirleyelim.

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} v & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ v & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{v \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|\hat{A}|} = \frac{v|\hat{A}_1|}{|\hat{A}|}$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & v & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & v & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & v & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{v \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 1 & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & 1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|\hat{A}|} = \frac{v|\hat{A}_2|}{|\hat{A}|}$$

Benzer şekilde devam edilecek olursa;

$$y_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & v \\ a_{12} & a_{22} & \dots & v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}=\frac{v\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 1 \end{vmatrix}}{|\hat{A}|}=\frac{v|\hat{A}_n|}{|\hat{A}|}$$

olur.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i=1$$

olduğu için

$$\frac{v|\hat{A}_1|}{|\hat{A}|}+\frac{v|\hat{A}_2|}{|\hat{A}|}+\cdots+\frac{v|\hat{A}_n|}{|\hat{A}|}=1 \Rightarrow \frac{v\left(|\hat{A}_1|+|\hat{A}_2|+\cdots+|\hat{A}_n|\right)}{|\hat{A}|}=1$$

$$v=\frac{|\hat{A}|}{|\hat{A}_1|+|\hat{A}_2|+\cdots+|\hat{A}_n|}$$

olur. Bulunan bu oyun değerini yukarıdaki eşitliklerde yerlerine yazarak $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi elde edilebilir. Yani

$$y_1=\frac{|\hat{A}_1|}{|\hat{A}_1|+|\hat{A}_2|+\cdots+|\hat{A}_n|}$$

$$y_2=\frac{|\hat{A}_2|}{|\hat{A}_1|+|\hat{A}_2|+\cdots+|\hat{A}_n|}$$

… … … … … … … … … … … ….

$$y_n=\frac{|\hat{A}_n|}{|\hat{A}_1|+|\hat{A}_2|+\cdots+|\hat{A}_n|}$$

olur. Sonuç olarak $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ bulunur.

Örnek 4.5.1. Getiri matrisi $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olan matris oyununun çözümünü determinant determinant yöntemi ile çözümünü bulalım.

Çözüm. Öncelikle getiri matrisinin determinantını hesaplayalım.

$$detA=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-14 \text{ olur.}$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_3=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$v = \frac{|A|}{|A_1| + |A_2| + |A_3|} = \frac{-14}{-6-1-10} = \frac{14}{17}$$

bulunur. Bunun yanında

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A_1| + |A_2| + |A_3|} = \frac{-6}{-6-1-10} = \frac{6}{17}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A_1| + |A_2| + |A_3|} = \frac{-1}{-6-1-10} = \frac{1}{17}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A_1| + |A_2| + |A_3|} = \frac{-10}{-6-1-10} = \frac{10}{17}$$

olur. Dolasıyla oyun değeri $v = \frac{14}{17}$ ve I. oyuncunun optimal karma stratejisi $X = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{6}{17}, \frac{1}{17}, \frac{10}{17}\right)$ olarak bulunmuş olur.

Benzer şekilde II. oyuncunun optimal karma stratejisi $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ değerini belirleyelim.

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$|\hat{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$|\hat{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\left|\hat{A}_3\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$y_1 = \frac{\left|\hat{A}_1\right|}{\left|\hat{A}_1\right| + \left|\hat{A}_2\right| + \left|\hat{A}_3\right|} = \frac{-9}{-9-2-6} = \frac{9}{17}$$

$$y_2 = \frac{\left|\hat{A}_2\right|}{\left|\hat{A}_1\right| + \left|\hat{A}_2\right| + \left|\hat{A}_3\right|} = \frac{-2}{-9-2-6} = \frac{2}{17}$$

$$y_3 = \frac{\left|\hat{A}_3\right|}{\left|\hat{A}_1\right| + \left|\hat{A}_2\right| + \left|\hat{A}_3\right|} = \frac{-6}{-9-2-6} = \frac{6}{17}$$

olur. Yani II. oyuncunun optimal karma stratejisi $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) = \left(\frac{9}{17}, \frac{2}{17}, \frac{6}{17}\right)$ olarak bulunmuş olur.

O halde getiri matrisi $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olarak verilmiş olan matris oyununun (X, Y, v) çözümü $(X, Y, v) = \left(\left(\frac{6}{17}, \frac{1}{17}, \frac{10}{17}\right), \left(\frac{9}{17}, \frac{2}{17}, \frac{6}{17}\right), \frac{14}{17}\right)$ olur.

4.6. Lagrange Yöntemi

İki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunun bir kümedeki maksimum ve minimumlarının bulunması işlemi temel analizden bildiğimiz önemli bir kavramdır. Bazen $f(x, y)$ ve $f(x, y, z)$ nin yerel maksimum ve yerel minimumlarının incelenmesinde mevcut değişkenler üzerine başka şartlar yüklenir. Yani bu değişkenler birbirinden tamamen bağımsız olmayıp ikinci bir denklemi veya eşitsizliği sağlaması istenir. Böylece f fonksiyonu, tanım kümesinin belli bir alt kümesine kısıtlanmış ve onun bu küme üzerindeki ekstremleri (maksimum ve minimumları) istenmiş olur. Örneğin; iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunun ekstremleri, x ve y değişkenlerinin $g_1(x, y) = 0$ olarak ikinci bir şartı veya $g_1(x, y) \leq M$ eşitsizliğini sağlaması istenebilir. $f(x, y)$ nin bu tür ekstremlerine kısıtlı ekstremler denir. $f(x, y, z)$ verildiğinde (x, y, z) noktasının sağladığı $g_1(x, y, z) = 0$ şartına yan şart ve g_1'e de kısıtlayan denir.

Kısmi türevin hesaplanmasının zor olduğu bazı hallerde, x ve y nin bağımsız değişken olarak seçilmesi iyi netice vermeyebilir. Hatta bunlardan daha da önemlisi yan şartla ilgili denklemden, z ye veya diğer iki değişkenden biri bulunmayabilir. Bu durumlarda değişkenlerden birini yok etmek için yan şartı kullanmaya gerek kalmadan problemi çözebilmek için alternatif bir teori ve yöntem geliştirilmiştir.

Lagrange (1736-1813) tarafından bulunan bu yönteme Lagrange Çarpım Yöntemi denir. Bu yöntemin en önemli avantajı, kapalı olarak verilmiş sınırlayıcı denklemin, değişkenlerden birinin bulunmasına gerek kalmaması ve böylece iyi sonuç vermeyecek değişkene göre çözüm riskinin ortadan kalkmış olmasıdır.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

fonksiyonuna Lagrange fonksiyonu, λ değişkenine Lagrange çarpanı denir. Lagrange fonksiyonu yardımıyla $f(x,y)$ fonksiyonunun $g(x,y) = 0$ kısıtına göre ekstremlerini bulmak için

$$L_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0$$

$$L_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0$$

denklem sisteminin (x_0, y_0, λ_0) çözüm noktaları bulunmalıdır (Guzman, 2003). f fonksiyonunun ekstrem noktaları varsa onlar (x_0, y_0) arasındadır. Söz konusu denklem sisteminin çözümleri yani $L(x,y,\lambda)$ nin kritik noktaları birden fazla ise L nin her bir (x_0, y_0, λ_0) kritik noktası için (x_0, y_0) da $f(x,y)$ nin değerleri hesaplanmalıdır. Bu değerlerin en büyüğü şartlı maksimum, en küçüğü şartlı minimumdur.

Daha genel olarak Lagrange çarpım yöntemi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ yan şartlarına göre ekstrem değerlerini bulmak için de uygulanabilir. $(m \leq n-1)$. f fonksiyonunun ekstrem değerleri

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Lagrange fonksiyonunun kritik noktaları arasındadır.

Özetle Lagrange çarpım yöntemi, verilen bir fonksiyonun belli kısıtlar altında maksimumunu veya minimumunu kısmi türevler alınarak elde edilen denklem sistemlerinin çözümlerini yani kritik noktaların bulunmasıdır. Bu doğrultuda

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow$Amaç fonksiyonu

$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \Rightarrow$Kısıt fonksiyonu

olmak üzere, Lagrange fonksiyonu

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

biçiminde ifade edilir (Guzman, 2003). Burada birinci derece koşullar, yani maksimum veya minimum noktasını verecek olan ifadeler

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

dir. Burada $g_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}, i = 1,2,\dots,n$ dir. Bu koşullar, L fonksiyonunun kritik noktalarının bulunması koşullarıdır. Burada, $(n+1)$ denklem (her x için ve λ için) ve $(n+1)$ bilinmeyen vardır. Elde edilen bu sistem çözüldüğünde $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve λ değeri bulunur. Dolayısıyla maksimum veya minimum değer bulunmuş olur.

4.6.1. Matris Oyunlarında Lagrange Yöntemi

Bilindiği gibi Lagrange çarpanları yöntemi ile fonksiyonların belirli kısıtlar altında maksimum yada minimum

Denge noktası olmayan ve aktif stratejilerin uygulanmadığı Aşağıdaki gibi nxn boyutlu matris ile verilmiş oyunu göz önüne alalım. Böyle bir oyunda, Lagrange yöntemi ile optimal stratejileri belirleyelim. Bu yüzden aşağıdaki kare matrisi ile verilen oyunu göz önüne alalım.

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

$I.$ oyuncunun pür stratejilerini oynama olasılıkları sırasıyla $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $II.$ oyuncunun pür stratejilerini oynama olasılıkları $y_1, y_2, \dots, y_n$ olsun. Üstelik

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

olduğu da bilinmektedir. Daha önce de incelediğimiz gibi nxn boyutlu bir matris ile verilen matris oyunu için karma stratejiler sınıfında $I.$ oyuncunun getirisi

$$h(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = XAY^T$$

ile bulunmaktadır. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ değerleri sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun optimal karma stratejileri olmak üzere oyun değerinin

$$v = h(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = XAY^T$$

olduğu 3. Bölümde belirtilmişti. Lagrange yöntemi yardımıyla v oyun değeri ve oyuncuların optimal karma stratejileri bulnunabilir. Bunun için aşağıda verilmiş olan fonksiyonlardan yararlanabiliriz.

$$L_I(X,Y) = v + \lambda_I(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

$$L_{II}(X,Y) = -v + \lambda_{II}(\sum_{j=1}^{n} y_j - 1)$$

Burada λ_I ve λ_{II} belirsiz Lagrange çarpanlarıdır.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_I(X,Y)}{\partial x_i} = 0, i = 1,2,\dots,n \\ \dfrac{\partial L_{II}(X,Y)}{\partial \lambda_{II}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L_{II}(X,Y)}{\partial y_j} = 0 \quad j = 1,2,\dots,n \\ \dfrac{\partial L_I(X,Y)}{\partial \lambda_I} = 0 \end{cases}$$

Eğer yukarıda verilen eşitliklerinde optimal strateji değerlerini yerine yazacak olursak bu eşitlikler yardımıyla oyun değeri için elde olunan ifadeden $I.$ oyuncunun getirisi bulunur. Şimdi verilen eşitlikleri biraz inceleyelim.

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_I = 0$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \lambda_I = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_n} = \frac{\partial v}{\partial x_n} + \lambda_I = 0$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial \lambda_{II}} = \sum_{j=1}^{n} y_j - 1 = 0$$

biçiminde bir lineer denklem sistemi elde edilir. Söz konusu lineer denklem sistemi, bilinen çözüm yöntemleriyle çözüldüğünde $II.$ oyuncunun optimal karma $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ stratejisi ve oyun değeri bulunur. Benzer biçimde $I.$ oyuncunun optimal karma $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ stratejisi için

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_1} = -\frac{\partial v}{\partial y_1} + \lambda_{II} = 0$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_2} = -\frac{\partial v}{\partial y_2} + \lambda_{II} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_n} = -\frac{\partial v}{\partial y_n} + \lambda_{II} = 0$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial \lambda_I} = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0$$

biçimindeki lineer denklem sisteminin çözümünün bulunması yeterli olacaktır.

Örnek 4.6.1.1. Getiri matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

biçiminde verilen oyunun çözümünü bulunuz.

Çözüm. Lagrange yöntemi yardımıyla getiri matrisi verilen matris oyununun çözüm yöntemini bulalım. X, $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi ve Y, $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi olsun. Bu durumda oyun değeri,

$$v = h(X,Y) = XAY^T = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= y_1(x_1 + 2x_2 + 2x_3) + y_2(3x_1 + 2x_2 + x_3) + y_3(4x_1 + x_2 + 6x_3)$$

olur. Oyun değerini ve karma stratejilerin özelliğini kullanarak sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncu için Lagrange fonksiyonlarını yazacak olursak,

$$L_I(X,Y) = v + \lambda_I(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

$$L_{II}(X,Y) = -v + \lambda_{II}(y_1 + y_2 + y_3 - 1)$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_I = y_1 + 3y_2 + 4y_3 + \lambda_I = 0$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \lambda_I = 2y_1 + 2y_2 + y_3 + \lambda_I = 0$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_3} = \frac{\partial v}{\partial x_3} + \lambda_I = 2y_1 + y_2 + 6y_3 + \lambda_I = 0$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial \lambda_{II}} = y_1 + y_2 + y_3 - 1 = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Eşitliklerin ilk ikisinden $y_1 - y_2 - 3y_3 = 0$, ikinci ve üçüncüsünden $y_2 - 5y_3 = 0$ denklemleri elde edilir. Son eşitsizliği de dikkate aldığımızda

$$y_1 - y_2 - 3y_3 = 0$$

$$y_2 - 5y_3 = 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin çözümünden $Y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right)$ değeri yani $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi elde edilmiş olur. Benzer biçimde $II.$ oyuncu için ifade edilen

$$L_{II}(X, Y) = -v + \lambda_{II}(\sum_{j=1}^{n} y_j - 1)$$

Lagrange fonksiyonunu yazıp gerekli işlemleri yapacak olursak,

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_1} = -\frac{\partial v}{\partial y_1} + \lambda_{II} = -(x_1 + 2x_2 + 2x_3) + \lambda_{II} = 0$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_2} = -\frac{\partial v}{\partial y_2} + \lambda_{II} = -(3x_1 + 2x_2 + x_3) + \lambda_{II} = 0$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_3} = -\frac{\partial v}{\partial y_3} + \lambda_{II} = -(4x_1 + x_2 + 6x_3) + \lambda_{II} = 0$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial \lambda_I} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Eşitliklerin ilk ikisinden $2x_1 - x_3 = 0,$ ikinci ve üçüncüsünden $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ denklemleri elde edilir. Son eşitsizliği de dikkate aldığımızda

$$2x_1 - x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

denklem sistemi elde edilir. Bulunan bu denklem sisteminin çözümünden $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $X = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14}\right)$ olarak bulunur.

$$v = XAY^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{11}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{14} \\ \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

ifadesinden oyun değeri $v = \frac{27}{14}$ olur. Dolayısıyla getiri matrisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ olan oyunun çözümü $(X, Y, v) = \left(\left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14}\right), \left(\frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right), \frac{27}{14}\right)$ olarak elde edilir.

