T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

α. DERECEDEN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ YAKINSAKLIK TÜRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVCAN BULUT

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

ÇANAKKALE – 2022

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

α. DERECEDEN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ YAKINSAKLIK TÜRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVCAN BULUT

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

ÇANAKKALE – 2022

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Sevcan BULUT
10/08/2022

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca benimle akademiye dair her bilgisini paylaşıp tüm zorluklarla mücadelede beni hiçbir zaman yalnız bırakmamış olan saygı değer danışman hocam, Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR' a her şey için en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Lisans yaşamımda da yüksek lisans yaşamımda da tüm zorlukları benimle göğüsleyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Gökay KARABACAK' a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her evresinde bana destek olan değerli babam Aybaba BULUT ve en yakın arkadaşım olan abim Okan BULUT'a teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, hayatımın her evresinde tüm ihtiyaçlarıma ve isteklerime saygı duyup beni her zaman destekleyen hiçbir fedakarlıktan kaçınmadan kendim olma yolunda bana olan inancını ve güvenini bir an olsun kaybetmeden en büyük fırsat ve imkanı veren çok kıymetli annem Fatma BULUT'a sonsuz teşekkür ve minnetlerimi sunarım.

Sevcan Bulut

Çanakkale, Ağustos 2022

ÖZET

α. DERECEDEN BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ YAKINSAKLIK TÜRLERİ

Sevcan BULUT
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR
10/08/2022, 42

Bu tez çalışmasında ilk olarak, reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık, metrik uzaylarda ideal yakınsaklık ve normlu uzaylarda kaba yakınsaklık kavramları sunuldu. Ardından, kaba yakınsaklığın genelleştirmeleri olan kaba istatistiksel, kaba ideal ve kaba ideal istatistiksel yakınsaklık kavramları incelendi. Daha sonra, incelenen bu kavramların derecelendirmelerinden bahsedilerek α. dereceden kaba ideal istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden ideal istatistiksel sınırlılık kavramları tanıtıldı ve bu kavramların bazı temel özellikleri incelendi.

Anahtar sözcükler: İstatistiksel yakınsaklık, İdeal yakınsaklık, Kaba yakınsaklık, α. dereceden kaba istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden kaba ideal yakınsaklık, α. dereceden kaba ideal istatistiksel yakınsaklık

ABSTRACT

Some Generalized Convergence Types of Order α.

Sevcan BULUT
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Department of Mathematics
Advisor: Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR
08/10/2022, 42

This thesis, firstly, presents the concepts of statistical convergence in real number sequences, ideal convergence in metric spaces, and rough convergence in normed spaces. Afterwards, it defines the concepts of rough statistical convergence, rough ideal convergence and rough ideal statistical convergence. Later on, the concepts of rough statistical convergence of order α., rough ideal convergence of order α. has studied. Then, it defines the concepts of rough ıdeal statistical convergence of order α. and ıdeal statistical bounded of order α. In addition, it examines some basic properties of these concepts.

Keywords: Statistical convergence, Ideal convergence, Rough convergence, Rough statistical convergence of order α., Rough ideal convergence of order α., Rough ideal statistical convergence of order α.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$A \sim B$	A ile B kümesinin simetrik farkı sonlu
$\|A\|$	A kümesinin kardinalitesi
(X, d)	Metrik uzay
$(X, \\|.\\|)$	Normlu uzay
S	Tüm istatistiksel yakınsak diziler uzayı
Γ_x	(x_k) dizisinin tüm yığılma noktaları kümesi
Λ_x	(x_k) dizisinin tüm limit noktaları kümesi
$I-(\Lambda_x)$	(x_k) dizisinin tüm ideal limit noktaları kümesi
$I-(\Gamma_x)$	(x_k) dizisinin tüm ideal yığılma noktaları kümesi
$I-S(\Lambda_x)$	(x_k) dizisinin tüm ideal istatistiksel limit noktalarının kümesi
$I-S(\Gamma_x)$	(x_k) dizisinin tüm ideal istatistiksel yığılma noktalarının kümesi

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık, klasik anlamda yakınsaklığın doğal sayıların bir altkümesinin yoğunluğuna dayanan genelleştirmesidir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmıştır. Sonrasında, Schoenberg (1959) bu yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak incelemiştir. Temelde istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Salat (1980), Fridy (1985) ve Fridy ve Orhan (1997)'ın çalışmaları ile matematik literatürüne zenginlik kazandırılmıştır.

