T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

RP_I-KÜMELERİNİN, RPC_I-KÜMELERİNİN VE RC_I-KÜMELERİNİN İLİŞKİLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Özlem ELMALI
Matematik Anabilim Dalı
Tezin Sunulduğu Tarih: **14/06/2013**

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

ÖZLEM ELMALI tarafından **DOÇ. DR. ERDAL EKİCİ** yönetiminde hazırlanan "**RP_I-KÜMELERİNİN, RPC_I-KÜMELERİNİN VE RC_I-KÜMELERİNİN İLİŞKİLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ
Danışman

Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Faruk SOYDUGAN
Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. İlhan HACIOĞLU
Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Sena ÖZEN
Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 14/06/2013

Doç. Dr. Zeki KARACA
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Özlem ELMALI

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve Doktora eğitimim boyunca ilminden faydalandığım,insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Erdal EKİCİ' ye, çalışmalarım süresince ve hayatımın her evresinde maddi manevi hiçbir desteğini benden esirgemeyen çok değerli babam Mehmet ELMALI ve annem Emine ELMALI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Özlem ELMALI

ÖZET

RP_I-KÜMELERİNİN, RPC_I-KÜMELERİNİN VE RC_I-KÜMELERİNİN İLİŞKİLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Özlem ELMALI
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman : Doç. Dr. Erdal EKİCİ
14/06/2013, 67

Bu tezde, ideal topolojik uzaylarda, RP_I –kümeler, RPC_I – kümeler ve RC_I – kümeler ve RP_I –kümelerin, RPC_I – kümelerin ve RC_I – kümelerin özellikleri ve ilişkileri sunulmuş ve çalışılmıştır. Ayrıca, ön_I^*-kapalı kümeler ve ön_I^*-açık kümelerin özellikleri ve ilişkileri çalışılmıştır. ön_I^*-kapanış ifadesi ve özellikleri sunulmuş ve çalışılmıştır. Ayrıca, I-R kapalı kümelerin ve zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin ilişkileri çalışılmıştır.

Anahtar sözcükler: RP_I –kümeler, RPC_I – kümeler, RC_I – kümeler, ön_I^*-kapalı kümeler, ön_I^*-açık kümeler, ideal topolojik uzaylar, zayıf I_{rg}-kapalı kümeler.

ABSTRACT

A STUDY ON THE RELATIONSHIPS OF RP$_I$-SETS, RPC$_I$-SETS AND RC$_I$-SETS

Özlem ELMALI
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Doctoral Dissertation in Mathematics
Advisor : Assoc. Prof. Dr. Erdal EKİCİ
14/06/2013, 67

In this thesis, in ideal topological spaces, RP_I –sets, RPC_I – sets and RC_I – sets and the properties and the relationships of RP_I –sets, RPC_I – sets and RC_I – sets are introduced and studied. Moreover, the properties and the relationships of pre_I^*-closed sets and pre_I^*-open sets are studied. The notion of pre_I^*-closure and properties of the notion of pre_I^*-closure are introduced and studied. Also, the relationships of I-R closed sets and weak I_{rg}-closed sets are studied.

Keywords: RP_I –sets, RPC_I – sets, RC_I – sets, pre_I^*-closed sets, pre_I^*-open sets, ideal topological spaces, weak I_{rg}-closed sets.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1
GİRİŞ

İdeal uzaylar üzerine çeşitli çalışmalar literatürde yer almış ve bunlar üzerine çeşitli bakış açıları ve araştırmalar bulunmaktadır.

Örneğin, Mukherjee ve ark., 2007; Dontchev ve ark., 1999b; Hamlett ve ark., 1991; Dontchev ve Ganster, 1998.

Son yıllarda literatürde, zayıf I_{rg}-kapalı kümeler (Ekici ve Özen, 2013), kuvvetli I-LC kümeler (Inthumathi ve ark., 2011), ön_I^*-açık kümeler (Ekici, 2011) ve I-R kapalı kümeler (Acikgoz ve Yuksel, 2007) ve zayıf I_{rg}-kapalı kümeler, kuvvetli I-LC kümeler, ön_I^*-açık kümeler ve I-R kapalı kümelerin özellikleri sunulmuş ve çalışılmıştır.

Bu tezde, ideal topolojik uzayda, RP_I –kümeler, RPC_I – kümeler ve RC_I – kümeler ve RP_I –kümelerin, RPC_I – kümelerin ve RC_I – kümelerin özellikleri ve ilişkileri sunulmuş ve çalışılmıştır. Ayrıca ön_I^*-kapalı kümeler ve ön_I^*-açık kümelerin özellikleri ve ilişkileri çalışılmıştır.

ön_I^*-kapanış ifadesi ve özellikleri sunulmuş ve çalışılmıştır. Bunun yanı sıra, I-R kapalı kümelerin ve zayıf I_{rg}-kapalı kümelerin ilişkileri çalışılmıştır.

Tezin ilk bölümünde, tez hakkında genel bilgiler ve açıklamalar ifade edilmektedir.

Tezin ikinci bölümünde tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ifade edilmektedir.

Tezin üçüncü bölümünde, RP_I –kümeler ve RP_I – kümelerin özellikleri ve ilişkileri sunulmuş ve çalışılmıştır. ön_I^*-kapalı bir alt kümenin bir RP_I-küme olduğu, düzenli açık bir alt kümenin bir RP_I-küme olduğu gösterilmiştir. Ayrıca RP_I – kümelerin çeşitli özellikleri çalışılmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde, RPC_I –kümeler ve RPC_I – kümelerin özellikleri ve ilişkileri sunulmuş ve çalışılmıştır.

RPC_I-kümelerin ön_I^*-açık bir alt küme olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, ön_I^*-kapalı ve ön_I^*-açık bir alt kümenin bir RPC_I-küme olduğu, düzenli açık bir alt kümenin bir RPC_I-küme olduğu gösterilmiştir. Bunun yanı sıra çeşitli özellikler çalışılmıştır.

Tezin beşinci bölümünde, RC_I –kümeler ve RC_I – kümelerin özellikleri ve ilişkileri sunulmuş ve çalışılmıştır. I-R kapalı alt kümelerin RC_I –küme olduğu gösterilmiştir. Ayrıca RC_I – kümelerin çeşitli özellikleri ve ilişkileri çalışılmıştır.

Tezin altıncı bölümünde, ideal topolojik uzaylarda RP_I –kümelerin, RPC_I–kümelerin ve RC_I – kümelerin ilişkileri çalışılmıştır.

Tezin yedinci bölümünde, ideal topolojik uzaylarda I-R kapalı kümelerin çeşitli özellikleri üzerinde durulmuştur.

Tezin sekizinci bölümünde ön_I^*-süreklilik veP_I^*C-süreklilik kavramları sunulmuştur.

ön_I^*-süreklilik ve P_I^*C – süreklilik kavramlarının çeşitli özellikleri tartışılmıştır.

Tezin dokuzuncu bölümünde, ideal topolojik uzaylarda RC_I–kümelerin çeşitli özellikleri çalışılmıştır.

Tezin son bölümünde, ideal topolojik uzaylarda RC_I–süreklilik ve I-R süreklilik kavramları sunulmuştur.

RC_I–sürekliliğin RP_I–sürekliliği gerektirdiği gösterilmiştr. Ayrıca RC_I–süreklilik ve I-R süreklilik kavramlarının çeşitli özellikleri üzerinde durulmuştur.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde topolojik uzaylar (X, τ) veya (Y, σ) ile ya da kullanım kolaylığı açısından X veya Y ile gösterilecektir.

Ayrıca aksi açık bir şekilde belirtilmediği sürece bu topolojik uzaylar üzerinde hiçbir ayırma aksiyomunun sağlanmadığı varsayılacaktır.

X bir topolojik uzay ve $T \subset X$ olsun. T kümesinin kapanışını cl(T) ve içini int(T) ile göstereceğiz.

Bu bölümde tezimiz için faydalı olacak temel tanım ve teoremler sunulmaktadır.

Tanım 2.1. I bir X kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun.

I ailesi,

(1) $S \in I$ ve $N \subset S$ ise $N \in I$

(2) $S \in I$ ve $N \in I$ ise $S \cup N \in I$

koşullarını sağlıyor ise I ailesine (X, τ) topolojik uzayı üzerinde bir ideal denir (Kuratowski, 1966).

Tanım 2.2. (X, τ) bir topolojik uzay, ve I, X kümesi üzerinde bir ideal olsun.

P(X), X in kuvvet kümesi ve $\tau(x)=\{N \in \tau : x \in N\}$ olmak üzere $S \subset X$ için,

$S^*(I,\tau)=\{ x \in X: \forall N \in \tau(x) \text{ için } N \cap S \notin I \}$

ile tanımlı

$(.)^* : P(X) \rightarrow P(X)$

dönüşümüne bir yerel fonksiyon denir (Kuratowski, 1966).

Tanım 2.3. $S \rightarrow S^*$ (I,τ) dönüşümüne S kümesinin τ topolojisine ve I idealine göre yerel fonksiyonu denir (Kuratowski, 1966).

S^* (I,τ) kümesi kısaca S^* ile gösterilecektir. Ayrıca, I idealine ve τ topolojisine göre oluşturulan τ^* (I,τ) topolojisi de kısaca τ^* ile gösterilecektir (Kuratowski, 1966; Janković ve Hamlet, 1990).

Tanım 2.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve I, X kümesi üzerinde bir ideal olsun.

S⊆ X için, cl^*(S)= S∪ S^* (I,τ) ile tanımlı cl^*(.) operatörüne bir τ^* (I,τ) topolojisi için Kuratowski kapanış operatörü denir (Janković ve Hamlet, 1990).

Tanım 2.5. Kuratowski kapanış operatörü ile üretilen τ^* (I,τ) topolojisine ∗-topoloji denir (Janković ve Hamlet, 1990).

Ayrıca ∗-topolojisi τ topolojisinden daha ince bir topolojidir (Janković ve Hamlet, 1990).

Tanım 2.6. X kümesi üzerinde tanımlı bir I ideali için, (X,τ,I) bir ideal topolojik uzay ya da kısaca ideal uzay olarak adlandırılmaktadır (Kuratowski, 1966).

Tanım 2.7. (X, τ) bir topolojik uzay, T⊂ X olsun.