4.7. Simetrik Oyunlar

Simetrik oyunlar, getiri matrisinin karakteristik özellikleri kullanılarak ortaya çıkmış bir oyun türüdür.

Getiri matrisi ters (anti) simetrik matris olan, yani $A = -A^{\boldsymbol{T}}$ eşitliğini sağlayan, matris oyunlarına simetrik oyunlar denir (Barron, 2008).

Teorem 4.7.1. Simetrik matris oyunlarının oyun değeri sıfırdır. Üstelik $I.$ oyuncunun karma optimal stratejisi X^*, $II.$ oyuncununda karma optimal stratejisidir.

İspat. X, $I.$ oyuncunun keyfi karma stratejisi olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
h(X,X) = XAX^T \underset{A=-A^T}{\Longrightarrow} h(X,X) &= X(-A^T)X^T = -XA^TX^T \\
&= -(XA^TX^T)^T \\
&= -XAX^T \\
&= -h(X,X)
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani $h(X,X) = 0$ olur.

(X^*, Y^*) verilen oyunun karma stratejiler sınıfında bir denge noktası olsun. Bu durumda $\forall X \in S_n$ ve $\forall Y \in S_m$ için

$$h(X,Y^*) \le h(X^*,Y^*) \le h(X^*,Y)$$

dir. Keyfi $X \in S_n$ ve $Y \in S_m$ karma stratejileri için

$$
\begin{aligned}
h(X,Y) = XAY^T \underset{A=-A^T}{\Longrightarrow} h(X,Y) &= X(-A^T)Y^T = -XA^TY^T \\
&= -(XA^TY^T)^T \\
&= -YAX^T \\
&= -h(Y,X)
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $h(X,Y) = -h(Y,X)$ olur. Elde edilen bu eşitliği göz önünde bulundurup denge noktası tanımını dikkate alınırsa,

$$h(X,Y^*) = -h(Y^*,X) \le h(X^*,Y^*) = -h(Y^*,X^*) \le h(X^*,Y) = -h(Y,X^*)$$
$$\Rightarrow -h(Y^*,X) \le -h(Y^*,X^*) \le -h(Y,X^*)$$
$$\Rightarrow h(Y,X^*) \le h(Y^*,X^*) \le h(Y^*,X)$$

olur. Denge noktası tanımına göre elde edilen son ifade, Y^* ın $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi olduğunu ve X^* ın da $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi olduğunu gösterir. Keyfi $X \in S_n$ ve $Y \in S_m$ karma stratejileri için $h(X,Y) = -h(Y,X)$ olduğundan X^*, Y^* optimal stratejileri için de

$h(X^*, Y^*) = -h(Y^*, X^*)$

yazılabilir. X^*, Y^* optimal strateji olduklarından

$h(X^*, Y^*) = v$ ve $h(Y^*, X^*) = v$

dir. Dolayısıyla $h(X^*, Y^*) = -h(Y^*, X^*) \Rightarrow v = -v \Rightarrow v = 0$ olur

BÖLÜM 5

ARALIK MATRİS OYUNLARI

Bu bölümde klasik matris oyunlarında getiri matrisi yerine elemanları aralıklar olan matrisler alınmıştır. Aralık matrisleri ile ilgili tanım, teorem ve kavramlar (Ganesan, 2007; Moore, 1979; Nirmala ve Ark., 2011; Sengupta ve Pal, 1997, 2000, 2001) çalışmalarında ve aralık matris oyunları ile ilgili tanım, teorem ve kavramlar (Collins ve Hu, 2008; Nayak ve Pal; 2006, 2009; Hu ve ark., 2008) çalışmalarında detaylı biçimde yer almaktadır.

5.1. Aralık Sayıları

Aralık sayıları reel sayıların bir alt kümesidir ve

$$A = [a_L, a_R] = \{x \in \mathbb{R}: a_L \leq x \leq a_R\}$$

biçiminde gösterilir. Burada $a_L, a_R \in \mathbb{R}$ ve $a_L \leq a_R$ dir. Eğer $a_L = a_R$ ise bu taktir de $A = [a, a]$ bir reel sayıdır. Aralık sayıları için orta nokta ve genişlik kavramları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$$m(A) = \frac{a_L +, a_R}{2}, w(A) = \frac{a_R - a_L}{2}$$

Aralık sayılarında temel aritmetik işlemler aşağıdaki biçimde tanımlanır; $\circ \in \{+,-,*,\div\}$ reel sayılar üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde

$$A \circ B = \{a \circ b: a \in A, b \in B\}$$

kapalı aralıkların kümesi üzerinde bir ikili işlem tanımlar.

$A = [a_L, a_R]$ ve $B = [b_L, b_R]$ iki aralık sayısı ve $a \in$ A , $b \in$ B olsun. Bu taktirde iki aralık sayısı arasındaki temel aritmetik işlemler aşağıdaki biçimde verilir.

$a \in$ A $\Longrightarrow a_L \leq a \leq a_R$ ve $b \in$ B $\Longrightarrow b_L \leq b \leq b_R$ yazılır. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$a_L + b_L \leq a + b \leq a_R + b_R \Longrightarrow a + b \in [a_L + b_L, a_R + b_R]$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A + B = [a_L + b_L, a_R + b_R]$$

olarak elde edilmiş olur.

$a \in$ A $\Longrightarrow a_L \leq a \leq a_R$ ve $b \in$ B $\Longrightarrow b_L \leq b \leq b_R$ $\Longrightarrow -b_R \leq -b \leq -b_L$ dir. Buradan $a_L - b_R \leq a - b \leq a_R - b_L$ olur. Yani $a - b \in [a_L - b_R, a_R - b_L]$ dir. O halde

$$A - B = [a_L - b_R, a_R - b_L]$$

$$AB = [minS, maxS], S = \{a_L b_L, a_L b_R, a_R b_L, a_R b_R\}$$

$\frac{A}{B} = A.(1/B)$, $(B \neq 0)$ biçiminde tanımlanır. $\frac{1}{B} = \{b: (\frac{1}{b}) \in B\} = [\frac{1}{b_R}, \frac{1}{b_L}]$ olmak üzere $\frac{A}{B} = A.\left(\frac{1}{B}\right) = [a_L, a_R]\left[\frac{1}{b_R}, \frac{1}{b_L}\right] = \left[\min\left\{\frac{a_L}{b_R}, \frac{a_L}{b_L}, \frac{a_R}{b_R}, \frac{a_R}{b_L}\right\}, \max\left\{\frac{a_L}{b_R}, \frac{a_L}{b_L}, \frac{a_R}{b_R}, \frac{a_R}{b_L}\right\}\right]$

$\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha A = \alpha[a_L, a_R] = \begin{cases} \alpha[a_L, a_R], & \alpha \geq 0 \\ \alpha[a_R, a_L], & \alpha < 0 \end{cases}$

Örnek 5.1.1. $A = [1,2]$ ve $B = [4,7]$ aralık sayıları için temel aritmetik işlemleri uygulayalım.

$A + B = [a_L + b_L, a_R + b_R] = [1 + 4, 2 + 7] = [5,9]$

$A - B = [a_L - b_R, a_R - b_L] = [1 - 7, 2 - 4] = [-6, -2]$

$AB = [\min\{4,7,8,14\}, \max\{4,7,8,14\}] = [4,14]$

$\frac{A}{B} = A.\left(\frac{1}{B}\right) = [1,2]\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{4}\right] = [\frac{1}{7}, \frac{1}{2}]$

Önerme 5.1.2. $A = [a_L, a_R]$ ve $B = [b_L, b_R]$ iki aralık sayısı olmak üzere

(i) $m(A + B) = m(A) + m(B)$

(ii) $m(A - B) = m(A) - m(B)$

(iii) $w(A + B) = w(A - B) = w(A) + w(B)$

İspat. $w(A - B) = w([a_L - b_R, a_R - b_L]) = \frac{(a_R - b_L) - (a_L - b_R)}{2}$

$= \frac{a_R - a_L}{2} + \frac{b_R - b_L}{2} = w(A) + w(B)$

5.2. Aralık Sayılarının Sıralanması

Aralık matris oyunlarında aralıkların hangisinin daha büyük olduğu, daha net bir ifadeyle iki aralığın sıralanması önemli bir kavramdır. Moore (1979) da iki sıralama bağıntısından bahsetmiştir. Bunlardan ilki, reel sayılardaki " $<$ " bağıntısının genelleştirilmesi olan

$A \prec B \Leftrightarrow a_R < b_L$

bağıntısıdır. Diğeri de kümelerde ki kapsama bağıntısının genelleştirilmesi olan

$A \subseteq B \Leftrightarrow a_L \geq b_L$ ve $a_R \leq b_R$

bağıntısıdır. Verilen bu iki bağıntı aralık sayılarını tam olarak sıralamazlar. Şöyle ki verilen iki aralık sayısı ayrık ise o zaman ilk bağıntıya göre sıralama yapılabilir. Ancak verilen aralık sayıları ayrık değil ise bu takdirde bu bağıntılardan ikinci verilen aralıkları değer anlamında sıralamaz. Ayrık olmayan keyfi iki aralık sayısının sıralanması Fuzzy mantığı ile karşımıza çıkmaktadır. Bu problem ile matris oyunlarının çözümleri veya çözüm yöntemleri Fuzzy matris oyunları diye yeniden incelenmiştir. Daha önce bununla ilgili Ishibuchi ve Tanaka (1990) farklı iki kısmi sıralama bağıntısı tanımlamışlardır. Bunlardan ilki,

$A <_{LR} B \Leftrightarrow A \leq_{LR} B$ ve $A \neq B$

$A \leq_{LR} B \Leftrightarrow a_L \leq b_L$ ve $a_R \leq b_R$

Diğer

$A \leq_{mw} B \Leftrightarrow m(A) \leq m(B)$ ve $w(A) \geq w(B)$

$A <_{mw} B \Leftrightarrow A \leq_{mw} B$ ve $A \neq B$

bağıntısıdır. Bu her iki bağıntıda kısmi sıralama bağıntısıdır. Bunların yanısıra, Sengupta ve ark. (2001), Sengupta ve Pal (1997, 2009) da aralık sayılarının büyüklük küçüklük açısından karşılaştırılmasıyla ilgili olarak uygunluk fonksiyonu kavramını ortaya çıkarmışlardır. Yapılan çalışmaya göre uygunluk fonksiyonu

$\phi: I \times I \to [0, \infty)$ ve $\phi(A \prec B) = \frac{m(B)-m(A)}{w(A)+w(B)}, w(A) + w(B) \neq 0$

biçiminde tanımlanmaktadır.

$m(B) \geq m(A)$ için $\phi(A \prec B)$ sayısı, B nin A dan büyüklüğünün derecesi olarak tanımlanır. ϕ nin tanımından;

$$\phi(A \prec B) = \begin{cases} 0 & m(A) = m(A) \\ > 0, < 1 & m(A) < m(B) \text{ ve } a_R > b_L \\ \geq 1 & m(A) < m(B) \text{ ve } a_R \leq b_L \end{cases}$$

yazılır. Eğer,

1. $\phi(A \prec B) = 0$ ise kesinlikle A nın B den küçük olduğu söylenemez.
2. $0 < \phi(A \prec B) < 1$ ise A, B den 0 ve 1 arasında bir derece ile küçüktür.
3. $\phi(A \prec B) \geq 1$ ise A, B den küçüktür.

Örnek 5.2.1. $A = [-5, -3]$ ve $B = [2,6]$ aralıkları için;

$m(A) = \frac{a_L+a_R}{2} = \frac{-5+(-3)}{2} = -4$, $w(A) = \frac{a_R-a_L}{2} = \frac{-3-(-5)}{2} = 1$

$m(B) = \frac{b_L+b_R}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$, $w(B) = \frac{b_R-b_L}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$

olduğu göz önüne alınırsa, $\phi(A \prec B) = \frac{m(B)-m(A)}{w(A)+w(B)} = \frac{4-(-4)}{1+2} = \frac{8}{3} > 1$ dolayısıyla A, B den küçüktür.