Kostryko vd. (2000) istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olan ve temeli keyfi bir $\mathbb{X}$ kümesinin altkümelerinin ideali kavramına dayanan ideal yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Daha sonra bu yakınsaklık türünün klasik yakınsaklıkta iyi bilinen kavram ve teoremleri sağlayıp sağlamadığını incelemişlerdir.

Pozitif lineer operatörlerin kümesinin istatistiksel yakınsaması ile ilişkili olarak Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından dereceye bağlı istatistiksel yakınsama kavramı tanıtılmıştır. Çolak (2010) yılında $\alpha.$ dereceden yoğunluk ve $\alpha.$ dereceden istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesini elde etmiştir. Daha sonra Das ve Savaş (2014) bu genelleştirmeyi ideale taşıyarak $\alpha.$ dereceden ideal istatistiksel yakınsamayı tanıtmışlardır. ($\alpha \in (0,1]$)

Phu (2001) sonlu boyutlu uzaylarda kaba yakınsaklık kavramını ortaya atmış ve kaba yakınsaklık ile diğer yakınsaklık türleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca, kaba yakınsaklığın en önemli ve anlamlı özellikleri olan kaba limit kümelerinin kapalılığı, sınırlılığı ve konveksliğini göstermiştir. Daha sonra Aytar (2008) kaba istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmış ve kaba istatistiksel limit noktaları ile kaba istatistiksel yığılma noktaları kavramlarını ve özelliklerini incelemiştir. Benzer şekilde kaba yakınsaklık kavramını ideal kavramı ile genişleten Pal vd. (2013) kaba ideal yakınsaklık kavramını geliştirmişler ve kaba $I-$ limit noktaları kümesini tanıtarak bu kümenin özelliklerini araştırmışlardır. Sonrasında Savaş vd. (2019) kaba ideal istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Kaba istatistiksel yakınsaklığın derecelendirmesi olan $\alpha.$ dereceden kaba istatistiksel yakınsaklık kavramı ve $\alpha.$ dereceden kaba istatistiksel limit noktaları kümesinin temel özellikleri Maity (2016) tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları ile bu kavramlara ilişkin bazı temel özellikler verildi. Üçüncü bölümde kaba yakınsaklık ve genelleştirmeleri ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verildi. Dördüncü bölümde, α. dereceden kaba ideal istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden ideal istatistiksel sınırlılık kavramları tanımlandı ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi. Sonuç ve öneriler bölümünde derecelendirme kavramının farklı dizi uzayları üzerinde çalışılabileceği ifade edildi.

İKİNCİ BÖLÜM
GENEL KAVRAMLAR

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde, yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları incelendi. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklık kavramının yoğunluk kavramıyla yakından ilişkili olan tanımına ve bir altdizisi yardımıyla karakterizasyonuna yer verildi. Bunlara ek olarak, istatistiksel Cauchy dizisi kavramı tanıtılarak reel sayılar uzayında istatistiksel yakınsaklık ile bu kavramın denk olduğu ifade edildi. Son olarak, istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktaları kavramlarına ve bu kavramların bazı temel özelliklerine ilişkin bilgilere yer verildi.

Tanım 2.1. (Freedman ve Sember, 1981) A ve B doğal sayıların iki alt kümesi olmak üzere $\delta_* : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ fonksiyonu

1. $A \sim B \Rightarrow \delta_*(A) = \delta_*(B)$

2. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \delta_*(A) + \delta_*(B) \leq \delta_*(A \cup B)$

3. $\delta_*(A) + \delta_*(B) \leq 1 + \delta_*(A \cap B)$

4. $\delta_*(\mathbb{N}) = 1$

özelliklerini sağlıyorsa δ_* fonksiyonuna alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu denir. Burada, $A \sim B$ ile A ile B kümelerinin simetrik farkının sonlu olduğu ifade edilmiştir.

Tanım 2.2. (Freedman ve Sember, 1981) $A \subset \mathbb{N}$ ve A^c, A nın tümleyeni olmak üzere

$$\delta^*(A) = 1 - \delta_*(A^c)$$

şeklinde tanımlı $\delta^* : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ fonksiyonuna üst asimptotik yoğunluk fonksiyonu denir.