T=int(cl (T))

koşulu sağlanıyor ise T kümesine düzenli-açık bir küme denir (Stone, 1937).

Tanım 2.8. (X, τ) bir topolojik uzay, T⊂ X olsun.

T=cl(int (T))

koşulu sağlanıyor ise T kümesine düzenli-kapalı bir küme denir (Stone, 1937).

Tanım 2.9. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

S düzenli-açık ve N, ∗-kapalı bir küme olmak üzere

T=S ∩ N

olarak ifade edilebiliyorsa T kümesine kuvvetli-I-LC bir küme denir (Inthumathi ve ark., 2011).

Tanım 2.10. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

T⊂ N ve N, X’ in açık bir alt kümesi olduğunda

T^* ⊂ N

sağlanıyorsa T kümesine I_g-kapalı bir küme denir (Dontchev ve ark., 1999).

Tanım 2.11.(X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

T ⊂ cl^* (int(T))

koşulu sağlanıyor ise T kümesine yarı-I-açık bir küme denir (Hatir ve Noiri, 2002).

Tanım 2.12. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

T ⊂ N ve N, X in düzenli-açık bir alt kümesi olduğunda

T^* ⊂ N

sağlanıyorsa T kümesine I_{rg}-kapalı bir küme denir (Navaneethakrishnan ve ark., 2009).

Tanım 2.13. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

X \ T I_g-kapalı bir küme ise T kümesine X in I_g-açık bir alt kümesi denir (Dontchev ve ark., 1999).

Tanım 2.14. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

X\ T I_{rg}-kapalı bir küme ise T kümesine X in I_{rg}-açık bir alt kümesi denir (Navaneethakrishnan ve ark., 2009).

Tanım 2.15. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. T⊂ X olmak üzere;

T ⊂ N ve N, X' in düzenli-açık bir alt kümesi olduğunda

$(int(T))^*$ ⊂ N

sağlanıyor ise T kümesine zayıf -I_{rg}-kapalı bir küme denir (Ekici ve Özen, 2013).

Tanım 2.16. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun.

T ⊂ X olmak üzere X \ T zayıf -I_{rg}-kapalı bir küme ise T kümesine zayıf -I_{rg}-açık bir küme denir (Ekici ve Özen, 2013).

Tanım 2.17. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. T⊂ X olmak üzere;

T ⊂ int^*(cl(T))

sağlanıyor ise T kümesine ön_I^*-açık bir küme denir (Ekici, 2011).

Tanım 2.18. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. T⊂ X olmak üzere;

X \ T kümesi X in ön_I^*-açık bir alt kümesi ise T ön_I^*-kapalı bir kümedir (Ekici, 2011).

Tanım 2.19. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. T⊂ X olmak üzere;

T $= cl^*$ (int(T))

sağlanıyor ise T kümesine I-R kapalı bir küme denir (Acikgoz ve Yuksel, 2007).

Not 2.20. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun.

Bu uzayın bir T alt kümesi için aşağıdaki diagram sağlanır

ön_I^*-kapalı küme

$\Downarrow$

zayıf -I_{rg}-kapalı küme

$\Uparrow$

I_{rg}-kapalı küme

$\Uparrow$

I_g-kapalı küme

$\Uparrow$

$*$-kapalı küme

$\Uparrow$

I-R kapalı küme

(Ekici ve Özen, 2013).

Teorem 2.21.(X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. T ⊂ X için aşağıdakiler denktir.

(1) T, X' in zayıf -I_{rg}-kapalı bir alt kümesidir.

(2) T ⊂ S ve S, X in düzenli-açık bir alt kümesi olduğunda cl^* (int(T))⊂ S

olur (Ekici ve Özen, 2013).

BÖLÜM 3
İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
RP_I –KÜMELER

Tanım 3.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun.

S, X in düzenli-açık bir alt kümesi, N X'in ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olmak üzere

T = S∩ N

olarak ifade edilebiliyor ise T kümesine bir RP_I-küme denir.

Uyarı 3.2. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. T, X'in ön_I^*-kapalı bir alt kümesi ise T kümesi bir RP_I-kümedir.

Uyarı 3.3. Uyarı 3.2 de belirtilen ifadenin tersi doğru değildir. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığı bir sonraki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun.

N = {y,z} kümesi X' te RP_I-küme fakat X' te ön_{I^*}-kapalı bir alt küme değildir.

Uyarı 3.5. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. T, X' in düzenli-açık bir alt kümesi ise T kümesi bir RP_I-kümedir.

Uyarı 3.6. Uyarı 3.5 te belirtilen ifadenin tersi doğru değildir. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığı bir sonraki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.7. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun.

T = {y, z, w} kümesi X te RP_I-küme fakat X'te düzenli-açık bir alt küme değildir.

Teorem 3.8. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. Bu ideal uzayın bir T alt kümesi için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T $ön_I^*$-kapalı bir kümedir.

(2) T, RP_I-küme ve zayıf -I_{rg}-kapalı bir kümedir.

İspat :

(1→2):

T, X in $ön_I^*$-kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda, T $ön_I^*$-kapalı bir küme ise X düzenli-açık bir küme olmak üzere

T = T ∩ X

olarak ifade edilebilir. Böylece T kümesi $ön_I^*$-kapalı ve düzenli-açık bir kümenin kesişimi olarak ifade edilebildiğinden T kümesi bir RP_I-küme olur. Ayrıca T $ön_I^*$-kapalı bir küme ise,

cl^* (int(T)) ⊂ T

ve buradan

Int (T) ∪ $(int(T))^*$

⊂ T

yazılabilir. Bu durumda

$(int(T))^*$ ⊂ T ⊂ X

olur. Böylece, T ⊂ N ve N düzenli-açık olmak üzere,

$(int(T))^*$ ⊂ N

koşulu sağlandığından T kümesi zayıf -I_{rg}-kapalı bir küme olur. O halde T $ön_I^*$-kapalı bir küme ise RP_I-küme ve zayıf -I_{rg}-kapalı bir kümedir

(2→1):

T kümesi X te RP_I-küme ve zayıf -I_{rg}-kapalı bir alt küme olsun.

T kümesi bir RP_I-küme olduğundan S düzenli-açık bir alt küme ve N ön_I^*-kapalı bir alt küme olmak üzere,

T=S∩ N

olur. O halde

T⊂ S

dir. Buradan T kümesi X' in zayıf -I_{rg}-kapalı bir alt kümesi olduğundan,

$(int(T))^* \subset$ S

dir.

T= S∩ N ise

T ⊂ N

olur. N kümesi ön_I^*-kapalı bir küme olduğundan

cl^* (int(T)) ⊂ N

dir. Buradan

cl^* (int(T)) ⊂ S∩N =T

elde ederiz. Sonuç olarak, T kümesi X'in ön_I^*-kapalı bir alt kümesidir.

Tanım 3.9. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. T kümesini içeren bütün ön_I^*-kapalı kümelerin kesişimi T nin ön_I^*-kapanışı olarak tanımlanır ve P_I^*cl(T) ile gösterilir.

Teorem 3.10. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X'te bir RP_I -küme dir.

(2) X'te düzenli-açık bir S alt kümesi için

T = S ∩ P_I^*cl (T)

olur.

İspat :

(1→2):

T, X te bir RP_I –küme olsun. Bu durumda,düzenli açık bir S alt kümesi ve ön_I^*-kapalı bir N alt kümesi için,

T= S ∩ N

olur.

Buradan,

T ⊂ N dir.

Böylece,

T

⊂ P_I^*cl (T)

⊂ N

olur. O halde,

T = T ∩ P_I^*cl (T)

=S ∩ N ∩ P_I^*cl (T)

=S ∩ P_I^*cl (T)

olur. Sonuç olarak X in düzenli-açık bir S alt kümesi için,

T = S ∩ P_{I^*} cl (T)

olur.

(2→1):

X'in düzenli-açık bir S alt kümesi için,

T = S ∩ P_I^*cl (T)

olsun. Buradan T' yi içeren ön_I^*-kapalı bir N alt kümesi için

P_I^*cl (T) ⊂ N

olur.

Bu durumda,

cl^* (Int (P_I^*cl (T)))

⊂ cl^* (Int (N))

⊂ N

yazılabilir.

O halde,

cl^* (Int (P_I^*cl (T)))

$\subset$ $\cap$ { N : T $\subset$ N, N ön_I^*-kapalı }

olur.

Sonuç olarak,

cl^* (Int (P_I^*cl (T))

$\subset$ P_I^*cl (T)

dir. Böylece, P_I^*cl (T), X'in ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olur. Dolayısıyla, T, X te bir RP_I – küme olur.

Teorem 3.11. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T$\subset$ X olsun.

T, X' te bir RP_I –küme ise P_I^*cl (T) \ T kümesi X' in ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olur.

İspat :

T, X te bir RP_I –küme olsun. Bu durumda düzenli açık bir S alt kümesi ve ön_I^*-kapalı bir N alt kümesi için,

T= S $\cap$ N

olur. Buradan

T $\subset$ N

dir. Böylece,

T $\subset$ P_I^*cl (T)

$\subset$ N

olur. O halde,

T

= T $\cap$ P_I^*cl (T)

= S $\cap$ N $\cap$ P_I^*cl (T)

= S $\cap$ P_I^*cl (T)

olur. Sonuç olarak X' in düzenli-açık bir S alt kümesi için,

T = S $\cap$ P_I^*cl (T)

olur.

Buradan,

P_I^*cl (T) \ T

= P_I^*cl (T) \ (S ∩ P_I^*cl (T))

= P_I^*cl (T) ∩ (X \ (S ∩ P_I^*cl (T)))

= P_I^*cl (T) ∩ ((X \ S) ∪ (X \ P_I^*cl (T)))

= (P_I^*cl (T) ∩ (X \ S)) ∪ (P_I^*cl (T) ∩ (X \ P_I^*cl (T)))

= (P_I^*cl (T) ∩ (X \ S)) ∪ ∅

= P_I^*cl (T) ∩ (X \ S)

dir. O halde,

P_I^*cl (T) \ T

= P_I^*cl (T) ∩ (X \ S)

olur. Sonuç olarak P_I^*cl (T) \ T, X'in ön_I^*-kapalı bir alt kümesidir.