Örnek 5.2.2. $A = [2,8]$ ve $B = [1,15]$ aralıkları için

$\phi(A \prec B) = \frac{m(B)-m(A)}{w(A)+w(B)} = \frac{3}{10} \in (0,1)$

dolayısıyla A, B den 0,3 derecesiyle küçüktür.

5.3. Aralık Matrisi

Aralık matrisleri, klasik matriste elemanların yerine aralıkların alınmasıyla elde edilen özel bir matris türüdür.

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nm} \end{bmatrix} = (G_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$$

burada G_{ij} ler birer aralıktır. Aralık sayılarında olduğu gibi aralık matrislerinde de genişlik ve orta nokta kavramlarından bahsedilir.

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1m}, b_{1m}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2m}, b_{2m}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1}, b_{n1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{nm}, b_{nm}] \end{bmatrix}$$

Biçiminde verilmiş olan bir aralık matrisi için $m(G)$, $w(G)$ kavramları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$$m(G) = \begin{bmatrix} m(G_{11}) & \cdots & m(G_{1m}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m(G_{n1}) & \cdots & m(G_{nm}) \end{bmatrix} \qquad w(G) = \begin{bmatrix} w(G_{11}) & \cdots & w(G_{1m}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w(G_{n1}) & \cdots & w(G_{nm}) \end{bmatrix}$$

Not 5.3.1. $G, P \in \mathbb{R}^{n \times m}$ olsun. $m(G) = m(P)$ ise G ve P matrisleri denktir denir ve $G \approx P$ biçiminde gösterilir. Eğer özel olarak

$m(G) = m(P)$ ve $w(G) = w(P)$

şartları sağlanıyorsa bu taktirde G matrisi P matrisine eşitttir denir ve $G = P$ ile gösterilir.

Not 5.3.2. $m(G) = 0$ ise bu taktirde G matrisine sıfır aralık matrisi denir ve $\tilde{0}$ ile gösterilir. Özel olarak eğer $m(G) = 0$ ve $w(G) = 0$ ise bu taktirde sıfır aralık matrisi

$$\begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Not 5.3.3. Eğer $m(G) = I$ ise bu taktride G matrisine birim aralık matrisi denir ve $\tilde{I}$ ile gösterilir. Özel olarak eğer $m(G) = I$ ve $w(G) = 0$ ise bu taktirde birim aralık matrisi

$$\begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [1,1] \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Önerme 5.3.4. $G, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olsun. Bu taktirde,

(i) $m(G + P) = m(G) + m(P)$

(ii) $w(G - P) = w(G) + w(P)$

(iii) $m(GP) = m(G)m(P)$

Aralık sayılarında olduğu gibi aralık matrislerinde de temel artimetik işlemler aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$G, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ bir aralık vektörü olmak üzere

$G + P = (G_{ij} + P_{ij})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$

$GP = (\sum_{k=1}^{n} G_{ik} P_{kj})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$

$$GX = (\sum_{j=1}^{n} G_{ij} X)_{1 \le i \le n}$$

işlemleri tanımlanır.

Not 5.3.5. Aralık matrislerinin determinantları da bilinen klasik matris determinantı gibi hesaplanır. Ancak aralık matrisinin determinant sonucu yine bir aralık sayısıdır.

$det G = |G| = \sum G_{ij} \tilde{G}_{ij}$

$\tilde{G}_{ij}$ ler G_{ij} lerin kofaktörleridir

Örnek 5.3.6. $G = \begin{bmatrix} [1,2] & [-2,4] & [-3,-2] \\ [3,8] & [4,2] & [5,7] \\ [-1,5] & [-2,2] & [1,6] \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$det G = |G| = [1,2] \begin{vmatrix} [4,2] & [5,7] \\ [-2,2] & [5,7] \end{vmatrix} - 2{,}4 \begin{vmatrix} [3,8] & [5,7] \\ [-1,5] & [1,6] \end{vmatrix} + [-3,-2] \begin{vmatrix} [3,8] & [5,7] \\ [-1,5] & [1,6] \end{vmatrix}$$

$$= [-24,76] - [-128,210] + [-165,96]$$

$$= [-369,300]$$

olarak elde edilir.

Tanım 5.3.7. $G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} = (G_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ (burada G_{ij} ler birer aralıktır) kare aralık matrisi ve $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ bir aralık vektörü olsun. G tersinir ise $GX = I$ ve $XG = I$ denklemlerinin ortak çözümü G aralık matrisinin tersi olarak adlandırılır ve $G^{-1} = \frac{adjG}{|G|}$ ile gösterilir.

5.4. Aralık Matris Oyunları

Aralık matris oyunları elemanları aralıklar olan getiri matrisi ile ifade edilmektedir.. Aralık matris oyunlarında getiri matrisi girdileri aralık sayıları olan

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1m}, b_{1m}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2m}, b_{2m}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1}, b_{n1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{nm}, b_{nm}] \end{bmatrix}$$

matrisi ile verilir. I. oyuncu kârını maksimalleştirmeye II. oyuncu zararını (kaybını) minimalleştrimeye çalışmaktadır. I. oyuncu i. pür stratejisini, II. oyuncu j. pür stratejisini seçtiğinde I. oyuncu $[a_{ij}, b_{ij}]$ miktar ödeme (kazanç) elde eder.

Tanım 5.4.1. $\underbrace{\bigvee}_{i}\left\{\underbrace{\bigwedge}_{j}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\}$, $\underbrace{\bigwedge}_{j}\left\{\underbrace{\bigvee}_{i}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\}$ minimaksları var ve eşit ise yani

$$\underbrace{\bigvee}_{i}\left\{\underbrace{\bigwedge}_{j}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\} = \underbrace{\bigwedge}_{j}\left\{\underbrace{\bigvee}_{i}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\} = [a_{i_*j_*}, b_{i_*j_*}]$$

ise bu taktride (i_*, j_*) durumunda aralık matris oyununun pür stratejiler sınıfında bir denge noktası vardır üstelik $[a_{i_*j_*}, b_{i_*j_*}]$ ifadesine de oyun değeri denir.

A ve B iki aralık sayısı olmak üzere A ve B aralık sayılarının maksimumu $A \vee B$ ile minimumu $A \wedge B$ ile ifade edilmiştir.

Örnek 5.4.2. Getiri matrisi

$$G = \begin{bmatrix} [1,3] & [5,7] \\ [-3,-1] & [0,2] \end{bmatrix}$$

olan aralık matris oyunununun denge noktasının varlığını araştıralım.

$$\underbrace{\bigvee}_{i}\left\{\underbrace{\bigwedge}_{j}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\} = [1,3] = \underbrace{\bigwedge}_{j}\left\{\underbrace{\bigvee}_{i}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\}$$

olduğundan (I_1, II_1) durumunda ortaya çıkan $[1,3]$ bir denge noktasıdır. Yani söz konusu aralık matris oyununun oyun değeridir.

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1}, b_{m1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$$

getiri matrisi ile verilmiş aralık matris oyununda I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümeleri sırasıyla

$$S_I = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : x_i \geq 0, \quad i = 1,2, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$

$$S_{II} = \left\{(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m : y_j \geq 0, \quad j = 1,2, \ldots, m, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1\right\}$$

biçiminde gösterilmektedir.

$X, I.$ oyuncunun karma stratejisi ve $Y, II.$ oyuncunun karma stratejisi olmak üzere eğer oyuncular söz konusu karma stratejileri ile oynadığında yada bu karma stratejilerini seçtiklerinde $I.$ oyuncu için beklenen değer

$$h(X,Y) = XGY^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \left[a_{ij}, b_{ij}\right] y_j$$

biçiminde ifade edilir.

$$V_A^M = \bigvee_{X \in S_I} \bigwedge_{Y \in S_{II}} h(X,Y)$$

$$V_{\text{Ü}}^M = \bigwedge_{Y \in S_{II}} \bigvee_{X \in S_I} h(X,Y)$$

ifadeleri sırasıyla nxm-lik aralık matris oyununun alt değeri ve üst değerini göstermektedir. $V_A^M = V_{\text{Ü}}^M = v$ olan değere de oyun değeri denir.

Teorem 5.4.3. $G = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1}, b_{m1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$

getiri matrisi ile verilen oyunda

$$\bigvee_{X \in S_I} \bigwedge_{Y \in S_{II}} h(X,Y) \text{ ve } \bigwedge_{Y \in S_{II}} \bigvee_{X \in S_I} h(X,Y)$$

ifadeleri vardır ve birbirine eşittir.

Tanım 5.4.4.

$$\bigwedge_{Y \in S_{II}} h(X^*,Y) = \bigvee_{X \in S_I} \bigwedge_{Y \in S_{II}} h(X,Y) = v$$

olacak biçimdeki $X^* \in S_I$ stratejisine $I.$ oyuncunun optimal stratejisi

$$\bigvee_{X \in S_I} h(X,Y^*) = \bigwedge_{Y \in S_{II}} \bigvee_{X \in S_I} h(X,Y) = v$$

olacak biçimdeki $Y^* \in S_{II}$ stratejisine ise $II.$ oyuncunun optimal stratejisi denir.

Tanım 5.4.5. $X^* \in S_I$, $I.$ oyuncunun optimal stratejisi, $Y^* \in S_{II}$, $II.$ oyuncunun optimal stratejisi ve v oyunun değeri olmak üzere (X^*, Y^*, v) üçlüsüne aralık matris oyununun çözümü denir.

5.5. Aralık Matris Oyunlarında Grafik Yöntem

Getiri matrisi 2xn lik

$$G = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \end{bmatrix}$$

biçiminde denge noktası olmayan bir aralık matris oyununu alalım. Kabul edelim ki G aralık matrisinin tüm elemanlarının uzunlukları aynı olsun. Yani, $b_{ij} = a_{ij} + \mu, \mu > 0$ dır. I. oyuncunun iki ve II. oyuncunun n tane pür stratejisinin olduğu bu oyunda stratejilerden hiç biri diğerine baskın olmasın. I. oyuncunun iki tane pür stratejisi olduğundan karma stratejisi $X = (x, 1-x)$ biçiminde olacaktır.

Teorem 5.5.1. $G = [a_{ij}, b_{ij}]$ nxm-lik bir aralık matrisi ve (X^*, Y^*, v) üçlüsü bu aralık matris oyununun bir çözümü olsun. Oyuncuların pür stratejilerinin tümü aktif strateji ise bu taktirde,

$(\boldsymbol{i})$ $XA_{.j} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,[a_{ij}, b_{ij}] = v, j = 1,2, \dots, m$

$(\boldsymbol{ii})$ $A_{i.}Y^T = \sum_{j=1}^{m} [a_{ij}, b_{ij}]\,y_j = v, i = 1,2, \dots, n$

dir.

Teorem 5.5.2. v, getiri matrisi $G = \left([a_{ij}, b_{ij}]\right)_{i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m}$ olan aralık matris oyununun değeri olsun. Bu takdir de aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$(\boldsymbol{i})$ $\bigwedge_{Y \in S_{II}} \bigvee_{X \in S_I} h(X,Y) = \bigwedge_{Y \in S_{II}} \bigvee_{i=1,2,\dots,n} XA_{.j}\,, j = 1,2, \dots, m$

$(\boldsymbol{ii})$ $\bigvee_{X \in S_I} \bigwedge_{Y \in S_{II}} h(X,Y) = \bigvee_{X \in S_I} \bigwedge_{j=1,2,\dots,m} A_{i.}Y^T\,, i = 1,2, \dots, n$

I. oyuncu X karma stratejisi ve II. oyuncu keyfi j pür stratejilerini seçsinler bu takdirde I. oyuncunun getirisi

$$h(X, II_j) = XA_{.j} = (x, 1-x)\begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{nn}, b_{nn}] \end{bmatrix}$$

$$= x[a_{1j}, b_{1j}] + (1-x)[a_{2j}, b_{2j}], j = 1,2, \dots, n$$

$$= [a_{1j} - b_{2j}, b_{1j} - a_{2j}]x + [a_{2j}, b_{2j}], j = 1,2, \dots, n$$

biçiminde olacaktır.

$$\psi_j(x) = [a_{1j} - b_{2j}, b_{1j} - a_{2j}]x + [a_{2j}, b_{2j}], j = 1,2, \dots, n$$

olarak gösterilsin. j nin her bir değerine karşılık $\psi_j(x)$ bir doğru ile ifade edilir. Bundan dolayı II. oyuncunun her bir pür stratejisine bir doğru karşılık gelir. II. oyuncu kaybını minimalleştirmek isteyeceğinden

$$\underbrace{min}_{j}\,\psi_j(x)$$

değeri kayıplarının üst sınırı olacaktır. II. oyuncunun her bir pür stratejisine karşılık gelen

$$\psi_j(x) = [a_{1j} - b_{2j}, b_{1j} - a_{2j}]x + [a_{2j}, b_{2j}], j = 1,2, \dots, n$$

doğruları çizildiğinde

$$\underbrace{min}_{j}\,\psi_j(x)$$

ifadesi farklı doğruların birleşimlerinden oluşacaktır.

$I.$ oyuncu kazancını maksimalleştirmek için $\underbrace{max}_{x}\underbrace{min}_{j}\psi_j(x)$ kadar kazancı garantiler. Teorem 5.5.2. den,

$$v = \underbrace{max}_{X}\underbrace{min}_{j}\psi_j(x)$$

olduğundan, oyun değeri, $\psi_j(x), j = 1,2,\ldots,n$ ile çizilen doğrulardan oluşan eğrinin en üst noktası olur. Bu en üst noktadaki değeri veren nokta x^* olsun. Bu x^* değeri için $I.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $X^* = (x^*, 1 - x^*)$ olur. Benzer biçimde $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi bulunur.