Tanım 2.3. (Freedman ve Sember, 1981) δ_* ve δ^* sırasıyla alt ve üst asimptotik yoğunluk fonksiyonları olmak üzere her $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\delta_*(A) = \delta^*(A) = \delta(A)$$

olacak biçimdeki $\delta(A)$ ya A kümesinin yoğunluğu denir.

Örnek 2.4. $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere A kümesindeki x e eşit veya küçük pozitif tamsayıların kümesini $A(x)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$A = \{2, 4, 6, ...\}$$

şeklinde çift sayılardan oluşan bir A kümesi için

$$A(2) = \{2\}, \quad A(3) = \{2\}, \quad . \quad . \quad . \quad , A(7) = \{2, 4, 6\}, \quad A\left(\frac{17}{2}\right) = \{2, 4, 6, 8\} \quad (2.1)$$

dir. Dikkat edilecek olursa bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesi için $A(n)$ kümesinin eleman sayısı

$$|A(n)| = |\{k \in A : k \leq A\}|$$

şeklinde ifade edilir. Burada $|.|$ ile kümenin eleman sayısı gösterilmiştir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|k \in A : k \leq n|}{n}$$

limiti var ise bu limit A kümesinin yoğunluğunu verir.

Örnek 2.5. $A = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere

$$|A(n)| = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{n çift} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{n tek} \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n} = \frac{1}{2}$$

olur. Benzer şekilde

$$A = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}, B = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

olmak üzere $\delta(A) = \frac{1}{2}$, $\delta(B) = \frac{1}{2}$ ve $\delta(\mathbb{N}) = 1$ dir.

Örnek 2.6. $A = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ ise

$$|A(n)| = |\{k \in A : k \leq n\}| \leq \sqrt{n}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in A : k \leq n\}|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olduğundan A kümesinin yoğunluğu $\delta(A) = 0$ dır.

Sonuç 2.7. (Freedman ve Sember, 1981) Sonlu bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin yoğunluğu sıfırdır.

Tanım 2.8. (Niven, 1951) $k \in \mathbb{N}$ için $a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \ldots$ olmak üzere $A = (a_k)$ dizisinin alt yoğunluğu ve üst yoğunluğu sırasıyla

$$\delta_*(A) := \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

$$\delta_*(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer

$$\delta_*(A) = \delta^*(A)$$

ise $A = (a_k)$ dizisi bir yoğunluğa sahiptir denir ve $\frac{\|A\|}{n}$ dizisinin var olması halinde

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n}$$

ile gösterilir. Ayrıca (a_k) pozitif tamsayı dizisi ve $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere alt ve üst yoğunluk

$$\delta_*(A) = \liminf \frac{|A(k)|}{k} = \liminf \frac{k}{a_k}$$

$$\delta^*(A) = \limsup \frac{|A(k)|}{k} = \limsup \frac{k}{a_k}$$

olur. Böylece $\left(\frac{k}{a_k}\right)$ dizisinin limiti var ise

$$\delta(A) = \lim\left(\frac{k}{a_k}\right)$$

dir.

Örnek 2.9. (Freedman ve Sember, 1981) $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in A : k \leq n\}|}{n}$$

biçiminde tanımlanan δ bir yoğunluk fonksiyonudur.

Tanım 2.10. (Fast, 1951) (x_k) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

oluyorsa (x_k) dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsıyor denir ve $st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ biçiminde gösterilir. Ayrıca, tüm istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile tanımlanır.

Tanım 2.11. (Zygmund, 1939) $x = (x_k)$ dizisinin B sıfır yoğunluklu kümesi dışındaki tüm k indisleri bir P özelliğini sağlıyorsa, verilen (x_k) dizisi P özelliğini hemen her k için sağlıyor denir ve bu kısaca $h.h.k.$ şeklinde ifade edilir.

Ayrıca, (Fridy, 1985) çalışmasında istatistiksel yakınsaklık kavramını yoğunluk kavramı ile aşağıdaki biçimde tanımladı.

Tanım 2.12. (Fridy, 1985) (x_k) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa yani h.h.k için

$$|x_k - x_0| < \varepsilon$$

ise (x_k) dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsıyor denir.