Teorem 3.12. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X'in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X'te bir RP_I-küme, zayıf I_{rg} -kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur.

İspat :

(1→2): T, X in I-R kapalı bir alt kümesi olsun. Burada T, I-R kapalı bir küme ise,

T = cl^* (Int (T))

olur. Bu durumda,

T ⊂ cl^* (Int (T))

koşulu sağlandığından T kümesi yarı-I-açık bir küme olur. Ayrıca,

cl^* (Int (T)) ⊂ T

koşulu da sağlanacağından T kümesi ön_I^*-kapalı bir kümedir.

O halde,

T = T ∩ X

olarak düşünülürse $ön_I^*$-kapalı bir küme olan T ve düzenli-açık bir küme olan X kümesinin kesişimi olarak yazılabilen T kümesi bir RP_I-küme olur. Ayrıca, T kümesi $ön_I^*$-kapalı bir küme ise,

cl^* (Int (T)) ⊂ T

koşulu sağlanır. Buradan,

Int (T) ∪ $(Int(T))^*$ ⊂ T

yazılabilir.

Böylece,

$(Int(T))^*$ ⊂ T ⊂ X

elde edilir. Dolayısıyla, düzenli-açık bir N kümesi için T ⊂ N olduğunda,

$(Int(T))^*$ ⊂ N

koşulu sağlandığından T kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olur.

(2→1):

T, X'te RP_I-küme, zayıf I_{rg}-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olsun. T, X'in yarı-I-açık bir alt kümesi ise,

T ⊂ cl^* (Int (T) **(3.1)**

olur.

T, X'te bir RP_I-küme ve zayıf I_{rg}–kapalı bir alt küme ise T, X te bir RP_I-küme olduğundan, S düzenli-açık bir alt küme ve N $ön_I^*$-kapalı bir alt küme olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde

T ⊂ S dir.

Buradan, T, X'in zayıf I_{rg}–kapalı bir alt kümesi olduğundan,

$(Int(T))^*$ ⊂ S

dir. Aynı zamanda T ⊂ N ve N $ön_I^*$-kapalı bir küme olduğundan,

cl^* (Int (T)) ⊂ N

yazılabilir.

Bu durumda,

cl^* (Int (T))

$\subset$ S $\cap$ N = T

olur. O halde T, X'in $ön_I^*$-kapalı bir alt kümesidir. Buradan,

cl^* (Int (T)) $\subset$ T **(3.2)**

elde edilir. Sonuç olarak (3.1) ve (3.2) gereği,

T = cl^* (Int (T))

olup T, X'te I-R kapalı bir alt küme olur.

BÖLÜM 4
İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
RPC_I –KÜMELER

Tanım 4.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. S, X' in düzenli-açık bir alt kümesi, N X in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olmak üzere,

T= S∩ N

olarak ifade edilebiliyorsa T kümesine bir RPC_I-küme denir.

Teorem 4.2. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.
T, X te RPC_I-küme ise T, X in ön_I^*-açık bir alt kümesidir.

İspat:

T, X te bir RPC_I-küme olsun. Bu durumda, X'in düzenli-açık bir alt kümesi S ve ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi N olmak üzere,

T= S∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde,

T= S∩ N

⊂ S ∩ int^*(cl (N))

= int^*(S∩ cl (N))

⊂ int^*(cl (S∩ N))

= int^*(cl (T))

elde edilir. Buradan,

T

= S∩ N

⊂ int^*(cl(T))

olur. Sonuç olarak T= S∩ N, X' in ön_I^*-açık bir alt kümesidir.

Uyarı 4.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun.

T, X'te bir RPC_I-küme ise T, X in ön_I^*-açık bir alt kümesidir.

Uyarı 4.4. Uyarı 4.3 te belirtilen ifadenin tersi doğru değildir. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığı bir sonraki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.5. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda T={x, y, z } kümesi X in ön_I^*-açık bir alt kümesi fakat X te bir RPC_I-küme değildir.

Uyarı 4.6. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. T, X in düzenli-açık bir alt kümesi ise T bir RPC_I-kümedir.

Uyarı 4.7. Uyarı 4.6 da belirtilen ifadenin tersi doğru değildir. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığı bir sonraki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.8. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda T={x, y, w} X'te bir RPC_I-küme fakat X in düzenli-açık bir alt kümesi değildir.

Uyarı 4.9. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

T, X'in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi ise T bir RPC_I-kümedir.

Uyarı 4.10. Uyarı 4.9 da belirtilen ifadenin tersi doğru değildir. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığı bir sonraki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.11. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda N={y, z} X'te bir $RPC_{\imath}$-küme fakat X in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi değildir.

Uyarı 4.12. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Uyarı 4.6, Uyarı 4.9 ve Teorem 4.2 gereği aşağıdaki diagram T kümesi için sağlanır.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{ö}n_I^*\text{-açık küme} \\ & & \Uparrow \\ \text{ö}n_I^*\text{-açık ve ö}n_I^*\text{-kapalı küme} & \Longrightarrow & RPC_{\imath}\text{-küme} \\ & & \Uparrow \\ & & \text{düzenli-açık küme} \end{array}$$

Teorem 4.13. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. O halde aşağıdaki özellikler birbirine denktir.

(1) T, X'in ön_I^*-kapalı ve ön_I^*-açık bir alt kümesidir.

(2) T, X'te RPC_I-küme ve ön_I^*-kapalı bir alt kümedir.

İspat:

(1→2):

T, X'in $\ddot{o}n_I^*$-kapalı ve $\ddot{o}n_I^*$-açık bir alt kümesi olsun. O halde, T $\ddot{o}n_I^*$-kapalı ve $\ddot{o}n_I^*$-açık bir alt küme ve X düzenli-açık bir küme olmak üzere;

T=X ∩ T

olarak ifade edebileceğimizden T, X'te bir RPC_I-küme olur. Bu durumda T kümesi X'te RPC_I-küme ve $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir alt kümedir

(2→1):

T, X'te RPC_I-küme ve $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir alt küme olsun.

T kümesi X'te bir RPC_I-küme ise S, X'te düzenli-açık bir küme ve N, X'te $\ddot{o}n_I^*$-kapalı ve $\ddot{o}n_I^*$-açık bir alt küme olmak üzere

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde

T=S ∩ N

$\subset$ S ∩ int^* (cl (N))

= int^* (S ∩ cl (N))

$\subset$ int^* (cl (S ∩ N))

= int^* (cl (T))

elde edilir. Buradan,

T= S ∩ N

$\subset$ int^* (cl (T))

olur. Sonuç olarak,

T $\subset$ int^* (cl (T))

sağlandığından T= S ∩ N, X' in $\ddot{o}n_I^*$-açık bir alt kümesidir.

T kümesinin X'in $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir alt kümesi olduğu ifade edilmişti. O halde,T hem $\ddot{o}n_I^*$-açık hem de $\ddot{o}n_I^*$ -kapalı bir küme olur.

Teorem 4.14. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. O halde aşağıdaki özellikler birbirine denktir.

(1) T, X'in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X'te bir RPC_I - küme ve zayıf I_{rg} -kapalı bir alt kümedir.

İspat :

(1→2):

T, X'in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi ise,

T=T ∩ X

olarak düşündüğümüzde X düzenli açık bir küme ve T ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir küme olduğundan,

T=T ∩ X

ifadesi T kümesinin bir RPC_I– küme olduğunu gösterir. Ayrıca, T ön_I^*-kapalı bir küme ve N düzenli-açık bir küme olmak üzere,

T ⊂ N

olsun. T ön_I^*-kapalı bir küme olduğundan,

cl^* (Int (T)) ⊂ T

dir. Böylece,

cl^* (Int (T)) ⊂ T ⊂ N

ise,

cl^* (Int (T)) ⊂ N

olur. Buradan T ⊂ N ve N düzenli-açık bir küme olmak üzere;

cl^* (Int (T)) ⊂ N

olduğundan T zayıf I_{rg}- kapalı bir kümedir. Sonuç olarak T, X'in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi ise, T hem bir RPC_I –küme hem de zayıf I_{rg}- kapalı bir küme olur.

(2→1):

T, X te bir RPC_I –küme ve zayıf I_{rg}- kapalı bir alt küme olsun.

T bir RPC_I –küme olduğundan, X'te düzenli-açık bir S alt kümesi ve hem ön_I^*-açık hem de ön_I^*-kapalı olan bir N alt kümesi için,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Bu ise T kümesinin X'te bir RP_I –küme olmasını gerektirir. Böylece T kümesi X'te bir RP_I –küme ve zayıf I_{rg}-kapalı bir alt küme olur.T kümesi bir RP_I –küme olduğundan ve zayıf I_{rg}- kapalı bir alt küme olduğundan dolayı T,X'in ön_I^*-kapalı bir alt kümesidir. Diğer taraftan T, X'te bir RPC_I –küme olduğundan, X'in düzenli-açık bir alt kümesi S ve hem ön_I^*-kapalı hem de ön_I^*-açık olan bir alt kümesi N olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Böylece T=S ∩ N, X in ön_I^*-açık bir alt kümesi olur. Sonuç olarak, T kümesi X'in hem ön_I^*-açık hem de ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olur.

Sonuç 4.15. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. Teorem 4.13 ve Teorem 4.14'te elde edilen bilgiler gereği aşağıdaki özellikler T kümesi için birbirine denktir.

(1) T, X'in hem ön_I^*-açık hem de ön_I^*-kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X te RPC_I –küme ve ön_I^*-kapalı bir alt kümedir.

(3) T kümesi X de RPC_I –küme ve zayıf I_{rg}–kapalı olan bir alt kümedir.

BÖLÜM 5
İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
RC_I – KÜMELER

Tanım 5.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

X'te düzenli-açık bir S alt kümesi ve bir N alt kümesi için

N=cl^* (Int (N))

olmak üzere

T= S ∩ N

sağlanıyorsa T kümesine bir RC_I –küme denir.

Uyarı 5.2. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. T, X'in I-R kapalı bir alt kümesi ise T bir RC_I –küme olur.

Uyarı 5.3. Bir sonraki örnekte gösterildiği üzere bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 5.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda T ={y, z} kümesi X'te bir RC_I-küme fakat X'in I-R kapalı bir alt kümesi değildir.