Örnek 5.5.3. Getiri matrisi,

$$G = \begin{bmatrix} [-3,-1] & [4,6] & [1,3] & [-6,-4] \\ [6,8] & [-7,-5] & [-2,0] & [4,6] \end{bmatrix}$$

biçiminde verilen aralık matris oyununun çözümünü grafik yöntem uygulayarak belirleyiniz

Çözüm.

$$\bigvee_{i=1,2}\bigwedge_{j=1,2,3,4}[a_{ij}, b_{ij}] = \bigvee_{i=1,2}([-6,-4],[-7,-5]) = [-7,-5]$$

$$\bigwedge_{j=1,2,3,4}\bigvee_{i=1,2}[a_{ij}, b_{ij}] = \bigwedge_{j=1,2,3,4}([6,8],[4,6],[1,3],[4,6]) = [1,3]$$

olduğunda verilen matris oyununun denge noktası yoktur.

$I.$ oyuncu X karma stratejisi ve $II.$ oyuncu keyfi $j.$ pür stratejisini seçsinler bu takdirde $I.$ oyuncunun getirisi

$$h(X, II_j) = (x, 1-x)\begin{bmatrix} [-3,-1] & [4,6] & [1,3] & [-6,-4] \\ [6,8] & [-7,-5] & [-2,0] & [4,6] \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Buradan

j=1, $\psi_1(x) = [a_{11} - b_{21}, b_{11} - a_{21}]x + [a_{21}, b_{21}] = [-11,-7]x + [6,8]$

j=2, $\psi_2(x) = [a_{12} - b_{22}, b_{12} - a_{22}]x + [a_{22}, b_{22}] = [9,13]x + [-7,-5]$

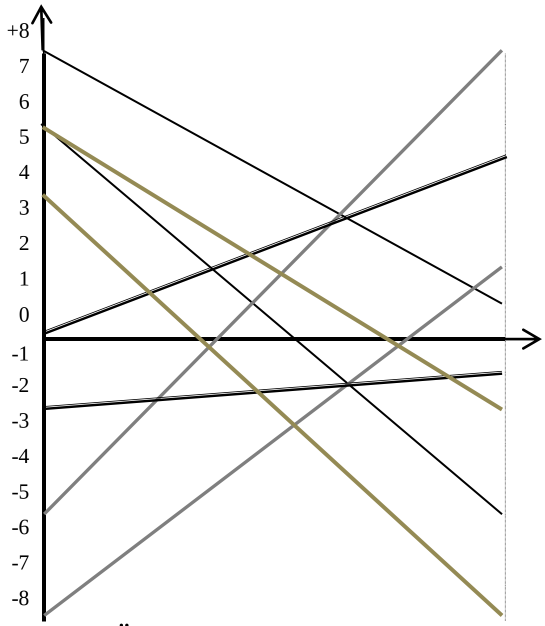
j=3, $\psi_3(x) = [a_{13} - b_{23}, b_{13} - a_{23}]x + [a_{23}, b_{23}] = [1,5]x + [-2,0]$

j=4, $\psi_4(x) = [a_{14} - b_{24}, b_{14} - a_{24}]x + [a_{24}, b_{24}] = [-12,-8]x + [4,6]$

elde edilir.

$$\underbrace{min}_{j=1,2,3,4}\ \psi_j(x)$$

ifadesi farklı doğruların birleşimlerinden oluşacaktır. $II.$ oyuncunu pür stratejilerine karşılık elde edilen doğrular çizildiğinde aşağıdaki biçimde bir grafik oluşur.



Şekil 5. Örnek 5.5.3 ün grafik yöntem ile çözümü.

Yukarıda bulunan doğrular çizildiğinde, elde edilen doğrular ailesinin en üst noktası $j = 2$ ve $j = 4$ için çizilen doğruların kesişimlerinde olur. Bundan dolayı

$$\psi_2(x) = [9,13]x + [-7,-5] = [9x - 7, 13x - 5]$$

$$\psi_4(x) = [-12,-8]x + [4,6] = [-12x + 4, -8x + 6]$$

ifadelerinden $9x - 7 = -12x + 4 \rightarrow x = \frac{11}{21}$ olur.

Dolayısıyla $I.$ oyuncunun karma stratejisi $X = (x, 1 - x) = \left(\frac{11}{21}, \frac{10}{21}\right)$ olarak bulunur. $x = \frac{11}{21}$ değerini $\psi_2(x)$ ifadesinde yerine yazdığımızda oyun değeri

$$v = \left[\frac{-48}{21}, \frac{38}{21}\right]$$

dir.

Diğer yandan, oyun değerinin bulunmasında $II.$ oyuncunun birinci ve üçüncü pür stratejileri dikkate alınmamıştır. Bu ise ikinci ve dördüncü pür stratejilerin aktif strateji olduğu anlamına gelmektedir. Bundan dolayı, $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $Y = (0, y_2, 0, y_4)$ biçiminde aranacaktır.

$$h(I_i, y) = v$$

eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} [4,6] & [-6,-4] \\ [-7,-5] & [4,6] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \end{bmatrix} = v$$

olur. Buradan da $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi $Y = \left(0, \frac{10}{21}, 0, \frac{11}{21}\right)$ olarak bulunur.

5.6. Aralık Matris Oyunlarında Determinant Yöntemi

Getiri matrisi nxn lik determinantı sıfırdan farklı olan klasik matris oyunlarında determinant yöntemi incelenmişti. Bu kısımda klasik matris oyunlarının yerine getiri matrisi olarak aralık matrisi alınıp, söz konusu yöntem aralık matris oyunları için incelenmiştir. Katsayılar matrisi aralık matrisi olan n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir lineer denklem sistemini göz önüne alarak determinant metodunu uygulayalım.

$$[a_{11},b_{11}]X_1+[a_{12},b_{12}]X_2+\cdots+[a_{1n},b_{1n}]X_n=B_1$$

$$[a_{21},b_{21}]X_1+[a_{22},b_{22}]X_2+\cdots+[a_{2n},b_{2n}]X_n=B_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$[a_{n1},b_{n1}]X_1+[a_{n2},b_{n2}]X_2+\cdots+[a_{nn},b_{nn}]X_n=B_n$$

denklem sistemini düşünelim.

Teorem 5.6.1. G, nxn biçiminde bir aralık matrisi ve $GX=B$ lineer denklem sistemi verilsin. G aralık matrisi tersinir ise bu denklemin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$1\le i\le n \text{ için, } x_i=\frac{detG_i}{detG},$$

olarak bulunur. Burada G_i, G nin i. sütunu çıkarılıp onun yerine $B=(B_1,B_2,\dots,B_n)$ vektörü konulması ile elde edilen aralık matrisidir.

İspat.

$$G=\begin{bmatrix}[a_{11},b_{11}] & [a_{12},b_{12}] & \cdots & [a_{1n},b_{1n}]\\ [a_{21},b_{21}] & [a_{22},b_{22}] & \cdots & [a_{2n},b_{2n}]\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ [a_{n1},b_{n1}] & [a_{n2},b_{n2}] & \cdots & [a_{nn},b_{nn}]\end{bmatrix}$$

matrisi tersinir bir aralık matrisi olsun. $GX=B$ denkleminin her iki yanı G^{-1} ile çarpılırsa, bu taktirde

$$G^{-1}\,GX=G^{-1}\,B\Rightarrow IX=G^{-1}\,B\Rightarrow X=G^{-1}\,B=\frac{1}{detG}(adjG)B$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}=\frac{1}{detG}\begin{bmatrix}\tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{21} & \cdots & \tilde{G}_{n1}\\ \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{22} & \cdots & \tilde{G}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \tilde{G}_{1n} & \tilde{G}_{2n} & \cdots & \tilde{G}_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_n\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{detG} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11}B_1 & \tilde{G}_{21}B_2 & \cdots & \tilde{G}_{n1}B_n \\ \tilde{G}_{12}B_1 & \tilde{G}_{22}B_2 & \cdots & \tilde{G}_{n2}B_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{G}_{1n}B_1 & \tilde{G}_{2n}B_2 & \cdots & \tilde{G}_{nn}B_n \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{1}{detG}(\tilde{G}_{11}B_1 + \tilde{G}_{21}B_2 + \cdots + \tilde{G}_{n1}B_n)$$

$$X_2 = \frac{1}{detG}(\tilde{G}_{12}B_1 + \tilde{G}_{22}B_2 + \cdots + \tilde{G}_{n2}B_n)$$

… … … … … … … … … … … … … … … ….

$$X_n = \frac{1}{detG}(\tilde{G}_{1n}B_1 + \tilde{G}_{2n}B_2 + \cdots + \tilde{G}_{nn}B_n)$$

olarak bulunur. Parantez içindeki ifadeler G matrisinde keyfi j. sütun yerine B vektörü konulmasıyla elde edilen matrisin determinantına eşittir. Dolayısıyla;

$$X_1 = \frac{detG_1}{detG}, X_2 = \frac{detG_2}{detG}, \ldots, X_n = \frac{detG_n}{detG}$$

olarak ifade edilir.

Sonuç olarak katsayılar matrisi aralık matrisi olan $GX = B$ şeklinde bir lineer denklem sistemi içinde determinant yöntemi ile çözümden bahsedilebilmektedir. Yukarıdaki teorem yardımıyla getiri matrisi

$$G = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1}, b_{n1}] & [a_{n2}, b_{n2}] & \cdots & [a_{nn}, b_{nn}] \end{bmatrix}$$

biçiminde verilen aralık matris oyununu düşünelim. I. oyuncu X optimal karma stratejisi ile II. oyuncu keyfi j. pür stratejisi ile oynasın. Bu durumda I. oyuncunun getirisi

$$h(X, j) = \sum_{i=1}^{m} X_i G_{ij}, \qquad j = 1,2, \ldots, n$$

olur. Dolayısıyla; yukarıdaki eşitlikten

$$[a_{11}, b_{11}]X_1 + [a_{21}, b_{21}]X_2 + \cdots + [a_{n1}, b_{n1}]X_n = v$$

$$[a_{12}, b_{12}]X_1 + [a_{22}, b_{22}]X_2 + \cdots + [a_{n2}, b_{n2}]X_n = v$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$[a_{1n},b_{1n}]X_1+[a_{2n},b_{2n}]X_2+\cdots+[a_{nn},b_{nn}]X_n=v$$

denklem sistemi oluşturulur. Teorem 5.6.1. yardımıyla

$$X_1=\frac{detG_1}{detG},\ X_2=\frac{detG_2}{detG},\ \dots X_n=\frac{detG_n}{detG}$$

biçiminde bulunabilir. Bu nedenle;

$$X_1=\frac{detG_1}{detG}=\frac{1}{detG}\begin{vmatrix} v & [a_{12},b_{12}] & \cdots & [a_{1n},b_{1n}] \\ v & [a_{22},b_{22}] & \cdots & [a_{2n},b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v & [a_{n2},b_{n2}] & \cdots & [a_{nn},b_{nn}] \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{detG}\begin{vmatrix} [1,1] & [a_{12},b_{12}] & \cdots & [a_{1n},b_{1n}] \\ [1,1] & [a_{22},b_{22}] & \cdots & [a_{2n},b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [1,1] & [a_{n2},b_{n2}] & \cdots & [a_{nn},b_{nn}] \end{vmatrix}=\frac{v}{detG}detG_1^*$$

$$X_2=\frac{detG_2}{detG}=\frac{1}{detG}\begin{vmatrix} [a_{11},b_{11}] & v & \cdots & [a_{1n},b_{1n}] \\ [a_{21},b_{21}] & v & \cdots & [a_{2n},b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1},b_{n1}] & v & \cdots & [a_{nn},b_{nn}] \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{detG}\begin{vmatrix} [a_{11},b_{11}] & [1,1] & \cdots & [a_{1n},b_{1n}] \\ [a_{21},b_{21}] & [1,1] & \cdots & [a_{2n},b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1},b_{n1}] & [1,1] & \cdots & [a_{nn},b_{nn}] \end{vmatrix}=\frac{v}{detG}detG_2^*$$

benzer biçimde devam edildiğinde

$$X_n=\frac{detG_n}{detG}=\frac{1}{detG}\begin{vmatrix} [a_{11},b_{11}] & [a_{12},b_{12}] & \cdots & v \\ [a_{21},b_{21}] & [a_{22},b_{22}] & \cdots & v \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1},b_{n1}] & [a_{n2},b_{n2}] & \cdots & v \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{detG}\begin{vmatrix} [a_{11},b_{11}] & [a_{12},b_{12}] & \cdots & [1,1] \\ [a_{21},b_{21}] & [a_{22},b_{22}] & \cdots & [1,1] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1},b_{n1}] & [a_{n2},b_{n2}] & \cdots & [1,1] \end{vmatrix}=\frac{v}{detG}detG_n^*$$

olur. $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ karma strateji olduğundan, karma strateji tanımı gereği

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$$

dir. Dolayısıyla;

$$1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \frac{v}{detG} detG_1^* + \frac{v}{detG} detG_2^* + \cdots + \frac{v}{detG} detG_n^*$$
$$= \frac{v}{detG}(detG_1^* + detG_2^* + \cdots + detG_n^*)$$

olur. Yani,

$$v = \frac{detG}{detG_1^* + detG_2^* + \cdots + detG_n^*}$$

olarak bulunur. $X_i = \frac{v}{detG} detG_i^*$, $i = 1,2,\dots,n$ olduğundan dolayı $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ karma stratejisi

$$X_1 = \frac{detG_1^*}{detG_1^* + detG_2^* + \cdots + detG_n^*}$$
$$X_2 = \frac{detG_2^*}{detG_1^* + detG_2^* + \cdots + detG_n^*}$$
$$\vdots$$
$$X_n = \frac{detG_n^*}{detG_1^* + detG_2^* + \cdots + detG_n^*}$$

biçiminde bulunur. Benzer biçimde $II.$ oyuncunun $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ optimal karma stratejisi bulunur.