Örnek 2.13.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 8, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi verilsin.

$$(x_k) = (1, 8, 8, 2, 8, 8, 8, 8, 3, 8, 8, ...)$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k : |x_k - 8| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, ...\}$$

olup, $st - \lim_{k\to\infty} x_k = 8$ dir.

İstatistiksel yakınsaklığın tanımından görüldüğü üzere eğer bir (x_k) dizisi bir $x \in \mathbb{R}$ elemanına istatistiksel anlamda yakınsıyorsa x_0 elemanının keyfi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz elemanı varken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinde bulunan elemanların yoğunluğu sıfır olmak şartıyla, yine sonsuz sayıda eleman bulunabilir. Yakınsaklıkta bir N_ε' dan sonraki tüm terimlerin x'in bir ε komşuluğuna düştüğünden bu komşuluk dışında kalan terimler sonlu sayıdadır ve yoğunluk tanımı gereği sonlu kümelerin yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Ancak, istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak olmadığı Örnek 2.15'ten görülür.

Örnek 2.14.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : x_k \neq 0\}|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Yani

$$st - \lim_{k\to\infty} x_k = 0$$

olur. Ancak, bu dizi yakınsak değildir.

Klasik anlamda yakınsaklık sınırlılığı gerektirirken istatistiksel yakınsaklık sınırlılığı gerektirmez. Dolayısıyla, istatistiksel yakınsaklık sınırsız ıraksak dizileri de limitleyebilir. Öte yandan, $(x_k) = ((-1)^k)$ dizisi sınırlı bir dizi olmasına rağmen istatistiksel yakınsak bir dizi değildir. Bu nedenle, tüm sınırlı dizilerin uzayı olan l_∞ ile S uzayı birbirini kapsamazlar. Ancak,

$$x_k := \begin{cases} 5, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan dizi ele alınırsa bu iki dizi uzayının arakesitinin boş olmadığı görülür.

Teorem 2.15. (Fridy, 1985) (x_k) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ oluyorsa x_0 sayısı teklikle belirlidir.

KANIT. Bir (x_k) dizisi verilsin. Bu dizi x_0 ve x_1 gibi iki farklı değere istatistiksel yakınsak olsun. $0 < \varepsilon < |\frac{x_0 - x_1}{2}|$ alalım.

$$A = \{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere (x_k), x_0 a istatistiksel yakınsak olduğundan A kümesinin yoğunluğu $\delta(A) = 0$ dır. Öte yandan $x = (x_k)$, x_1 e de istatistiksel yakınsak olduğundan,

$$B = \{k \leq n : |x_k - x_1| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu $\delta(B) = 0$ dır. $B' \subseteq A$ olduğundan $\delta(B') \leq \delta(A)$ olur. Bu ise $1 \leq 0$ demektir ki buradan çelişki elde edilir. O halde $x_0 = x_1$ dir. $\square$

Teorem 2.16. (Salat, 1980) (x_k) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. (x_k) dizisinin x_0 sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(A) = 1$ ve $\lim_{k_n \to \infty} x_{k_n} = x_0$ olacak biçimde bir

$$A = \{k_n : k_n < k_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır.

Lemma 2.17. (Salat, 1980) (x_k) ve (y_k) iki reel sayı dizisi ve x_0, y_0 ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $x_k \xrightarrow{st} x_0$ ve $y_k \xrightarrow{st} y_0$ ise

1. $cx_k \xrightarrow{st} cx_0$

2. $x_k + y_k \xrightarrow{st} x_0 + y_0$

biçimindedir.

KANIT. 1. Eğer, $c = 0$ ise

$$st - \lim_{k \to \infty} cx_k = c \text{ ve } st - \lim_{k \to \infty} x_k = 0$$

olur ve ispat aşikardır. Şimdi $c \neq 0$ ve $st - \lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ olsun. O halde, $B \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(B) = 0$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus B)$ için

$$|x_k - x_0| < \frac{\varepsilon}{c}$$

olacak biçimde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden her $k \in (\mathbb{N} \setminus B)$ ve her $k \geq k_0$ için

$$|cx_k - cx_0| = |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |cx_k - cx_0| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Yani $st - \lim_{k \to \infty} cx_k = cx_0$ dir.