Uyarı 5.5. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. T, X'in düzenli-açık bir alt kümesi ise T bir RC_I-küme olur.

Uyarı 5.6. Bir sonraki örnekte gösterildiği üzere bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 5.7. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda N ={ y, z, w } X'te bir RC_I-küme fakat X'in düzenli-açık bir alt kümesi değildir.

Teorem 5.8. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X.olsun.Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X'te bir RC_I -küme dir.

(2) T, X'te bir RP_I - küme ve yarı-I-açık bir alt kümedir.

İspat :

(1→2): T, X'te bir RC_I –küme olsun. Bu durumda RC_I –küme tanımı gereği S, X'te düzenli-açık ve N= cl^* (Int(N)) olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Buradan N kümesi için

N= cl^* (Int(N))

ise,

cl^* (Int(N)) ⊂ N

ve

N ⊂ cl^* (Int(N))

özellikleri sağlanır.

Burada,

cl^* (Int(N)) ⊂ N

özelliği bize N kümesinin ön_I^*-kapalı bir küme olduğunu gösterir.

O halde, S, X'te düzenli-açık ve N, X'te ön_I^*-kapalı bir küme olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde T, X'te bir RP_I– küme olur.

Ayrıca T, X'te bir RC_I –küme olduğundan, düzenli-açık bir S alt kümesi ve N= cl^* (Int(N)) olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Burada,

T

=S ∩ N

=S ∩ cl^* (Int(N))

⊂ cl^* (S ∩ Int(N))

= cl^* (Int(S ∩ N))

= cl^* (Int (T))

yazabiliriz. Bu durumda

T ⊂ cl^* (Int (T))

olur. O halde T, X'in yarı-I-açık bir alt kümesidir. Sonuç olarak,T, X'te bir RC_I –küme ise T, X'te bir RP_I –küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur.

(2→1):

T, X'te bir RP_I –küme ve yarı-I-açık bir alt küme olsun. Böylece, T, X' te bir RP_I –küme ise, düzenli-açık bir S kümesi ve ön_I^*-kapalı bir N kümesi için,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Ayrıca N kümesi ön_I^*-kapalı bir küme olduğundan,

cl^* (Int (N)) ⊂ N

dir. Bunun yanı sıra, T yarı-I-açık bir küme ise

T ⊂ cl^* (Int (T))

dir. Buradan,

T

=T ∩ cl^* (Int (T))

$= S \cap N \cap cl^* (Int(T))$

$= S \cap cl^* (Int (T))$

yazılabilir. Böylece,

$K = cl^* (Int (T))$

diyelim. O halde düzenli-açık bir S alt kümesi ve

K

$= cl^* (Int (K))$

için,

$T = S \cap K$

olarak ifade edilebildiğinden T, X' te bir RC_I–küme olur.

Teorem 5.9. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $T \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X' te bir RC_I -kümedir.

(2) X' te düzenli-açık bir S alt kümesi için

$T = S \cap cl^* (Int (T))$

dir.

İspat :

(1→2): T, X'te bir RC_I –küme olsun. Bu durumda RC_I –küme tanımı gereği S, X'te düzenli-açık ve $N = cl^* (Int(N))$ olmak üzere,

$T = S \cap N$

olarak ifade edilebilir. Buradan,

$T \subset N$

yazılabilir. Böylece,

$cl^* (Int (T))$

$\subset cl^* (Int (N))$

olur ve

$$N = cl^* (\mathrm{Int}(N))$$

olduğundan,

$$cl^* (\mathrm{Int}(N)) \subset N$$

olup,

$$cl^* (\mathrm{Int}\,(T))$$

$$\subset cl^* (\mathrm{Int}\,(N))$$

$$\subset N$$

sağlanır.

Böylece,

$$cl^* (\mathrm{Int}\,(T)) \subset N$$

olur. Diğer taraftan düzenli-açık bir S alt kümesi için,

$$N = cl^* (\mathrm{Int}\,(N))$$

olmak üzere,

$$T$$

$$= S \cap N$$

$$= S \cap cl^* (\mathrm{Int}\,(N))$$

$$\subset cl^* (S \cap \mathrm{Int}(N))$$

$$= cl^* (\mathrm{Int}\,(S \cap N))$$

$$= cl^* (\mathrm{Int}(T))$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$T \subset cl^* (\mathrm{Int}\,(T))$$

olur. O halde,

$$T$$

$$= T \cap cl^* (\mathrm{Int}\,(T))$$

= S ∩ N ∩ cl^* (Int (T))

= S ∩ cl^* (Int (T))

olur. O halde X'in düzenli-açık bir S alt kümesi için,

T = S ∩ cl^* (Int (T))

olur

(2→1):

S, X'te düzenli-açık bir küme olmak üzere,

T

= S ∩ cl^* (Int (T))

olsun. Buradan,

cl^* (Int (T))

= cl^* (Int cl^* (Int (T)))

olur. Sonuç olarak T, X'te bir RC_I –küme olur.

Sonuç 5.10. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Teorem 5.8. ve Teorem 5.9. da elde edilen bilgiler gereği aşağıdaki özellikler T kümesi için birbirine denktir.

(1) T, X' te bir RC_I–küme dir.

(2) T, X'te bir RP_I –küme ve yarı-I-açık bir alt kümedir.

(3) X' in düzenli-açık bir S alt kümesi için,

T = S ∩ cl^* (Int (T)) dir.

BÖLÜM 6

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA RP_I –KÜMELER, RPC_I –KÜMELER VE RC_I – KÜMELERİN İLİŞKİLERİ

Uyarı 6.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. T kümesi için aşağıdaki diagram sağlanır.

$$
\begin{tikzcd}
RC_I \text{ –küme} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{kuvvetli-I-LC küme} \arrow[dl, Rightarrow, bend left] \\
RP_I \text{ –küme} & \\
RPC_I \text{ –küme} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Uyarı 6.2. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Uyarı 6.1 de gösterilmiş olan ifadelerin tersleri doğru değildir. Bu ifadelerin terslerinin doğru olmadığı bundan sonraki örneklerde gösterilmiştir.

Örnek 6.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda T ={ x, w } kümesi X'te bir kuvvetli- I-LC küme fakat RC_I –küme değildir.

Örnek 6.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda N ={ x, y, w } kümesi X'te bir RP_I –küme fakat X'in kuvvetli- I-LC bir alt kümesi değildir.

Örnek 6.5. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda S={x, z, w} kümesi X' te bir RPC_I –küme fakat X' in kuvvetli–I–LC bir alt kümesi değildir.

Örnek 6.6. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun.

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun. Bu durumda T ={ x, w } kümesi X' te bir RP_I–küme fakat X'te bir RPC_I –küme değildir.

Teorem 6.7. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X' te bir RC_I –küme dir.

(2) T, X'te bir kuvvetli-I-LC küme ve yarı-I-açık bir alt kümedir.

İspat :

(1→2): T, X’te bir RC_I –küme olsun. Bu durumda, S, X’te düzenli-açık,

N = cl^* (Int (N))

olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Böylece,

N = cl^* (Int (N))

kümesi ∗-kapalı bir küme olduğundan, S düzenli-açık ve N ∗-kapalı bir küme olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak yazılabilir. O halde T kümesi kuvvetli-I-LC bir küme olur. Ayrıca, T, X’te bir RC_I –küme ise, S, X’ te düzenli-açık bir küme ve

N = cl^* (Int (N))

olmak üzere

T = S ∩ N

olarak ifade edilebilir.

Buradan,

T

= S ∩ N

= S ∩ cl^* (Int (N))

⊂ cl^* (S ∩ Int (N))

= cl^* (Int (S ∩ N))

= cl^* (Int (T))

olur.

Bu durumda

T ⊂ cl^* (Int (T))

dir. O halde T, X'in yarı-I-açık bir alt kümesidir. Sonuç olarak T, X'te bir RC_I –küme ise T, X'te bir kuvvetli-I-LC küme ve yarı-I-açık bir alt kümedir.

(2→1):

T, X'te kuvvetli-I-LC ve yarı-I-açık bir alt küme olsun. Bu durumda T, X' te kuvvetli-I-LC bir küme ise, S düzenli-açık ve N ∗-kapalı bir küme olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Burada N ∗-kapalı bir küme olduğundan,

cl^* (N) = N

yazılabilir. Böylece,

Int (N)⊂ N

ve buradan,

cl^* (int(N))

⊂ cl^* (N)

=N

olup,

cl^* (int(N))

⊂ N

elde edilir. Bu durumda N $ön_I^*$-kapalı bir küme olur. O halde, S düzenli-açık ve N $ön_I^*$-kapalı bir küme olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak ifade edilebildiğinden T kümesi bir RP_I –küme olur. Ayrıca T yarı-I-açık bir kümedir.

O halde T kümesi bir RP_I –küme ve yarı-I-açık bir küme olduğundan dolayı T, X’te bir RC_I –küme olur.

BÖLÜM 7

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA I-R KAPALI KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ

Teorem 7.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X' in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X' te bir kuvvetli-I-LC küme, I_g-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur

İspat :

(1→2): T, X'in I-R kapalı bir alt kümesi olsun. Burada, T, I-R kapalı bir küme ise

T = cl^* (Int (T))

olur. Bu durumda,

T ⊂ cl^* (Int (T))

sağlandığından T kümesi yarı-I-açık bir küme olur. Ayrıca T kümesi I-R kapalı bir küme ise aynı zamanda ∗- kapalı bir küme olur. Bu durumda, T kümesi ∗- kapalı bir küme ise

T = T ∩ X

olarak düşünüldüğünde, T kümesi ∗- kapalı ve X kümesi düzenli-açık bir küme olmak üzere T kümesi için kuvvetli-I-LC küme olma koşulu sağlandığından T, X'te kuvvetli-I-LC bir küme olur. Ayrıca, T ⊂ N ve N kümesi açık bir küme olmak üzere,

T^*⊂ T ⊂ N

olduğundan

T^*⊂ N

koşulu sağlanır. Dolayısıyla T kümesi I_g -kapalı bir küme olur. Sonuç olarak, T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise, T, X' te kuvvetli-I-LC bir küme, I_g -kapalı bir küme ve yarı-I-açık bir küme olur.