5.7. Aralık Matris Oyunlarında Lagrange Yöntemi

Lagrange yöntemi ile matris oyunlarının çözümlerinden önceki bölümde bahsedilmişti. Bu kısımda, önceki bölümdekinden farklı olarak getiri matrisi aralık matrisi alınacaktır. Lagrange fonksiyonu bir amaç ve kısıtlayıcı fonksiyon ile

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(c - g(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

biçiminde yazılabilir. Getiri matrisi

$$G = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1}, b_{n1}] & [a_{n2}, b_{n2}] & \cdots & [a_{nn}, b_{nn}] \end{bmatrix}$$

olan bir aralık matris oyununda, $I.$ oyuncunun $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $II.$ oyuncunun $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ optimal karma stratejileri için oyun değerinin

$$v = h(X, Y) = XGY^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i [a_{ij}, b_{ij}] y_j$$

olduğunu biliyoruz. Matris oyunlarında oyuncuların amacı her koşul altında getirilerini maksimum yapmak olduğundan Lagrange fonksiyonundaki amaç fonksiyonu olarak

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i [a_{ij}, b_{ij}] y_j$$

oyun değerini ve kısıt fonksiyonu olarakta,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

ifadeleri düşünülürse $I.$ ve $II.$ oyuncu için Lagrange fonksiyonları sırasıyla

$$L_I(X,Y) = v + \lambda_I(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

$$L_{II}(X,Y) = -v + \lambda_{II}(\sum_{j=1}^{n} y_j - 1)$$

biçiminde ifade edilir.

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_I = 0$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \lambda_I = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial x_n} = \frac{\partial v}{\partial x_n} + \lambda_I = 0$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial \lambda_{II}} = \sum_{j=1}^{n} y_j - 1 = 0$$

biçiminde katsayılar matrisi aralık matrisi olan bir lineer denklem sistemi elde edilir. Söz konusu lineer denklem sistemi çözümü için Bölüm 5.6 da gördüğümüz Determinant yöntemi yardımıyla elde edilen lineer denklem sistemi çözüldüğünde $II.$ oyuncunun optimal karma $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ stratejisi ve oyun değeri bulunur. Benzer biçimde $I.$ oyuncunun optimal karma $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ stratejisi için

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_1} = -\frac{\partial v}{\partial y_1} + \lambda_{II} = 0$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_2} = -\frac{\partial v}{\partial y_2} + \lambda_{II} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial y_n} = -\frac{\partial v}{\partial y_n} + \lambda_{II} = 0$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial \lambda_I} = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0$$

biçimindeki lineer denklem sisteminin çözümünün bulunması yeterli olacaktır.

5.8. Aralık Matris Oyunlarında Ters Matris Yöntemi

Bu kısım da matris oyunlarının çözüm yöntemlerinden biri olan ters matris yöntemi, aralık matris oyunları içinde incelenmiştir. Ters matris yöntemi oyuncuların aktif stratejileri için geçerlidir.

Getiri matrisi

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1}, b_{n1}] & [a_{n2}, b_{n2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$$

ile verilmiş aralık matris oyununu göz önüne alalım. G tersinir bir aralık matrisi olsun. I. oyuncu keyfi i. pür stratejisi ile, II. oyuncu keyfi $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ optimal karma stratejisiyle oynasın. Bu durumda, v oyun değeri olmak üzere I. oyuncunun beklenen getirisi $i = 1,2, \dots, n$ için

$$\sum_{j=1}^{n} [a_{ij}, b_{ij}]\, y_j = v$$

biçimindedir. Söz konusu ifade

$$[a_{11}, b_{11}]y_1 + [a_{12}, b_{12}]y_2 + \cdots + [a_{1n}, b_{1n}]y_n = v$$

$$[a_{21}, b_{21}]y_1 + [a_{22}, b_{22}]y_2 + \cdots + [a_{2n}, b_{2n}]y_n = v$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$[a_{n1}, b_{n1}]y_1 + [a_{n2}, b_{n2}]y_2 + \cdots + [a_{nn}, b_{nn}]y_n = v$$

biçiminde bir denklem sistemi olarak yazılır. Bu denklem sistemini, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $J = ([1,1], [1,1], \dots, [1,1])$ olmak üzere matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{n1}, b_{n1}] & [a_{n2}, b_{n2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow GY^T = v(J^T)_{nx1} \qquad (5.1)$$

biçiminde elde edilir. G tersinir olduğundan G^{-1} vardır. Bundan dolayı (5.1) eşitliği soldan G^{-1} ile çarpılırsa

$G^{-1}(GY^T) = G^{-1}vJ^T \Rightarrow (G^{-1}G)Y^T = G^{-1}vJ^T \Rightarrow Y^T = G^{-1}vJ^T$ dir. Yani,

$$Y^T = G^{-1}vJ^T \qquad (5.2)$$

eşitliği elde edilir. v oyun değeri biliniyorsa son eşitlikten $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ bulunur. Buradan v oyun değerini belirleyelim. $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ optimal karma strateji olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

dir. Dolayısıyla

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \Rightarrow (1\ 1 \dots\ 1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\mathbf{1})_{1xn} Y^T = 1 \tag{5.3}$$

olarak ifade edilebilir. (5.2) eşitliği soldan $(\mathbf{1})_{1xn}$ ile çarpılırsa

$$(\mathbf{1})_{1xn} Y^T = (\mathbf{1})_{1xn} G^{-1} v J^T \tag{5.4}$$

olur. (5.3) eşitliğini (5.4) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$1 = (\mathbf{1})_{1xn} G^{-1} v J^T = v (\mathbf{1})_{1xn} G^{-1} v J^T$$

olur. (5.1) eşitliğinden $v \neq 0$ dır. Bundan dolayı son eşitlikten $(\mathbf{1})_{1xn} G^{-1} v J^T$ değeri sıfırdan farklı bulunmuş olur. Dolayısıyla v oyun değeri

$$v = \frac{1}{(\mathbf{1})_{1xn} G^{-1} J^T}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte elde edilen v oyun değerini (5.2) eşitliğinde yerine yazdığımızda $II.$ oyuncunun optimal karma stratejisi

$$Y^T = G^{-1} v J^T \Rightarrow Y^T = \frac{G^{-1} J^T}{(\mathbf{1})_{1xn} G^{-1} J^T}$$

olarak bulunur.

Şimdi benzer biçimde $I.$ oyuncunun optimal stratejisini belirleyelim. $I.$ oyuncu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ optimal karma stratejisiyle, $II.$ oyuncu keyfi j pür stratejisi ile oynasın. Bu durumda, v oyun değeri olmak üzere $I.$ oyuncunun beklenen kazancının (getirisinin) $j = 1,2, \dots, n$ için

$$\sum_{j=1}^{n} x_i \left[a_{ij}, b_{ij}\right] = v$$

olur. Dolayısıyla elde edilen bu ifade n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir sistemdir. Bu sistemi matris formunda yazdığımızda

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)\begin{bmatrix}[a_{11},b_{11}] & [a_{12},b_{12}] & \cdots & [a_{1n},b_{1n}]\\ [a_{21},b_{21}] & [a_{22},b_{22}] & \cdots & [a_{2n},b_{2n}]\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ [a_{n1},b_{n1}] & [a_{n2},b_{n2}] & \cdots & [a_{mn},b_{mn}]\end{bmatrix} = (v, v, \dots, v)$$

$$\Longrightarrow XG = vJ$$

olarak ifade edilir. G tersinir olduğundan, son eşitliği sağdan G^{-1} ile çarparsak, $(XG)G^{-1} = vJG^{-1} \Longrightarrow X = vJG^{-1}$ olur. Yani,

$$X = vJG^{-1} \tag{5.5}$$

dir. v oyun değeri bilinirse I. oyuncunu optimal karma $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ stratejisini belirlenmesi kolay olacaktır. Bu nedenle v değerini belirleyelim. X karma strateji olduğundan karma strateji özelliği gereği

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

dir. Dolayısıyla

$$1 = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix} = X(\mathbf{1^T})_{nx1} \Longrightarrow X(\mathbf{1^T})_{nx1} = 1$$

olur. (5.5) eşitliği $(\mathbf{1^T})_{nx1}$ ile çarpılırsa,

$$X(\mathbf{1^T})_{nx1} = vJG^{-1}(\mathbf{1^T})_{nx1}$$

eşitliği elde edilir. $X(\mathbf{1^T})_{nx1} = 1$ olduğundan ve $JG^{-1}(\mathbf{1^T})_{nx1}$ ifadesi sıfırdan farklı olduğu için v oyun değeri

$$v = \frac{1}{JG^{-1}(\mathbf{1^T})_{nx1}}$$

olarak elde edilir. Elde edilen v değeri (5.5) te yerine yazılırsa I. oyuncunun optimal karma stratejisi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ aşağıdaki biçimde olur;

$$X = \frac{1}{JG^{-1}(\mathbf{1^T})_{nx1}} JG^{-1}$$

BÖLÜM 6

SONSUZ MATRİS OYUNLARI

6.1. Sonsuz Matris Oyunları

Bu bölüme kadar matris oyunlarında her iki oyuncunun da stratejileri kümeleri sonlu kümelerdi. Bu kısımda oyuncuların strateji kümelerinin sonsuz olduğu durumlarda matris oyunlarının özellikleri incelenecektir. Oyuncuların her ikisinin strateji kümelerinin sonsuz olduğu oyunlara sonsuz matris oyunları, herhangi bir oyuncunun strateji kümesinin sonlu diğerinin sonsuz olduğu durumlarda ki oyunlara da yarı sonsuz matris oyunları olarak denilmektedir (Tijs, 1977).

Sonsuz matris oyunlarının değerleri üzerine literatürde çalışmalar mevcuttur. İki kişili sıfır toplamlı kooperatif olmayan oyunlar, oyun teorisinin başlangıcından beri çalışılmaktadır. Superior ve inferior değerleri birbirine eşit olduğu zaman oyunun değeri vardır. Bilindiği gibi sonlu matris oyunlarında karma stratejiler sınıfında her zaman oyunun çözümü vardır. Ancak sonsuz matris oyunlarında karışık stratejilerde böyle bir genelleme yapılamamaktadır. Marchi (1967) de sonsuz matris oyunlarının oyun değerine sahip olması için gerek ve yeter şart bulunması için bazı araştırmalarda bulunmuştur.

Tijs (1977), Gomez (1988), Cegielski (1991) ve Naya (1996,1998) tarafından yapılan çalışmalarda iki kişili sıfır toplamlı sonsuz matris oyunlarının değerleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Sonsuz matris oyunlarında da tıpkı sonlu matris oyunlarında olduğu gibi oyuncuların optimal davranışları maksmin prensibine göre şekillenmektedir. Pür stratejilerde oyuncuların davranışları aynıdır. Yani $I.$ oyuncu $i.$, $II.$ oyuncu $j.$ pür stratejisini seçtiğinde $II.$ oyuncunun $I.$ oyuncuya ödeyeceği miktar ya da $I.$ oyuncunun kazancı a_{ij} kadar olur.

Sonlu matris oyunlarda olduğu gibi, sonsuz matris oyunlarında da oyuncun pür stratejilerde bir denge noktası söz konusu olmayabilir. Bu gibi durumlarda oyuncular mevcut pür stratejilerini farklı olasılıklarda kullanarak karma stratejilerini oluştururlar.

Getiri matrisinin sonsuz olduğu matris oyunlarında $I.$ oyuncunun karma stratejisi

$$(x_1, x_2, \dots)$$

dizisi ile ifade edilecektir. Üstelik söz konusu karma strateji sonlu matris oyununda olduğu gibi

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, \;\; x_i \geq 0, \;\; \forall i = 1,2, \dots$$

şartlarını da sağlayacaktır. Dolayısıyla sonsuz matris oyunlarında oyuncuların karma stratejilerinin kümesi,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

biçiminde tanımlanır (Li ve ark., 2010). I. oyuncunun ve II. oyuncunun pür stratejilerinin kümesi sırasıyla $\mathbb{S}$ ve $\mathbb{T}$ ile gösterilsin.

Sonlu matris oyunlarında oyuncuların karma stratejilerinin kümeleri sırasıyla

$S_n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: $\forall i = 1,2, \dots, n$ $için$ $x_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

$S_m = \{Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$: $\forall j = 1,2, \dots, m$ $için$ $y_j \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1\}$

ile gösterilmiştir. $S_n \times S_m$ üzerinde tanımlı $h(X, Y)$ getiri fonksiyonu I. oyuncunun getirisini gösterdiği 3. Bölümde belirtilmiştir. Ayrıca Teorem 3.2.2 de bu kümelerin kompakt ve konveks olduğu ifade edilmiştir. Sonlu matris oyunlarında karma strateji kümelerinin söz konusu özellikleri sonsuz matris oyunlarına taşınamamaktadır.

Sonsuz matris oyunlarında

$S = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}$

oyuncuların karma stratejilerinin kümesi olmak üzere $S \times S$ kümesi konveks bir küme ancak kompakt bir küme değildir. Bundan dolayı sonlu matris oyunlarnda geçerli olan Von Neumann teoremi sonsuz matris oyunlarında geçerli değildir. Literetürde mevcut olan çalışmalar bu kısım ile ilgilidir. Tijs (1977), Gomez (1988), Cegielski (1991) ve Naya (1996,1998) vs. oyun değerinin varlığı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

I. oyuncu X karma stratejisi II. oyuncu Y karma stratejisi ile oynadığında I. oyuncunun getirisi (kazancı)

$h(X, Y) = XAY^T, \forall (X, Y) \in S \times S$

ile ifade edilmektedir.

Tanım 6.1.1. Keyfi bir sonsuz matris oyununda, I. oyuncunun X, II. oyuncunun Y karma stratejisi için

$h(X, Y^*) \leq h(X^*, Y^*) \leq h(X^*, Y)$

olacak biçimdeki (X^*, Y^*) ikilisine karma stratejiler sınıfında bir denge durumu veya eyer noktası denir.

Teorem 6.1.2. Sonsuz matris oyununda (X^*, Y^*) durumunun bir denge durumu olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in \mathbb{S}$ ve $\forall y \in \mathbb{T}$ için

$h(x, Y^*) \leq h(X^*, Y^*) \leq h(X^*, y)$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 6.1.3. Sonsuz bir matris oyununda $I.$ ve $II.$ oyuncunun sırasıyla keyfi $X,\ Y$ karma stratejileri için

(i) $\underbrace{sup}_{x}\, h(x,Y) = \underbrace{sup}_{X}\, h(X,Y)$

(ii) $\underbrace{inf}_{y}\, h(X,y) = \underbrace{inf}_{Y}\, h(X,Y)$

eşitlikleri geçerlidir (Ahlatçıoğlu ve Tiryaki, 1998).

İspat. Karma stratejiler kümesi mevcut tüm pür stratejiler kümesini içerdiğinden

$$\underbrace{sup}_{x}\, h(x,Y) \leq \underbrace{sup}_{X}\, h(X,Y)$$

yazılabilir. Burada x, y pür stratejileri göstermektedir.

$$\underbrace{sup}_{x}\, h(x,Y) < \underbrace{sup}_{X}\, h(X,Y)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\underbrace{sup}_{x}\, h(x,Y) < h(X',Y) - \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan X' karma stratejisi vardır. Bu da $\forall x \in \mathbb{S}$ için supremum tanımından

$$h(x,Y) < h(X',Y) - \varepsilon$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösterir. Karma stratejilere geçilirse son eşitsizlikten $h(x,Y) < h(X',Y) - \varepsilon$ elde edilir ki bu da kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla

$$\underbrace{sup}_{x}\, h(x,Y) = \underbrace{sup}_{X}\, h(X,Y)$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 6.1.4. $\underbrace{sup}_{X}\,\underbrace{inf}_{Y}\, h(X,Y) = \underbrace{inf}_{Y}\,\underbrace{sup}_{X}\, h(X,Y) = v$

olacak biçimdeki v değerine sonsuz matris oyununun oyun değeri denir (Owen, 1995).

Teorem 6.1.5. Herhangi bir sonsuz matris oyununun, v oyun değeri için

$$\underbrace{sup}_{X}\,\underbrace{inf}_{Y}\, h(X,Y) \leq v \leq \underbrace{inf}_{Y}\,\underbrace{sup}_{X}\, h(X,Y)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Bir önceki teoremden

$$\underbrace{inf}_{y}\, h(X,y) = \underbrace{inf}_{Y}\, h(X,Y)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$\underbrace{sup}_{x}\,\underbrace{inf}_{y}\, h(x,y) \leq \underbrace{sup}_{X}\,\underbrace{inf}_{y}\, h(X,y) \leq \underbrace{sup}_{X}\,\underbrace{inf}_{Y}\, h(X,Y) = v$$

olur. Eşitsizliğin birinci kısmı

$$\underbrace{sup}_{x}\underbrace{inf}_{y} h(x,y) \leq v$$

elde edilmiş olur. Benzer biçimde

$$\underbrace{inf}_{y}\underbrace{sup}_{x} h(x,y) \leq \underbrace{inf}_{Y}\underbrace{sup}_{x} h(x,Y) \leq \underbrace{sup}_{X}\underbrace{inf}_{Y} h(X,Y) = v$$

Teorem 6.1.6. Keyfi bir sonsuz matris oyununun oyun değeri v olsun. Bu durumda,

(i) X^*, I. oyuncunun optimal stratejisidir $\Leftrightarrow$ $\forall y \in \mathbb{T}$ için $h(X^*, y) \geq v$ dir.

(ii) Y^*, II. oyuncunun optimal stratejisidir $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{S}$ için $h(x, Y^*) \leq v$ dir

İspat. $(\Rightarrow:)$ X^*, I. oyuncunun optimal stratejisi olsun. Bu taktirde,

$$\underbrace{inf}_{Y} h(X^*,Y) = \underbrace{sup}_{X}\underbrace{inf}_{Y} h(X,Y) = v$$

yani $\underbrace{inf}_{Y} h(X^*,Y) = v$ demektir. Dolayısıyla infimum tanımından

$$\forall y \in \mathbb{T} \text{ için } h(X^*,y) \geq v$$

elde edilir.

$(\Leftarrow:)$ Tersine $\forall y \in \mathbb{T}$ için $h(X^*,y) \geq v$ olsun. Karma stratejilere geçildiğinde II. oyuncunun keyfi bir Y karma stratejisi için

$$h(X^*,Y) \geq v$$

elde edilir. Böylece

$$\underbrace{inf}_{Y} h(X^*,Y) \geq v \Rightarrow \underbrace{inf}_{Y} h(X^*,Y) \geq \underbrace{sup}_{X}\underbrace{inf}_{Y} h(X,Y)$$

dir. $\underbrace{inf}_{Y} h(X,Y)$ fonksiyonunun maksimumu, dolayısıyla X^*, I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Tanım 6.1.7 $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ sınırlı sonsuz bir matris ise bu taktirde,

(1) $\delta_i = \lim sup\{a_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ ve $\delta = (\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$

(2) $\omega_j = \lim inf\{a_{ij} : i \in \mathbb{N}\}$ ve $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$

dir (Naya, 2001).

Teorem 6.1.8. A, $\underbrace{inf}_{j\in\mathbb{N}} \omega_j > \underbrace{sup}_{i\in\mathbb{N}} \delta_i$ olacak biçimde sınırlı sonsuz bir matris ise bu taktirde A getiri matrisli oyunun değeri yoktur (Naya, 2001).

Getiri matrisi $A \in M_{\{\infty\times\infty\}}$ olan sonsuz matris oyununu düşünelim. A matrisinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu kabul edelim.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

de oyuncuların stratejilerinin kümesi ve $sup\{|a_{ij}|: i,j \in \mathbb{N}\} = M < \infty$ da A matrisinin üst sınırı olsun. A sınırlı sonsuz bir matris olmak üzere,

$$T_i = \underbrace{inf}_{m\geq 1} \underbrace{sup}_{j\geq m} a_{ij}\ ,\ \forall j \in \mathbb{N}\ and\ T = (T_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

$$K_j = \underbrace{sup}_{m\geq 1} \underbrace{inf}_{i\geq m} a_{ij}, \forall i \in \mathbb{N}\ \ and\ K = (K_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

eşitliklerini göz önünde bulundurarak sonsuz matris oyunlarının oyun değerinin karakterizasyonunu veren aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 6.1.9. A sınırlı sonsuz bir matris ve A matrisi tarafından belirlenen matris oyununun oyun değeri var ise,

$$\underbrace{inf}_{j\in\mathbb{N}} K_j \leq \underbrace{sup}_{i\in\mathbb{N}} T_i$$

dir.

İspat. $\underbrace{sup}_{x} xAy \geq Ky, \forall y \in S$

olduğunu görelim. Bu yüzden aksini varsayarak başlayalım. Yani;

$$\underbrace{sup}_{x\in X} xAy' < Ky'$$

olacak biçimde $y' \in S$ vardır. Dolayısıyla

$$\underbrace{sup}_{x\in X} xAy' < Ky' - \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır. Dolayısıyla, eğer $i.$ bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olacak biçimdeki $e_i \in S$ elemanı için

$$e_iAy' < Ky' - \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N} \Longrightarrow (e_iA - K)y' < -\varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$$

olarak yazılabilir. Ancak bu mümkün değildir. Çünkü $(e_iA - K)$ değeri sıfırdan büyük bir değerdir.

$\sum_{j=j^*}^{\infty} y_j{}^* < \frac{\varepsilon}{6M}$ olacak biçimde $j^* > 1$ olsun ve $n^* = \underbrace{max}_{j<j^*} n(j)$ olarak düşünelim. Burada, $n(j)$ aşağıdaki şartı sağlayan bir sayıdır.

$$a_{nj} \geq K_j - \frac{\varepsilon}{3(j^*-1)}, \forall n > n(j)$$

Yukarıdaki ifade de K nın tanımından her j için $n(j)$ nin varlığı garantilenir. Her bir

$i > n^*$ ve $j < j^*$ için $a_{ij} \geq K_j - \frac{\varepsilon}{3(j^*-1)}$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $j < j^*$ üzerinden toplama geçersek,

$$\sum_{j=1}^{j^*-1} (a_{ij} - K_j) \geq -\frac{\varepsilon}{3}, \forall i \geq n^*$$

olur. Dolayısıyla $(e_iA - K)y^* < -\varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$ eşitsizliği $\forall i \geq n^*$ için

$$-\varepsilon > (e_iA - K)y^* = \sum_{j=1}^{\infty}(a_{ij} - K_j)y_j{}^* = \sum_{j=1}^{j^*-1}(a_{ij} - K_j)y_j{}^* + \sum_{j=j^*}^{\infty}(a_{ij} - K_j)\,y_j{}^*$$

$$\geq -\frac{\varepsilon}{3} - \sum_{j=j^*}^{\infty}\left|a_{ij} - K_j\right| y_j{}^*$$

$$\geq -\frac{\varepsilon}{3} - \sum_{j=j^*}^{\infty} 2My_j{}^*$$

$$\geq -\frac{\varepsilon}{3} - 2M\frac{\varepsilon}{6M} = -\frac{2}{3}\varepsilon > -\varepsilon$$

olur. Yani $-\varepsilon > -\varepsilon$ bulunmuş olur ki buda bir çelişkidir. Bu çelişki bize $\underbrace{sup}_{x\in X} xAy \geq Ky, \forall y \in S$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermiş olur. Her iki taraftan infimuma geçecek olursak

$$\underbrace{inf}_{y\in S}\underbrace{sup}_{x\in S} xAy \geq \underbrace{inf}_{y\in S} Ky$$

bulunur.

$$V^A{}_M = \underbrace{inf}_{y\in S}\underbrace{sup}_{x\in S} xAy \text{ ve } \underbrace{inf}_{y\in S} Ky = \underbrace{inf}_{j\in\mathbb{N}} K_j$$

olduğundan $V^A{}_M \geq \underbrace{inf}_{j\in\mathbb{N}} K_j$ elde edilir. Benzer biçimde,

$$\underbrace{inf}_{y\in S} xAy \leq Tx, \forall x \in S$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikte her iki taraftan supremuma geçersek

$$\underbrace{sup}_{x\in S}\underbrace{inf}_{y\in S} xAy \leq \underbrace{sup}_{x\in S} Tx \Longrightarrow V_{A_M} = \underbrace{sup}_{x\in S}\underbrace{inf}_{y\in S} xAy \leq \underbrace{sup}_{x\in S} Tx$$

olur. Elde edilen bu son eşitsizlikte

$$\underbrace{sup}_{x\in S} Tx = \underbrace{sup}_{i\in\mathbb{N}} T_i$$

olduğu kullanılırsa

$$V_{A_M} \leq \underbrace{sup}_{i\in\mathbb{N}} T_i$$

olur. Hipotezden $V^A{}_M = V_{A_M}$ olduğu için

$$\underbrace{inf}_{j\in\mathbb{N}} K_j \leq V^A{}_M = V_{A_M} \leq \underbrace{sup}_{i\in\mathbb{N}} T_i$$

$$\Longrightarrow \underbrace{inf}_{j\in\mathbb{N}} K_j \leq \underbrace{sup}_{i\in\mathbb{N}} T_i$$

bulunur.

6.2. Sonsuz Matris Oyunlarında Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi

X, Banach uzay ve $A: X \to X$ bir operatör olmak üzere

$$x = Ax \tag{6.1}$$

denklemi verilmiş olsun. Eğer

$$x^* = Ax^*$$

ise $x^* \in X$ vektörüne A operatörünün sabit noktası denir. $A: X \to X$ operatörünün bir sabit noktasının varlığı aynı zamanda (6.1) denkleminin bir çözümünün varlığı demektir. Ardışık yaklaşımlar yöntemi (6.1) şeklindeki denklemlerin çözümü için en çok kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yönteme göre herhangi bir $x_0 \in X$ vektörü başlangıç yaklaşım olmak üzere terimleri

$$x_n = Ax_{n-1} \tag{6.2}$$

şeklinde olan x_n tahmini çözümler dizisi (iterasyon süreci) oluşturulur. Eğer $x^* \in X$ vektörü (x_n) dizisinin bir limiti ve A operatörü x^* noktasında sürekli ise (6.2) ye göre x^* vektörü (6.1) denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla (x_n) dizisinin yakınsaklık koşulları aynı zamanda (6.1) denkleminin çözümünün varlığı koşulları olur. Bu nedenle (6.2) iterasyon sürecinin yakınsaklık koşullarının incelenmesi şarttır.