(2→1):

T kümesi X'te kuvvetli-I-LC bir küme, I_g -kapalı bir küme ve yarı-I-açık bir küme olsun. T kümesi yarı-I-açık bir küme ise,

T ⊂ cl^* (Int (T)) **(7.1)**

koşulu sağlanır. Ayrıca T, I_g -kapalı bir küme olduğundan, T ⊂ N ve N kümesi X'te açık olduğunda,

$T^* \subset$ N

koşulu sağlanır. Burada N kümesi X' in açık bir alt kümesi ise aynı zamanda düzenli-açık bir alt kümesi için de geçerlidir. Dolayısıyla, T ⊂ N ve düzenli-açık bir N kümesi için,

$T^* \subset$ N

sağlanır. O halde T kümesi I_{rg} -kapalı bir küme olur. Böylece, T kümesi I_{rg} -kapalı bir küme ise T ⊂ N ve N, X'te düzenli-açık bir küme iken,

$T^* \subset$ N

koşulu sağlanır. Bu durumda,

Int (T) ⊂ T

ve buradan

$(Int(T))^* \subset T^*$

olup,

$(Int(T))^* \subset T^* \subset$ N

olarak ifade edilebilir. O halde,

$(Int(T))^* \subset$ N

koşulu sağlanır. Dolayısıyla, düzenli-açık bir N alt kümesi için,

T ⊂ N

iken,

$(Int(T))^* \subset$ N

koşulu sağlandığından T kümesi X'in zayıf I_{rg} –kapalı bir alt kümesidir.

Ayrıca T, X'te kuvvetli I-LC bir küme olduğundan, S düzenli-açık ve N $*$-kapalı bir küme olmak üzere

T = S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Burada N $*$-kapalı bir küme olduğundan

cl^* (N) = N

yazılabilir. Böylece,

Int (N) ⊂ N

ve

cl^* (Int (N))

⊂ cl^* (N)

= N

olup

cl^* (Int (N)) ⊂ N

elde ederiz. Buradan N ön_{I^*}-kapalı bir küme olur. O halde, S düzenli-açık ve N ön_I^*-kapalı bir küme olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak ifade edilebildiğinden T kümesi bir RP_I-küme olur. Buradan, S düzenli-açık ve N ön_I^*-kapalı bir küme olmak üzere,

T = S ∩ N ise

T ⊂ S

yazılabilir. Böylece T, X'in zayıf I_{rg} –kapalı bir alt kümesi olduğundan,

$(Int(T))^*$ ⊂ S

dir. Aynı zamanda, T ⊂ N ve N ön_{I^*}-kapalı bir küme olduğundan

cl^* (Int (T)) ⊂ N

yazılabilir.

Bu durumda,

cl^* (Int (T))

$\subset$ S $\cap$ N = T

olur. O halde T, X'in $ön_I^*$-kapalı bir kümesidir. Buradan,

cl^* (Int (T)) $\subset$ T **(7.2)**

elde edilir.

Sonuç olarak, (7.1) ve (7.2) gereği

T = cl^* (Int (T))

olup T, X'te I-R kapalı bir alt küme olur.

Teorem 7.2. **(**X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T$\subset$ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X'in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X'te bir kuvvetli-I-LC küme, I_{rg}-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur.

İspat :

(1→2): T, X'in I-R kapalı bir alt kümesi olsun. Burada, T, I-R kapalı bir küme ise

T = cl^* (Int (T))

olur. Bu durumda bir önceki teoremden, T, X'te bir kuvvetli-I-LC küme, I_g-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olacaktır. Dolayısıyla, T kümesi I_{rg}–kapalı bir küme olur. Sonuç olarak, T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise T, X' te kuvvetli-I-LC bir küme,I_{rg} –kapalı bir küme ve yarı-I-açık bir küme olur.

(2→1): T kümesi X'te kuvvetli-I-LC bir küme, I_{rg} -kapalı bir küme ve yarı-I-açık bir küme olsun. T kümesi yarı-I-açık bir küme ise,

T $\subset$ cl^* (Int (T)) **(7.3)**

koşulu sağlanır.

Ayrıca T, I_{rg}–kapalı bir küme olduğundan, T ⊂ N ve N kümesi X’ te düzenli-açık olduğunda

$T^* \subset$ N

koşulu sağlanır. Buradan,

Int (T) ⊂ T ve

$(Int(T))^* \subset T^*$

olup

$(Int(T))^* \subset T^* \subset$ N

olarak ifade edilebilir. O halde

$(Int(T))^* \subset$ N

koşulu sağlanır. Dolayısıyla, düzenli-açık bir N kümesi için,

T ⊂ N iken

$(Int(T))^* \subset$ N

koşulu sağlandığından T kümesi X’ in zayıf I_{rg}-kapalı bir alt kümesidir. Ayrıca, S düzenli-açık ve N ön_I^*-kapalı bir küme olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak ifade edilebildiğinden T kümesi bir RP_I-küme olur. Buradan, bir önceki teorem de göz önüne alınılarak T, X’ in ön_{I^*}-kapalı bir kümesi olur. Buradan,

cl^* (Int (T)) ⊂ T **(7.4)**

elde edilir. Sonuç olarak, (7.3) ve (7.4) gereği

T = cl^* (Int (T))

olup T, X’ te I-R kapalı bir alt küme olur.

Teorem 7.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X'in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X' te bir kuvvetli-I-LC küme, zayıf I_{rg}-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur.

İspat :

(1→2):

T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi olsun. Burada T, I-R kapalı bir küme ise

T = cl^{*} (Int (T))

olur. Bu durumda T kümesi yarı-I-açık bir alt küme olur. Buradan daha önceki teoremde göz önüne alınıldığında T kümesi $*$- kapalı bir küme ise,

T = T ∩ X

olarak düşünüldüğünde, T kümesi $*$- kapalı ve X kümesi düzenli-açık bir küme olmak üzere T kümesi için kuvvetli-I-LC küme olma koşulu sağlandığından T, X' te kuvvetli-I-LC bir küme olur. Ayrıca, T ⊂ N ve N kümesi düzenli-açık bir küme olduğunda,

Int (T) ⊂ T

ve

$(Int(T))^{*} \subset T^{*}$

ve

$(Int(T))^{*} \subset T^{*}$

$\subset$ T ⊂ N

yazılabilir. Dolayısıyla T kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olur.Sonuç olarak, T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise T, X' te kuvvetli-I-LC bir küme, zayıf I_{rg} -kapalı bir küme ve yarı-I-açık bir küme olur.

(2→1):

T kümesi X' te kuvvetli-I-LC bir küme, zayıf I_{rg} -kapalı bir küme ve yarı-I-açık bir küme olsun. T kümesi yarı-I-açık bir küme ise,

T ⊂ cl^{*} (Int (T)) **(7.5)**

koşulu sağlanır. Ayrıca, T, X’ te kuvvetli I-LC bir küme olduğundan S düzenli-açık ve N $*$-kapalı bir küme olmak üzere,

T = S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Burada, N $*$-kapalı bir küme olduğundan,

cl^* (N) = N

yazılabilir. Böylece,

Int (N) ⊂ N

ve

cl^* (Int (N))

⊂ cl^* (N)

= N

olup

cl^* (Int (N))

⊂ N

elde ederiz. Buradan N $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir küme olur. O halde, S düzenli-açık ve N $\ddot{o}n_{I^*}$-kapalı bir küme olmak üzere

T = S ∩ N

olarak ifade edilebildiğinden T kümesi bir RP_I-küme olur. Buradan, Teorem 7.1 de yapılanlar da göz önüne alındığında T’ nin X’ in $\ddot{o}n_{I^*}$-kapalı bir kümesi olduğu elde edilecektir. Buradan,

cl^* (Int (T)) ⊂ T **(7.6)**

elde edilir.

Sonuç olarak (7.5) ve (7.6) gereği

T = cl^* (Int (T))

olup T, X’ te I-R kapalı bir alt küme olur.

Sonuç 7.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Teorem 7.1, Teorem 7.2 ve Teorem 7.3 de elde edilen bilgiler gereği aşağıdaki özellikler T kümesi için birbirine denktir.

(1) T, X’ in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X’te bir kuvvetli-I-LC küme, I_g-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt kümedir.

(3) T, X’ te bir kuvvetli-I-LC küme, I_{rg}-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt kümedir.

(4) T, X’ te kuvvetli-I-LC küme, zayıf I_{rg}-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt kümedir.

.

BÖLÜM 8

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA ön_I^*-SÜREKLİLİK, P_I^*C – SÜREKLİLİK, VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 8.1. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X' in ön_I^*-kapalı bir alt kümesi oluyor ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna ön_I^*-sürekli bir fonksiyon denir.

Tanım 8.2. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X' in hem ön_I^*-kapalı hem de ön_I^*-açık bir alt kümesi oluyor ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna P_I^*C – sürekli bir fonksiyon denir.

Tanım 8.3. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X' in bir RPC_I –kümesi oluyor ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna RPC_I –sürekli bir fonksiyon denir.

Tanım 8.4. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X' in zayıf I_{rg} –kapalı bir alt kümesi oluyor ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna WI_{rg}- sürekli bir fonksiyon denir.

Tanım 8.5. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X' in bir RP_I –kümesi oluyor ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna RP_I -sürekli bir fonksiyon denir.