Tanım 6.3.1 X Banach uzayının D kümesinde tanımlı $A: D \to X$ operatörü verilmiş olsun. Eğer her $x, y \in D$ için

$$\|Ax - Ay\| \leq \alpha \|x - y\| \tag{6.3}$$

olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sayısı varsa A operatörüne daralma dönüşümü (operatörü) denir. (6.3) eşitsizliğindeki α katsayısınada daralma katsayısı denir.

Teorem 6.3.2. D kümesi kapalı ve $A: X \to X$ operatörü D yi D ye çevirsin yani $A(D) \subset D$ olsun. Bu durumda A daralma operatörünün D de tekbir sabit x^* noktası vardır. Diğer bir deyişle (6.1) denkleminin tek bir $x^* \in D$ çözümü vardır. Üstelik bu çözüm (6.2) formülüyle tanımlanmış (x_n) dizisinin limiti gibi bulunabilir.

Burada x_0, D nin herhangi bir vektörüdür. (x_n) dizisinin x^* çözümüne yaklaşma hızı

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\| \tag{6.4}$$

eşitsizliği ile verilir (Kreyszig, 1978).

Sonuç 6.3.3. A operatörü X Banach uzayında tanımlı ve $A(X) \subset X$ olsun. Eğer A operatörü X üzerinde daralma katsayısıy $\alpha < 1$ olan daralma operatörü ise, A operatörünün tek bir $x^* \in X$ sabit noktası var ve her bir başlangıç $x_0 \in X$ vektörü için (6.2) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisi x^* vektörüne (6.4) hızıyla yaklaşır.

n boyutlu $\mathbb{R}^n$ lineer uzayında

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \,, i = 1,2,\dots,n$$

şeklinde verilen

$$y = Ax, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

operatörünü ele alalım.

A operatörü daralma dönüşümü olduğunda $x = Ax$ denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözülebilmektedir. A nın daralma operatörü olma koşulları n boyutlu lineer uzayda normun seçimine bağlıdır (Kreyszig, 1978). Aşağıdaki üç farklı norma göre A nın daralma operatörü olup olmadığını inceleyelim:

(i) $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ uzayında, $\|x\|_\infty = max\{|x_i|: i = 1,2,\dots,n\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|y' - y''\|_\infty &= max\{|y' - y''|: i = 1,2,\dots,n\}\\ &= max\left\{\left|\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x''_j + b_i\right|: i = 1,2,\dots,n\right\}\\ &= max\left\{\left|\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j)\right| : i = 1,2,\dots,n\right\}\\ &\le max\left\{\textstyle\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|x'_j - x''_j|: i = 1,2,\dots,n\right\}\\ &\le max\left\{\textstyle\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| : i = 1,2,\dots,n\right\}max\left\{|x'_j - x''_j|: i = 1,2,\dots,n\right\}\\ &\le \alpha_\infty max\left\{|x'_j - x''_j|: i = 1,2,\dots,n\right\}\\ &= \alpha_\infty \|x'_j - x''_j\|_\infty\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\|y' - y''\|_\infty \le \alpha_\infty \|x'_j - x''_j\|_\infty$$

dır. Eğer $0 < \alpha_\infty < 1$ ise A daralma operatörüdür.

$$\alpha_\infty = max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| : i = 1,2,\dots,n\right\}$$

olduğundan herbir $i, j = 1,2,\dots,n$ için a_{ij} lerin mutlak değerleri toplamı alındığından $0 < \alpha_\infty$ olur. Dolayısıyla $\alpha_\infty < 1$ olduğunda $A: \mathbb{R}^n_\infty \to \mathbb{R}^n_\infty, y = Ax$ operatörü daralma operatörüdür. Bundan dolayı sistemin $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ biçiminde bir tek çözümü vardır.

(ii) $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ uzayında, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ olsun. Bu durumda

$$\|y' - y''\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i{}' - y_i{}''|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j{}' - x_j{}'') \right| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j{}' - x_j{}''|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j{}' - x_j{}''|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \|x' - x''\|_1$$

olur.

$$\alpha_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| : j = 1,2, \dots, n\}$$

olmak üzere,

$$\|y' - y''\|_1 \le \alpha_1 \|x' - x''\|_1$$

elde edilir. Eğer $\alpha_1 < 1$ ise $A: \mathbb{R}_1^n \to \mathbb{R}_1^n, y = Ax$ operatörü daralma operatörüdür. Bundan dolayı sistemin $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ biçiminde bir tek çözümü vardır.

(iii) $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ uzayında, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ olsun. Hölder eşitsizliğine göre,

$$\|y' - y''\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i{}' - y_i{}''|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j{}' - x_j{}'') \right|^2$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{n} |x_j{}' - x_j{}''|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \, \|x' - x''\|_2^2$$

olur.

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

olmak üzere,

$$\|y' - y''\|_2^2 \le \alpha_2 \|x' - x''\|_2^2$$

elde edilir. Eğer $\alpha_2 < 1$ ise $A: \mathbb{R}_2^n \to \mathbb{R}_2^n, y = Ax$ operatörü daralma operatörüdür. Bundan dolayı sistemin $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ biçiminde bir tek çözümü vardır.

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ uzayında tek çözüm koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu taktirde öyle tek bir $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots y_n^*)$ noktası vardır ki onun koordinatları

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + b_i \, , i = 1,2, \dots , n$$

denklem sisteminin çözümüdür. Bu çözümü terimleri

$$y^{(m)} = \left(y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots , y_n^{(m)}\right), m = 0,1,2, \dots$$

biçiminde tanımlanan $\left(y^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$ dizisinin limiti olarak buluruz. Yani $\left(y^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$ dizisi

$$\begin{aligned}\left(y^{(m)}\right) &= \left(y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots\right) \\ &= \left(\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots , y_n^{(0)}\right), \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots , y_n^{(1)}\right), \left(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots , y_n^{(1)}\right), \dots\right)\end{aligned}$$

biçiminde bir dizidir. Bunun yanında dizinin her bir teriminin bileşenleri de

$$y_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^{(m-1)} + b_i \, , i = 1,2, \dots , n$$

biçiminde hesaplanır. Yani,

$$\begin{aligned}y_1^{(m)} &= a_{11} y_1^{(m-1)} + a_{12} y_1^{(m-1)} + a_{13} y_1^{(m-1)} + \cdots + a_{1n} y_1^{(m-1)} + b_1 = \\ &\quad (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) y_1^{(m-1)} + b_1 \\ y_2^{(m)} &= a_{21} y_1^{(m-1)} + a_{22} y_1^{(m-1)} + a_{23} y_1^{(m-1)} + \cdots + a_{2n} y_1^{(m-1)} + b_2 = \\ &\quad (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) y_1^{(m-1)} + b_2 \\ &\vdots \\ y_n^{(m)} &= a_{n1} y_1^{(m-1)} + a_{n2} y_1^{(m-1)} + a_{n3} y_1^{(m-1)} + \cdots + a_{nn} y_1^{(m-1)} + b_n = \\ &\quad (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) y_1^{(m-1)} + b_n\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Dikkat edilecek olursa her $i = 1,2, \dots , n$ için $y_i^{(m)}$ lerdeki parantez içersindeki ifadeler i. satır toplamıdır. Bu nedenle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinde herbir i. satırdaki elemanların toplamına T_i dersek bu taktirde

$$y_1^{(m)} = T_1 y_1^{(m-1)} + b_1, \, y_2^{(m)} = T_2 y_1^{(m-1)} + b_2, \, \dots, \, y_n^{(m)} = T_n y_1^{(m-1)} + b_n$$

olur. Dolayısıyla

$$\left(y^{(m)}\right) = \left(y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots\right)$$

$$=\left(\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right),\left(y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)}\right),\left(y_1^{(2)},y_2^{(2)},\dots,y_n^{(1)}\right),\dots\right)$$

dizisinin her bir terimi

$$\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right)=\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right)$$

$$\left(y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)}\right)=\left(T_1y_1^{(0)}+b_1,T_2y_1^{(0)}+b_2,\dots,T_ny_1^{(0)}+b_n\right)$$

$$\left(y_1^{(2)},y_2^{(2)},\dots,y_n^{(2)}\right)=\left(T_1y_1^{(1)}+b_1,T_2y_1^{(1)}+b_2,\dots,T_ny_1^{(1)}+b_n\right)$$

$$\vdots$$

biçiminde ifade edilebilir.

I. oyuncu için yapılan çalışmalara benzer olarak II. oyuncunun Y karma stratejisi olarak $\left(y^{(m)}\right)$ dizisi alınsın. Karma strateji tanımı gereği $\left(y^{(m)}\right)$ dizisinin bileşenleri sıfırdan büyük eşit ve toplamları bir olmalıdır.

$$\left(y^{(m)}\right)=\left(y^{(0)},y^{(1)},y^{(2)},y^{(3)},\dots\right)$$

$$=\left(\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right),\left(y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)}\right),\left(y_1^{(2)},y_2^{(2)},\dots,y_n^{(1)}\right),\dots\right)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}y^{(m)}=y^{(0)}+y^{(1)}+y^{(2)}+y^{(3)}+\cdots$$

$$=\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right)+\left(y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)}\right)+\left(y_1^{(2)},y_2^{(2)},\dots,y_n^{(1)}\right)+\cdots$$

$$=\left(\left(y_1^{(0)}+y_1^{(1)}+y_1^{(2)},\dots\right),\left(y_2^{(0)}+y_2^{(1)}+y_2^{(2)},\dots\right),\dots,\left(y_n^{(0)}+y_n^{(1)}+y_n^{(2)},\dots\right)\right)$$

$$=\left(\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}y_1^{(m)},\sum_{m=0}^{\infty}y_2^{(m)},\dots,\sum_{m=0}^{\infty}y_n^{(m)}\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty}y^{(m)}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}y_1^{(m)},\sum_{m=0}^{\infty}y_2^{(m)},\dots,\sum_{m=0}^{\infty}y_n^{(m)}\right)$$

elde edilir. Yani,

$$\sum_{m=0}^{\infty}y^{(m)}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}y_1^{(m)},\sum_{m=0}^{\infty}y_2^{(m)},\dots,\sum_{m=0}^{\infty}y_n^{(m)}\right)=(1,1,\dots,1)$$

veya

$$\sum_{m=0}^{\infty}y_1^{(m)}=1,\sum_{m=0}^{\infty}y_2^{(m)}=1,\dots,\sum_{m=0}^{\infty}y_n^{(m)}=1$$

dir.

Bu nedenle incelenen problem sonucu II. oyuncunun özel bir karma stratejisinin bulunması

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + b_i \, , i = 1,2, \dots , n$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_1^{(m)} = 1, \sum_{m=0}^{\infty} y_2^{(m)} = 1, \dots , \sum_{m=0}^{\infty} y_n^{(m)} = 1$$

şartlarını sağlayan problemin çözümünün bulunması ile denk olacaktır. Yani verilen şartları sağlayan problemin çözümü sonucu $II.$ oyuncunun özel bir karma stratejisi belirlenecektir.

$I.$ oyuncunun karma stratejisinin belirlenebilmesi için A matrisi yerine A^T matrisini alalım. Benzer işlemler ile $I.$ oyuncunun karma stratejisini belirleyelim. Bunun için $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ uzayında, $\|x\|_\infty = max\{|x_i|: i = 1,2, \dots , n\}$ normuna göre A^T operatörünün daralma operatörü olma şartını inceleyelim.

$$\begin{aligned} \|y' - y''\|_\infty &= max\{|y' - y''|: i = 1,2, \dots , n\} \\ &= max\left\{\left|\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x'_i + b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x''_i + b_j\right|: j = 1,2, \dots , n\right\} \\ &= max\left\{\left|\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} (x'_i - x''_i)\right|: j = 1,2, \dots , n\right\} \\ &\le max\left\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| |x'_i - x''_i|: j = 1,2, \dots , n\right\} \\ &\le max\left\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| : j = 1,2, \dots , n\right\} max\{|x'_i - x''_i|: j = 1,2, \dots , n\} \\ &\le \alpha_\infty max\{|x'_i - x''_i|: j = 1,2, \dots , n\} \\ &= \alpha_\infty \|x'_i - x''_i\|_\infty \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\|y' - y''\|_\infty \le \alpha_\infty \|x'_i - x''_i\|_\infty$$

dır. Eğer $0 < \alpha_\infty < 1$ ise A^T daralma operatörüdür.

$$\alpha_\infty = max\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| : j = 1,2, \dots , n\right\}$$

olduğundan herbir $i, j = 1,2, \dots , n$ için a_{ij} lerin mutlak değerleri toplamı alındığından $0 < \alpha_\infty$ olur. Dolayısıyla $\alpha_\infty < 1$ olduğunda $A^T: \mathbb{R}_\infty^n \to \mathbb{R}_\infty^n, y = A^T x$ operatörü daralma operatörüdür. Bundan dolayı sistemin $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots , x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ biçiminde bir tek çözümü vardır.