Teorem 8.6. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ön_I^*-sürekli

(2) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RP_I –sürekli ve WI_{rg} – sürekli

İspat :

(1→2):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ $\ddot{o}n_{I^*}$-sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ $\ddot{o}n_I^*$-sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' in $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir alt kümesi olur. O halde, X düzenli-açık bir küme ve $f^{-1}(T)$, X' te $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir alt küme olmak üzere,

$f^{-1}(T) = f^{-1}(T) \cap X$

olarak ifade edilebileceğinden, $f^{-1}(T)$ kümesi bir RP_I –küme olur. Dolayısıyla Y uzayından alınan kapalı bir T kümesi için $f^{-1}(T)$ X uzayında bir RP_I –küme ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, RP_I –sürekli bir fonksiyon olur. Ayrıca, $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, $\ddot{o}n_I^*$-sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' te $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir alt kümedir. Buradan, $f^{-1}(T)$ kümesi zayıf I_{rg}–kapalı bir küme olur. Bu durumda Y uzayından alınan keyfi bir kapalı T kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X uzayında zayıf I_{rg}–kapalı bir küme olarak bulunduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu WI_{rg} – sürekli bir fonksiyon olur. Sonuç olarak, $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $\ddot{o}n_{I^*}$-sürekli bir fonksiyon ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ aynı zamanda RP_I –sürekli ve WI_{rg}– sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RP_I –sürekli ve WI_{rg}–sürekli bir fonksiyon olsun. Buradan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RP_I –sürekli ve WI_{rg}– sürekli bir fonksiyon ise Y uzayından alınan kapalı bir T kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X uzayında bir RP_I –küme ve zayıf I_{rg} –kapalı bir alt küme olur. Bu durumda, $f^{-1}(T)$, X in $\ddot{o}n_{I^*}$-kapalı bir alt kümesidir. Sonuç olarak, $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RP_I –sürekli ve WI_{rg}– sürekli bir fonksiyon ise Y uzayından alınan keyfi bir kapalı T kümesinin öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$, X uzayında $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir küme olduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu aynı zamanda $\ddot{o}n_I^*$-sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 8.7. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu P_I^*C–sürekli

(2) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RPC_I–sürekli ve $ön_I^*$-sürekli

İspat :

(1→2):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, P_I^*C–sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, P_I^*C–sürekli bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(T)$, X' in $ön_I^*$-açık ve $ön_I^*$-kapalı bir alt kümesi olur. O halde, X düzenli-açık bir küme olmak üzere,

$f^{-1}(T) = f^{-1}(T) \cap X$

olarak ifade edilebileceğinden, $f^{-1}(T)$ kümesi bir RPC_I –küme olur. Ayrıca $f^{-1}(T)$ kümesi $ön_I^*$-açık ve $ön_I^*$-kapalı bir küme ise, Y uzayından alınan kapalı bir T kümesi için, $f^{-1}(T)$, X' te $ön_I^*$-kapalı bir küme olduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu aynı zamanda $ön_I^*$-sürekli bir fonksiyon olur. Sonuç olarak $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, P_I^*C–sürekli bir fonksiyon ise aynı zamanda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ RPC_I –sürekli ve $ön_I^*$-sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, RPC_I –sürekli ve $ön_I^*$-sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun.$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ RPC_I–sürekli ve $ön_I^*$-sürekli bir fonksiyon ise, $f^{-1}(T)$, X' te bir RPC_I –küme ve $ön_I^*$-kapalı bir küme olur.

$f^{-1}(T)$ kümesi X' te bir RPC_I –küme olduğundan, S, X' te düzenli açık bir alt küme ve N, X' te $ön_I^*$-açık ve $ön_I^*$-kapalı bir alt küme olmak üzere,

$f^{-1}(T)$ =S ∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde,

$f^{-1}(T)$ =S ∩ N

$\subset S \cap Int^*(\text{cl}(N))$

=Int^* (S ∩ cl (N))

⊂Int^* (cl (S ∩ N))

=Int^* (cl ($f^{-1}(T)$))

elde edilir. Buradan,

$f^{-1}(T)$ =S ∩ N

⊂ Int^* (cl ($f^{-1}(T)$))

olur. Sonuç olarak,

$f^{-1}(T) \subset Int^*$ (cl ($f^{-1}(T)$))

sağlandığından

$f^{-1}(T)$ =S ∩ N

kümesi X’ in ön_I^*-açık bir alt kümesidir. $f^{-1}(T)$ kümesinin X’ in ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olduğu daha önce ifade edilmişti. O halde $f^{-1}(T)$ kümesi hem ön_I^*-kapalı hem de ön_I^*-açık bir küme olur. Bu durumda Y uzayında alınan kapalı her T kümesi için $f^{-1}(T)$ X’ te hem ön_I^*-kapalı hem de ön_I^*-açık bir küme olduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, $P_I^* C$ – sürekli bir fonksiyondur. Sonuç olarak $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RPC_I –sürekli ve ön_I^*-sürekli bir fonksiyon ise $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ aynı zamanda $P_I^* C$ – sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 8.8. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $P_I^* C$–sürekli

(2) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RPC_I –sürekli ve WI_{rg}-sürekli

İspat :

(1→2):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, $P_{I^*} C$–sürekli bir fonksiyon ve T, Y’ nin kapalı bir alt kümesi olsun.

Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, P_I^*C–sürekli bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(T)$, X' in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olur. O halde, X düzenli-açık bir küme olmak üzere,

$f^{-1}(T) = f^{-1}(T) \cap X$

olarak ifade edilebileceğinden $f^{-1}(T)$ kümesi bir RPC_I –küme olur. Ayrıca, $f^{-1}(T)$ ön_I^*-kapalı bir küme olduğundan zayıf I_{rg}- kapalı bir küme olur. O halde $f^{-1}(T)$, X' in ön_I^*-açık ve ön_I^*-kapalı bir alt kümesi ise $f^{-1}(T)$ hem bir RPC_I –küme hem de zayıf I_{rg}- kapalı bir küme olur. Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan her T kümesinin P_I^*C–sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında bir RPC_I –küme ve zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu hem RPC_I–sürekli hem de WI_{rg}–sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RPC_I–sürekli ve WI_{rg}–sürekli bir fonksiyon, T kümesi Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, RPC_I –sürekli ve WI_{rg}–sürekli bir fonksiyon olduğundan,$f^{-1}(T)$, X' te bir RPC_I –küme ve zayıf I_{rg}- kapalı bir alt küme olacaktır.

$f^{-1}(T)$ kümesi X' te bir RPC_I–küme ve zayıf I_{rg}- kapalı bir alt küme olduğundan dolayı $f^{-1}(T)$ kümesi X' in hem ön_I^*-açık hem de ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olur. Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan her T kümesinin RPC_I –sürekli ve WI_{rg}–sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında hem ön_I^*-açık hem de ön_I^*-kapalı bir alt küme olduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu P_I^*C–sürekli bir fonksiyondur.

Sonuç 8.9. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Teorem 8.7 ve Teorem 8.8 gereği $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu P_I^*C–sürekli

(2) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RPC_I–sürekli ve ön_I^*-sürekli

(3) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RPC_I–sürekli ve WI_{rg}-sürekli

BÖLÜM 9
İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
RC_I – KÜMELERİN ÖZELLİKLERİ

Teorem 9.1. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T ⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X' in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X' te bir RC_I-küme ve I_g-kapalı bir alt kümedir.

İspat :

(1→2): T, X' te I-R kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda,

T = cl^* (Int (T))

yazılabilir. O halde, X kümesi düzenli-açık ve T = cl^* (Int (T)) olmak üzere,

T=T ∩ X

olarak ifade edilebileceğinden T kümesi aynı zamanda bir RC_I-küme olur. Ayrıca T kümesi I-R kapalı bir küme ise aynı zamanda ∗- kapalı bir küme olur. Bu durumda T kümesi ∗- kapalı bir küme ise; T ⊂ N ve N, X' te açık bir küme olmak üzere,

T = cl^* (T) ⊂ N

yazılabilir. Buradan,

T ∪ T^* ⊂ N

olup,

T^* ⊂ N

olur. O halde, T kümesi I_g-kapalı bir kümedir. Sonuç olarak T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise aynı zamanda RC_I-küme ve I_g-kapalı bir alt kümedir.

(2→1):

T, X' te bir RC_I–küme ve I_g-kapalı bir alt küme olsun.

Bu durumda, RC_I–küme tanımı gereği, S, X' te düzenli-açık ve N= cl^* (Int(N)) olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Buradan N kümesi için,

N= cl^* (Int(N))

ise,

cl^* (Int(N)) ⊂ N

ve

N ⊂ cl^* (Int(N))

özellikleri sağlanır. Burada,

cl^* (Int(N)) ⊂ N

özelliği bize N kümesinin ön_I^*-kapalı bir küme olduğunu gösterir. O halde, S, X' te düzenli-açık ve N, X' te ön_I^*-kapalı bir küme olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde T X' te bir RP_I–küme olur. Ayrıca T, X' te bir RC_I –küme olduğundan, düzenli-açık bir S alt kümesi ve

N= cl^* (Int(N))

olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir.

Burada,

T

=S ∩ N

=S ∩ cl^* (Int(N))

⊂ cl^* (S ∩ Int(N))

= cl^* (Int(S ∩ N))

= cl^* (Int (T))

yazabiliriz.

Bu durumda

$T \subset cl^*$ (Int (T))

olur. O halde T, X' in yarı-I-açık bir alt kümesidir. Sonuç olarak T, X' te bir RC_I–küme ise T, X' te bir RP_I–küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur. Böylece T, X' te RP_I-küme, I_g-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur. T, X' te RP_I-küme, I_g-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olduğundan dolayı T, X' te I-R kapalı bir alt küme olur.

Teorem 9.2. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X' in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X' te bir RC_I-küme ve I_{rg}-kapalı bir alt kümedir.

İspat :

(1→2):

T, X' te I-R kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda,

T = cl^* (Int (T))

yazılabilir.

O halde, X kümesi düzenli-açık ve

T = cl^* (Int (T))

olmak üzere,

T=T ∩ X

olarak ifade edilebileceğinden T kümesi aynı zamanda bir RC_I-küme olur. Ayrıca T kümesi I-R kapalı bir küme olduğundan önceki teoremden T, X' in I_g-kapalı bir alt kümesidir. Bu durumda sonuç olarak, T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise aynı zamanda RC_I-küme ve I_{rg}-kapalı bir alt kümesi olur.

(2→1):

T, X' te bir RC_I –küme olsun. Bu durumda RC_I–küme tanımı gereği S, X' te düzenli-açık ve

N= cl^* (Int(N))

olmak üzere

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde T, X' te bir RP_I – küme olur. Ayrıca düzenli-açık bir S alt kümesi ve

N= cl^* (Int(N))

olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebildiğinden,

T ⊂ cl^* (Int (T))

olur. O halde T, X' in yarı-I-açık bir alt kümesidir. Sonuç olarak T, X' te bir RC_I –küme ise T, X' te bir RP_I–küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur. Böylece T, X' te RP_I-küme, I_{rg}-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur. Sonuç olarak,

T = cl^* (Int (T))

olup T, X' te I-R kapalı bir alt küme olur.