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ uzayında tek çözüm koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu taktirde öyle tek $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ vardır ki koordinatları

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j \, , j = 1,2, \dots, n$$

biçimindeki denklem sisteminin çözümüdür. Bu çözümü terimleri

$$x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\right), m = 0,1,2, \dots$$

biçiminde tanımlanan $\left(x^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$ dizisinin limiti olarak buluruz. Yani $\left(x^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$ dizisi

$$\left(x^{(m)}\right) = \left(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots\right)$$
$$= \left(\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right), \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right), \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(1)}\right), \dots\right)$$

biçiminde bir dizidir. Bunun yanında dizinin her bir teriminin bileşenleri de

$$x_j^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j^{(m-1)} + b_j \, , j = 1,2, \dots, n$$

biçiminde hesaplanır. Yani,

$$x_1^{(m)} = a_{11}x_1^{(m-1)} + a_{21}x_1^{(m-1)} + a_{31}x_1^{(m-1)} + \cdots + a_{n1}x_1^{(m-1)} + b_1 =$$
$$(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1})x_1^{(m-1)} + b_1$$
$$x_2^{(m)} = a_{12}x_2^{(m-1)} + a_{22}x_2^{(m-1)} + a_{32}x_2^{(m-1)} + \cdots + a_{n2}x_2^{(m-1)} + b_2 =$$
$$(a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2})x_2^{(m-1)} + b_2$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(m)} = a_{1n}x_n^{(m-1)} + a_{2n}x_n^{(m-1)} + a_{3n}x_n^{(m-1)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(m-1)} + b_n =$$
$$(a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn})x_n^{(m-1)} + b_n$$

biçiminde yazılır. Dikkat edilecek olursa her $i = 1,2, \dots, n$ için $x_i^{(m)}$ lerdeki parantez içersindeki ifadeler i. satır toplamıdır. Bu nedenle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisin de her bir i. satırdaki elemanların toplamına T_i^* dersek bu taktirde

$$x_1^{(m)} = T_1{}^* x_1^{(m-1)} + b_1,\, x_2^{(m)} = T_2{}^* x_2^{(m-1)} + b_2,\, \ldots,\, x_n^{(m)} = T_n{}^* x_n^{(m-1)} + b_n$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\left(x^{(m)}\right) &= \left(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots\right)\\ &= \left(\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right), \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right), \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right), \ldots\right)\end{aligned}$$

dizisinin her bir terimi

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$$

$$\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right) = \left(T_1{}^* x_1^{(0)} + b_1, T_2{}^* x_2^{(0)} + b_2, \ldots, T_n{}^* x_n^{(0)} + b_n\right)$$

$$\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right) = \left(T_1{}^* x_1^{(1)} + b_1, T_2{}^* x_2^{(1)} + b_2, \ldots, T_n{}^* x_n^{(1)} + b_n\right)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

biçiminde ifade edilebilir.

Getiri matrisi A^T ile verilen bir matris oyununda I. oyuncu X karma stratejisi, II. oyuncu keyfi j pür stratejisiyle oynadığında I. oyuncunun beklenen kazancı yada getirisi

$$h\left(X, II_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\,, j = 1,2, \ldots, n$$

biçimindedir. Bu eşitlik bir lineer denklem sistemi olarakta ifade edilir. Elde edilen bu lineer denklem sisteminin ardışık yaklaşımlar yöntemi ile bir tek $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ çözümünün var olduğu bulunabilir. Burada I. oyuncunun X karma stratejisi olarak $\left(x^{(m)}\right)$ dizisi alındığında,

$$\begin{aligned}\left(x^{(m)}\right) &= \left(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots\right)\\ &= \left(\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right), \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right), \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right), \ldots\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} x^{(m)} &= x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \cdots\\ &= \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) + \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right) + \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right) + \cdots\\ &= \left(\left(x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \ldots\right), \left(x_2^{(0)} + x_2^{(1)} + x_2^{(2)}, \ldots\right), \ldots, \left(x_n^{(0)} + x_n^{(1)} + x_n^{(2)}, \ldots\right)\right)\\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_1^{(m)}, \sum_{m=0}^{\infty} x_2^{(m)}, \ldots, \sum_{m=0}^{\infty} x_n^{(m)}\right)\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{(m)} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_1^{(m)}, \sum_{m=0}^{\infty} x_2^{(m)}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_n^{(m)} \right)$$

elde dilir. Göz önüne alınan problemin karma stratejilerde çözümünün bulunması için

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{(m)} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_1^{(m)}, \sum_{m=0}^{\infty} x_2^{(m)}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_n^{(m)} \right) = (1,1,\dots,1)$$

veya

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_1^{(m)} = 1, \sum_{m=0}^{\infty} x_2^{(m)} = 1, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_n^{(m)} = 1$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Dolayısıyla incelenen problem sonucu I. oyuncunun özel bir karma stratejisinin bulunması

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j \,, j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_1^{(m)} = 1, \sum_{m=0}^{\infty} x_2^{(m)} = 1, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_n^{(m)} = 1$$

şartlarını sağlayan problemin çözümünün bulunması ile denk olacaktır. Yani verilen şartları sağlayan problemin çözümü sonucu, I. oyuncunun özel bir karma stratejisi belirlenecektir.

BÖLÜM 7
SONUÇ VE ÖNERİLER

Matris oyunlarının teorik alt yapısı ile ilgili incelemeler yapılmıştır.

Farklı sözel problemlere uygun stratejiler kümesi belirlenerek getiri matrisleri oluşturulmuş ve pür stratejilerde oyun değerinin varlığı araştırılmıştır.

Karma stratejiler sınıfının özelliklerini belirleyen önermeler sunulmuştur. Optimal karma stratejiler ve oyun değerinin özellikleri araştırılmıştır.

Sonlu matris oyununun çözümünün lineer programlama probleminin çözümüne indirgenmesi ile ilgili farklı bir yöntem sunulmuştur.

Oyunculardan herhangi birinin optimal karma stratejisi ile oynadığında bir lineer denklem sistemi elde edildiği görülmüş ve bu sonuçtan yararlanarak matris oyunlarının çözümü için yöntemler geliştirilerek sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Matris oyunlarının çözümü için Lagrange yöntemi ele alınarak incelemeler yapılmıştır.

Aralık matris oyunlarının pür ve karma stratejiler sınıfında oyun değerinin belirlenmesinde önemli rol oynayan aralıkların sınıflandırılması ile (uygunluk fonksiyonu yardımıyla) ilgili incelemeler yapılmıştır.

Elemanları aralıklar olan matrislerin özellikleri incelenerek uygun aralık matris oyunları oluşturulmuş ve aralık matris oyunları için oyun değeri ve oyunun çözüm kavramı verilmiştir.

Karma stratejilerde matris oyununun çözümü hakkında Von Neumann teoreminin aralık matris oyunları içinde doğru olduğu dikkate alınarak aralık matris oyunları için çözüm yöntemleri sunulmuş ve örneklerle desteklenmiştir.

Sonsuz matris oyunlarında, oyun değerinin varlığının karakterizasyonunu veren bir önerme sunulmuştur.

Sonsuz matris oyunlarının oyun değeri için ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanmıştır.

Sonsuz matris oyunlarında oyuncuların karma stratejileri üzerine yeni incelemeler yapılmıştır.

KAYNAKLAR

Ahlatçıoğlu M. ve Tiryaki F., 1998. *Oyunlar Teorisi*. Yıldız Tek.Üni. Basım-Yayın Mer.

Akyar H., Akyar E. ve Düzce S. A., 2011. Brown-Robinson Method for Interval Matrix Games. *Soft Comput.* 15: 2057-2064.

Anatol R., 1966. *Two-Person Game Theory-The Essential Ideas*. The University of Michigan Press. 13-94.

Anderson P.L. ve Geçkıl İ.K., 2010. *Applied Game Theory and Strategic Behaviour*. Taylor&Francis. 1-32.

Anton H., 1991. *Elemantary Linear Algebra.* John Wiley&Sons Inc. 1-117.

Azimli A., 2011. *Matematiksel Optimizasyon*. Papatya Yayıncılık. 155-218.

Bakoğlu H., 1991. *Oyun Teorisi*, Ege Üni. Basım Evi. 1-42.

Barron, E. N., 2008. *Game Theory an Introduction*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey. 1-108.

Cegielski A., 1991. Approximation of Some Zero-Sum Noncontinuous Games by a Matrix Game, *Comment. Math*. 2: 261-267.

Collins D.W. ve Hu C., 2008. Studying Interval Valued Matrix Games with Fuzzy Logic", *Soft Computing*. 12, 2: 147-155.

Collins D. W ve Hu C., 2001. Fuzzily Determined Interval Matrix Games.

Dutta P., 1999. *Strategies and Games: Theory and Practice*. MIT Press, Cambridge.

Ferguson T. S., (2008). *Game Theory*. http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/mat.pdf

Ganesan K., 2007. On Some Properties of Interval Matrices, *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 1, 2: 92-99.

Germeier Y.B., 1971. *An Introduction to the Theory of Operational Research*. Nauka, Moskova. 158-188.

Guseinov K.G., Akyar E. ve Düzce S. A., 2010. *Oyun Teorisi: Çatışma ve anlaşmanın matematiksel modelleri*. Seçkin Yayınları. 1-91.

Guzman A., 2003. *Derivatives and Integrals of Multivariable Functions*. Birkhauser, Basel. 1-105.

Hu C. et al, 2008. Knowledge Processing with Interval and Soft Computing, pp. 147-167, Springer-Verlag London Limited.

Ishibuchi H. ve Tanaka H., 1990. Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Function. *European Journal of Operational Research*. 48: 219-225.

Kreyszig E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley&Sons. 688 p.

Li C., Lin S. ve Zhang C., 2010. On the Existence of Nash Equilibriums for Infinite Matrix Games. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 10: 42-53.

Marchi E., 1967. On the Minimax Theorem of the Theory of Games. *Ann. Math. Pura Appl*. 77: 207-282.

Moore R.E., 1979. *Method and Application of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia. 1-108.

Morris P., 1994. *Introduction to Game Theory*. New York, Springer-Verlag. 35-115.

Naya L.M., 1996. Zero-sum continuous games with no compact support. *International Journal of Game Theory* 25: 93-111.

Naya L.M., 1998. Weak topology and infnite matrix games. *Int J Game Theory* 27: 219-229.

Naya L.M., 2001. On the Value of Some Infinite Matrix Games. *Mathematics of Operation Research* 26 (1): 82-88.

Nayak P.K. ve Pal M., 2006. Solution of Rectangular Interval Games Using Graphical Method. *Tamsui Oxf. J. Math. Sci*. 22 (1): 95-115.

Nayak P.K. ve Pal M., 2009. Linear Programming Technique to Solve Two Person Matrix Games with Interval Pay-Offs. *Asia Pasific Journal of Operational Research* 26 (2): 285-305.

Neuman, V.J. ve Morgenstern, O., 1967. *Theory of Games and Economic Behavior*. New York, Science Editions, John Wiley and Sons. Inc. third edition. 85-165.

Nirmala T., Datta D., Kushwaha H.S. ve Ganesan K., 2011. Inverse Interval Matrix: A New Approach. *Applied Mathematical Sciences* 5 (13): 607-624.

Owen G., 1995. *Game Theory*. Academic Press, Inc. 1-85.

Öztürk, A., 2011. *Yöneylem Araştırması*. Ekin Kitabevi Yayını, 13. Baskı, Bursa. 641-675.

Rasmusen E., 2006. Games and Information: An Introduction to Game Theory. Blackwell Publishers.

Rohn J. 1993. Inverse Interval Matrix. *SIAM Journal of Numerical Analysis* 3: 864-870.

Sengupta A. ve Pal T.K., 1997. $\mathcal{A}$-index for Ordering Interval Numbers Presented in *Indian Science Congress*. January 3-8, Delhi University, India.

Sengupta A. ve Pal T.K., 2009. Fuzzy Preference Ordering of Interval Numbers in Decision Problems. *Studies in Fuzziness and Soft Computing* 238. Springer, Berlin.

Sengupta A. ve Pal T.K., Chakraborty D., 2001. Interpretation of Inequality Constraints Involving Interval Coefficients and a Solution to Interval Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems* 119: 129-138.

Straffin P.D., 1993. *Game Theory and Strategy*. The Math. Assoc. of America. 1-56.

Tijs S., 1977. Semi-Infinite and Infinite Matrix and Bimatrix Games. PhD Dissertation (Doktora Tezi). Catholic University, Nijmegen, Netherlands.

Wald A., 1950. Note on Zero-Sum Two-Person Games. *Ann. Math*., 52, 739-742.

Wentsell E.S. (çev. Halil Yüksel), 1965. Oyunlar Teorisine Giriş. Türk Matematik Derneği Yayınları No:27, İstanbul. 1-64.

ÇİZELGELER **Sayfa No**

ŞEKİLLER **Sayfa No**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Aykut OR

Doğum Yeri : Menemen/İZMİR

Doğum Tarihi : 05.09.1983

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Blimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı.

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

Bildiriler -Uluslararası

Hacı Y. and Or A. " On Solutions of Interval Matrix Game", International Scientific Conference on Young Researchers, 25-26 April 2013, Bakü, Azerbaycan

Hacı Y. and Or A., Values of Some Infinite Matrix Games, 8th International Symposium of Statistics, 11-13 October 2012, Anadolu University, Eskişehir

Bildiriler - Ulusal

Hacı Y. and Or A. “Sonsuz Matris Oyunlarının Değerleri Üzerine” 6. Ankara Matematik Günleri, 2-3 Haziran 2011, Hacettepe Üniversitesi, ANKARA

Hacı Y. and Or A., “Matris Oyunları”, 5. Ankara Matematik Günleri, 3-4 Haziran 2010

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

1- Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, 2006-Devam Ediyor.

İLETİŞİM

E-posta Adresi : aykutor@comu.edu.tr