Teorem 9.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X' in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X' te bir RC_I-küme ve ön_I^*-kapalı bir alt kümedir.

İspat :

(1→2): T, X' te I-R kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda,

T = cl^* (Int (T))

yazılabilir.

O halde, X kümesi düzenli-açık ve

$T = cl^* (\text{Int}(T))$

olmak üzere,

$T = T \cap X$

olarak ifade edilebileceğinden T kümesi aynı zamanda bir RC_I-küme olur. Ayrıca T kümesi I-R kapalı bir küme ise $*$- kapalı bir küme olur. Bu durumda T kümesi $*$- kapalı bir küme ise;

$cl^* (T) = T$

özelliği sağlanır. Buradan,

$\text{Int}(T) \subset T$

olduğundan,

$cl^* (\text{Int}(T))$

$\subset cl^* (T)$

$= T$

ifadesi yazılabilir. Böylece,

$cl^* (\text{Int}(T)) \subset T$

ise T, X' in ön_I^*-kapalı bir alt kümesi olur. Sonuç olarak T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise aynı zamanda RC_I-küme ve ön_I^*-kapalı bir alt küme olur.

(2→ 1):

T, X' te bir RC_I- küme ve ön_I^*-kapalı bir alt küme olsun. T, X' te bir RC_I - küme olduğundan, düzenli-açık bir S alt kümesi ve

$N = cl^* (\text{Int}(N))$

olmak üzere,

$T = S \cap N$

olarak ifade edilebilir. Burada,

$T = S \cap N$

$= S \cap cl^* (\text{Int}(N))$

$\subset cl^* (S \cap \text{Int}(N))$

$= cl^* (\text{Int}(S \cap N))$

= cl^* (Int (T))

yazabiliriz. Bu durumda

T ⊂ cl^* (Int (T))

olur. O halde T, X’ in yarı-I-açık bir alt kümesidir. Böylece, T, X’ in yarı-I-açık bir alt kümesi ise,

T ⊂ cl^* (Int (T)) **(9.1)**

olur. Ayrıca, T, X’ in $\ddot{o}n_I^*$-kapalı bir alt kümesi olduğundan,

cl^* (Int (T)) ⊂ T **(9.2)**

elde edilir. Sonuç olarak, (9.1) ve (9.2) gereği

T = cl^* (Int (T))

olup T, X’ te I-R kapalı bir alt küme olur.

Teorem 9.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

(1) T, X’ in I-R kapalı bir alt kümesidir.

(2) T, X’ te bir RC_I-küme ve zayıf I_{rg}-kapalı bir alt kümedir.

İspat :

(1→2): T, X’ te I-R kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda,

T = cl^* (Int (T))

yazılabilir. O halde, X kümesi düzenli-açık ve

T = cl^* (Int (T))

olmak üzere,

T=T ∩ X

olarak ifade edilebileceğinden T kümesi aynı zamanda bir RC_I-küme olur. Ayrıca T kümesi I-R kapalı bir küme olduğundan ∗- kapalı bir kümedir. Bu durumda T kümesi ∗-kapalı bir küme ise T ⊂ N ve N, X’ te açık bir küme olmak üzere, T = cl^* (T) ⊂ N

yazılabilir. Buradan,

T ∪ T^* ⊂ N

olup,

T^* ⊂ N

olur. O halde T kümesi I_g-kapalı bir kümedir. Sonuç olarak, T, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise aynı zamanda RC_I-küme ve zayıf I_{rg}-kapalı bir alt kümesi olur.

(2→1):

T, X'te bir RC_I–küme olsun. Bu durumda RC_I –küme tanımı gereği S, X' te düzenli-açık ve

N= cl^* (Int(N))

olmak üzere

T=S ∩ N

olarak ifade edilebilir. O halde T, X' te bir RP_I– küme olur. Ayrıca düzenli-açık bir S alt kümesi ve

N= cl^* (Int(N))

olmak üzere,

T=S ∩ N

olarak ifade edilebildiğinden,

T

⊂ cl^* (Int (T))

olur. O halde T, X' in yarı-I-açık bir alt kümesidir. Sonuç olarak T, X' te bir RC_I –küme ise T, X' te bir RP_I –küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur. Böylece T, X' te RP_I-küme, zayıf I_{rg}-kapalı küme ve yarı-I-açık bir alt küme olur. Sonuç olarak T = cl^* (Int (T)) olup T, X' te I-R kapalı bir alt küme olur.

Sonuç 9.5. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve T⊂ X olsun. Teorem 9.1, Teorem 9.2, Teorem 9.3 ve Teorem 9.4 te elde edilen bilgiler gereği aşağıdaki özellikler T kümesi için birbirine denktir.

(1) T, X' in I-R kapalı bir alt kümesidir

(2) T, X' te bir RC_I –küme ve I_g-kapalı bir alt kümedir.

(3) T, X' te bir RC_I –küme ve I_{rg}-kapalı bir alt kümedir.

(4) T, X' te bir RC_I –küme ve ön_I^*-kapalı bir alt kümedir.

(5) T, X' te bir RC_I –küme ve zayıf I_{rg} –kapalı bir alt kümedir.

BÖLÜM 10
İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA RC_I –SÜREKLİLİK, I-R SÜREKLİLİK VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 10.1. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere Y' nin her kapalı T alt kümesi için, $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I–küme ise $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonuna RC_I–sürekli bir fonksiyon denir.

Tanım 10.2. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere Y' nin her kapalı T alt kümesi için, $f^{-1}(T)$ kümesi X' te bir kuvvetli I-LC küme ise $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonuna kuvvetli I-LC sürekli bir fonksiyon denir (Inthumathi ve ark., 2011).

Uyarı 10.3. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki diagram sağlanır.

$$\begin{tikzcd}
RC_I\text{ –sürekli} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{kuvvetli I-LC sürekli} \arrow[dl, Rightarrow, bend left] \\
RP_I\text{ –sürekli} & \\
RPC_I\text{ –sürekli} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Uyarı 10.4. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu için Uyarı 10.3 deki ifadelerin tersleri doğru değildir. Bu ifadelerin terslerinin doğru olmadığı bundan sonraki örneklerde gösterilmiştir.

Örnek 10.5. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f:(\mathrm{X},\tau,\mathrm{I}) \rightarrow (\mathrm{X},\ \tau)$ bir fonksiyon olmak üzere

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun.

$f(x) = w,$

$f(y) = z,$

$f(z) = y,$

$f(w) = w$

ile tanımlı $f:(\mathrm{X},\tau,\mathrm{I}) \rightarrow (\mathrm{X},\ \tau)$ fonksiyonu hem kuvvetli I-LC sürekli hem de RP_I –sürekli bir fonksiyondur. Fakat RPC_I –sürekli ve RC_I –sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 10.6. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $g:(\mathrm{X},\tau,\mathrm{I}) \rightarrow (\mathrm{X},\ \tau)$ bir fonksiyon olmak üzere

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun.

$g(x) = y,$

$g(y) = z,$

$g(z) = x,$

$g(w) = y$

ile tanımlı g: (X, τ, I) → (X, τ) fonksiyonu RP_I –sürekli fakat kuvvetli I-LC sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 10.7. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve h: (X, τ, I) → (X, τ) bir fonksiyon olmak üzere

X ={x, y, z, w }

τ ={ X, ∅, {x}, {y,z}, {x,y,z} } ve

I ={∅, {x}, {w}, {x,w} }

olsun.

$h(x) = y,$

$h(y) = x,$

$h(z) = z,$

$h(w) = z$

ile tanımlı h: (X, τ, I) → (X, τ) fonksiyonu RPC_I –sürekli bir fonksiyon fakat kuvvetli I-LC sürekli bir fonksiyon değildir.

Tanım 10.8. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve f: (X, τ, I) → (Y, σ) bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X uzayında yarı-I-açık bir alt küme oluyorsa f: (X, τ, I) → (Y, σ) fonksiyonuna ters-yarı-I-sürekli bir fonksiyondur denir (Mustafa, 2010).

Tanım 10.9. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve f: (X, τ, I) → (Y, σ) bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X uzayında I-R kapalı bir alt küme oluyorsa f: (X, τ, I) → (Y, σ) fonksiyonuna I-R sürekli bir fonksiyondur denir.

Tanım 10.10. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve f: (X, τ, I) → (Y, σ) bir fonksiyon olsun.

Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X uzayında I_{rg}-kapalı bir alt küme oluyorsa $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna I_{rg}-sürekli bir fonksiyondur denir (Inthumathi ve ark., 2011).

Tanım 10.11.(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Y' nin her kapalı T alt kümesi için $f^{-1}(T)$ kümesi X uzayında I_g-kapalı bir alt küme oluyorsa $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna I_g-sürekli bir fonksiyondur denir (Inthumathi ve ark., 2011).

Teorem 10.12.(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RC_I -sürekli

(2) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu kuvvetli-I-LC sürekli ve ters yarı-I-sürekli

İspat :

(1→2):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, RC_I –sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, RC_I–sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I–küme olur. Bu durumda, S, X' te düzenli-açık bir küme ve

N = cl^* (Int (N))

olmak üzere,

$f^{-1}(T)$ = S ∩ N

olarak ifade edilebilir. Böylece

N = cl^* (Int (N))

kümesi $*$-kapalı bir küme olduğundan, S, düzenli-açık ve N $*$-kapalı bir küme olmak üzere,

$f^{-1}(T)$ = S ∩ N

olarak yazılabilir. O halde $f^{-1}(T)$ kümesi kuvvetli-I-LC bir küme olur.

Ayrıca $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I –küme ise $f^{-1}(T)$, X' in yarı-I-açık bir alt kümesidir. Sonuç olarak, Y uzayında kapalı olan her T kümesinin RC_I –sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında hem yarı-I-açık hem de kuvvetli I-LC bir küme olarak bulunduğundan $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu kuvvetli-I-LC sürekli ve ters yarı-I-sürekli bir fonksiyondur.

(2→1):

$f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$, kuvvetli-I-LC sürekli ve ters yarı-I-sürekli bir fonksiyon olsun. T, Y uzayında kapalı bir alt küme olmak üzere $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu kuvvetli-I-LC sürekli ve ters yarı-I-sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X uzayında hem yarı-I-açık hem de kuvvetli I-LC bir küme olur. Bu durumda $f^{-1}(T)$, X uzayında hem yarı-I-açık hem de kuvvetli I-LC bir küme olduğundan dolayı $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I –küme olur. Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan her T kümesinin kuvvetli-I-LC sürekli ve ters yarı-I-sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$, X uzayında bir RC_I–küme olduğundan $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu RC_I –sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 10.13.(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu RC_I -sürekli

(2) $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu RP_I–sürekli ve ters yarı-I-sürekli

İspat :

(1→2):

$f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$, RC_I–sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f:(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\sigma)$ RC_I–sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I–küme olur. Böylece$f^{-1}(T)$ kümesi bir RP_I–küme olur. Ayrıca $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I–küme ise $f^{-1}(T)$, X' in yarı-I-açık bir alt kümesidir.

Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan her T kümesinin RC_I–sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında hem yarı-I-açık hem de bir RP_I–küme olarak bulunduğundan $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ters yarı-I-sürekli ve RP_I – sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RP_I–sürekli ve ters yarı-I-sürekli bir fonksiyon olsun. T, Y uzayında kapalı bir alt küme olmak üzere, $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RP_I–sürekli ve ters yarı-I-sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X uzayında hem yarı-I-açık hem de bir RP_I–küme olur. Bu durumda, $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I –küme olur. Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan he T kümesinin RP_I–sürekli ve ters yarı-I-sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$, X uzayında bir RC_I–küme olduğundan $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RC_I–sürekli bir fonksiyon olur.

Sonuç 10.14.(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Teorem 10.12 ve Teorem 10.13 gereği $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RC_I -sürekli

(2) $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu kuvvetli-I-LC sürekli ve ters yarı-I-sürekli

(3) $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RP_I -sürekli ve ters yarı-I-sürekli

Teorem 10.15.(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I R-sürekli

(2) $f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RC_I -sürekli ve I_g-sürekli

İspat :

(1→2):

$f: (X,\tau,I) \rightarrow (Y, \sigma)$, I R–sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun.

Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, I R–sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' te bir I-R kapalı bir alt küme olur. Böylece,

$f^{-1}(T) = cl^*$ (Int $(f^{-1}(T))$)

yazılabilir. O halde X kümesi düzenli-açık ve

$f^{-1}(T)$

$= cl^*$ (Int $(f^{-1}(T))$)

olmak üzere,

$f^{-1}(T)=f^{-1}(T) \cap X$

olarak ifade edilebileceğinden T kümesi aynı zamanda bir RC_I-küme olur. Ayrıca, $f^{-1}(T)$ kümesi I-R kapalı bir küme ise $f^{-1}(T)$ kümesi I_g-kapalı bir kümedir. Dolayısıyla $f^{-1}(T)$, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise aynı zamanda RC_I-küme ve I_g-kapalı bir alt kümedir. Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan her T kümesinin I R–sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında hem I_g-kapalı hem de bir RC_I–küme olarak bulunduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I_g-sürekli ve RC_I-sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, fonksiyonu I_g-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I_g-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I–küme ve I_g-kapalı bir alt küme olur. Böylece $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I–küme ve I_g-kapalı bir alt küme olduğundan dolayı $f^{-1}(T)$, X' te I-R kapalı bir alt küme olur. Sonuç olarak, Y uzayında kapalı olan her T kümesinin I_g-sürekli ve RC_I-sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında I-R kapalı bir alt küme olarak bulunduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I R–sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 10.16.(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu I R-sürekli

(2) $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu RC_I -sürekli ve I_{rg}-sürekli

İspat :

(1→2):

$f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$, I R–sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ I R–sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' te bir I-R kapalı bir alt küme olur. Böylece, $f^{-1}(T)$ X' in I-R kapalı bir alt kümesi olduğundan aynı zamanda RC_I-küme ve I_{rg}-kapalı bir alt kümedir. Sonuç olarak,Y uzayında kapalı olan her T kümesinin I R–sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında hem I_{rg}-kapalı hem de bir RC_I–küme olarak bulunduğundan $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu I_{rg}-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$, fonksiyonu I_{rg}-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu I_{rg}-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I –küme ve I_{rg}-kapalı bir alt küme olur. Böylece $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I –küme ve I_{rg}-kapalı bir alt küme olduğundan dolayı $f^{-1}(T)$, X' te I-R kapalı bir alt küme olur. Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan her T kümesinin I_{rg}-sürekli ve RC_I –sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında I-R kapalı bir alt küme olarak bulunduğundan

$f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu I R–sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 10.17.(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f\colon (\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I R-sürekli

(2) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RC_I -sürekli ve ön_I^*-sürekli

İspat :

(1→2):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, I R–sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, I R–sürekli bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(T)$, X' te bir I-R kapalı bir alt küme olur. Böylece $f^{-1}(T)$, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise aynı zamanda RC_I-küme ve ön_I^*-kapalı bir alt küme olur. Sonuç olarak, Y uzayında kapalı olan her T kümesinin I R–sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında hem ön_{I^*}-kapalı bir küme hem de bir RC_I –küme olarak bulunduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ön_I^*-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, fonksiyonu ö$n_{I^*}$-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ön_I^*-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I –küme ve ön_I^*-kapalı bir alt küme olur. Böylece, $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I $-$küme ve ön_I^*-kapalı bir alt küme olduğundan, $f^{-1}(T)$, X' te I-R kapalı bir alt küme olur. Sonuç olarak, Y uzayında kapalı olan her T kümesinin ön_I^*-sürekli ve RC_I –sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$, X uzayında I-R kapalı bir alt küme olarak bulunduğundan $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I R–sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 10.18. (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olmak üzere $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I R-sürekli

(2) $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu RC_I -sürekli ve WI_{rg}-sürekli

İspat :

(1→2):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, I R–sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, I R–sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(T)$, X' te bir I-R kapalı bir alt küme olur. Böylece,

$f^{-1}(T) = cl^*$ (Int($f^{-1}(T)$))

yazılabilir. O halde, X kümesi düzenli-açık ve

$f^{-1}(T) = cl^*$ (Int ($f^{-1}(T)$))

olmak üzere,

$f^{-1}(T)=f^{-1}(T) \cap X$

olarak ifade edilebileceğinden $f^{-1}(T)$ kümesi aynı zamanda bir RC_I-küme olur. Ayrıca $f^{-1}(T)$ kümesi I-R kapalı bir küme olduğundan $f^{-1}(T)$ kümesi zayıf I_{rg}-kapalı bir küme olur. Bu durumda $f^{-1}(T)$, X' in I-R kapalı bir alt kümesi ise aynı zamanda RC_I-küme ve zayıf I_{rg}-kapalı bir alt kümesi olur. Sonuç olarak Y uzayında kapalı olan her T kümesinin I R–sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında hem bir zayıf I_{rg}-kapalı küme hem de bir RC_I –küme olarak bulunduğundan, $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu WI_{rg}-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon olur.

(2→1):

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$, fonksiyonu WI_{rg}-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon ve T, Y' nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu WI_{rg}-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(T)$, X' te bir RC_I –küme ve zayıf I_{rg}-kapalı bir alt küme olur. Böylece , $f^{-1}(T)$, X' te I-R kapalı bir alt küme olur.

Sonuç olarak, Y uzayında kapalı olan her T kümesinin WI_{rg}-sürekli ve RC_I -sürekli bir fonksiyon altında öngörüntüsü olan $f^{-1}(T)$ X uzayında I-R kapalı bir alt küme olarak bulunduğundan $f:(\mathrm{X}, \tau, \mathrm{I}) \rightarrow (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu I R–sürekli bir fonksiyon olur.

KAYNAKLAR

Acikgoz A. ve Yuksel S., 2007. Some New Sets and Decompositions of A_{I-R}-continuity, α-I-continuity, Continuity Via Idealization, *Acta Math. Hungar*., 114 (1-2): 79-89.

Dontchev J. ve Ganster M., 1998. Codense Ideals, local I-compactness and Three Questions of Rose and Hamlett. *Questions Answers Gen. Topology 16*, (1): 37-40.

Dontchev J., Ganster M. ve Noiri T., 1999. Unified Operation Approach of Generalized Closed Sets Via Topological Ideals, *Math. Japonica*, 49: 395-401.

Dontchev J., Ganster M. ve Rose D., 1999b. Ideal Resolvability. *Topology Appl.*, 93, (1): 1-16.

Ekici E., 2011. On AC_I-sets, BC_I-sets, β_I^*-open Sets and Decompositions of Continuity in Ideal Topological Spaces, *Creat. Math. Inform.,* 20, (1): 47-54.

Ekici E. ve Özen S., 2013. A Generalized Class of τ^* in Ideal Spaces, *Filomat*, In press.

Hamlett T. R., Janković D. ve Rose D., 1991. Countable Compactness With Respect to An Ideal. *Math. Chronicle*, 20: 109-126.

Hatir E. ve Noiri T., 2002. On Decompositions of Continuity Via Idealization, *Acta Math. Hungar.,* 96: 341-349.

Inthumathi V., Krishnaprakash S. ve Rajamani M., 2011. Strongly-I-locally Closed Sets and Decompositions of $*$-continuity, *Acta Math. Hungar.*, 130 (4): 358-362.

Janković D. ve Hamlett T. R., 1990. New Topologies from Old Via Ideals, *Amer. Math. Monthly*, 97: 295-310.

Kuratowski K., 1966. Topology, Vol. I, NewYork, Academic Press.

Mukherjee M. N., Roy B. ve Sen R., 2007. On Extensions of Topological Spaces in terms of Ideals. *Topology Appl.* 154, (18): 3167-3172.

Mustafa J. M., 2010. Contra semi-I-continuous Functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 39 (2): 191-196.

Navaneethakrishnan M., Joseph J. P. ve Sivaraj D., 2009. I_g-normal and I_g-regular spaces, *Acta Math. Hungar.*, 125 (4): 327-340.

Stone M. H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, *TAMS*, 41: 375-381.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Özlem ELMALI

Doğum Yeri : İZMİR

Doğum Tarihi : 01.01.1985

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : İzmir Ege Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Doktora Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi :

ozlem_elmali@hotmail.com