2. $st-\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ ve $st-\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0$ olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ alalım.

$$st-\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k\leq n : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n} = 0$$

olur. Benzer biçimde,

$$st-\lim_{k\to\infty} y_k = y_0$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k\leq n : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n} = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \tfrac{|\{k\leq n: |x_k+y_k-(x_0+y_0)|\geq\varepsilon\}|}{n} &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{\left|\left\{k\leq n: |x_k-x_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n} + \lim_{n\to\infty} \tfrac{\left|\left\{k\leq n: |y_k-y_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n} \\ &\leq 0+0=0\end{aligned}$$

olur.

□

Tanım 2.18. (Fridy, 1985) (x_k) terimleri reel yada kompleks olan bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k\leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ise (x_k) dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.19. (Fridy, 1985) $(x_k), \mathbb{R}$ kümesinde bir dizi olsun. Aşağıdakiler denktir.

i. (x_k) istatistiksel yakınsaktır.

ii. (x_k) istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii. Hemen her k için $x_k = y_k$ olacak biçimde bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

Tanım 2.20. (Fridy, 1993) (x_k) bir reel sayı dizisi olmak üzere eğer

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > H\}) = 0$$

olacak biçimde bir $H \in \mathbb{R}$ varsa (x_k) dizisine istatistiksel sınırlı dizi denir.

Tanım 2.21. (Fridy, 1993) $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi, (x_{k_n}), (x_k) dizisinin bir alt dizisi ve $A = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer, $\delta(A) = 0$ ise $(x_{k_n}), (x_k)$ dizisinin zayıf (thin) alt dizisi olarak adlandırılır. Eğer, $\delta(A) \neq 0$ ise $(x_{k_n}), (x_k)$ dizisinin zayıf olmayan (nonthin) alt dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.22. (Fridy, 1993) Keyfi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_k) \subset \mathbb{R}$ dizisi verilsin. Eğer, (x_k) dizisinin λ'ya yakınsayan zayıf olmayan bir alt dizisi varsa λ'ya (x_k) dizisinin istatistiksel limit noktası denir ve (x_k) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x ile gösterilir.

Tanım 2.23. (Fridy, 1993) Keyfi bir $c \in \mathbb{R}$ ve $(x_k) \subset \mathbb{R}$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - c| < \varepsilon\}) \neq 0$$

oluyorsa, c sayısına (x_k) dizisinin bir istatistiksel yığılma noktası denir. İstatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_x şeklinde gösterilir.

Lemma 2.24. (Fridy, 1993) $x = (x_k)$ reel sayı dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ biçimindedir.

Lemma 2.25. (Fridy, 1993) $x = (x_k)$ reel sayı dizisi için Γ_x kapalı bir kümedir.

Örnek 2.26.

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \neq n^2 \\ 9, & k = n^2 \end{cases}$$

dizisi tanımlansın. O halde,

$$A = \{k_n \in \mathbb{N} : |x_{k_n} - 0| \geq \varepsilon\} = \{k_n \in \mathbb{N} : x_{k_n} \geq \varepsilon\} = \{k_n \in \mathbb{N} : x_{k_n} \neq 0\} = \left\{k \in \mathbb{N} : k^2 :\right\}$$

olmak üzere, $\delta(A) = 0$ dır. Yoğunluk tanımından

$$\delta\left(\left\{k_n \in \mathbb{N} : k_n \neq {k_n}^2\right\}\right) \neq 0$$

ve $\lim\limits_{k_n \to \infty} x_{k_n} = 0$ olduğundan (x_k) dizisinin istatistiksel limit noktası 0 dır. İstatistiksel yığılma noktaları kümesi tanımı gereği ayrıca 0 istatistiksel yığılma noktasıdır. Yani, $L_x = \{0, 1\}$, $\Lambda_x = \{0\}$ ve $\Gamma_x = \{0\}$ olur.

2.2. İdeal Yakınsaklık

Bu alt bölümde, (Kostryko vd., 2000) tarafından tanımlanan ve istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan ideal yakınsaklık kavramından ve onun temel özelliklerinden bahsedilmiştir.

Tanım 2.27. (Kostryko vd., 2000) $\mathbb{X}$ boştan farklı bir küme ve $I \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ olsun. Eğer,

1. $\emptyset \in I$
2. $T \in I$ ve $S \subset T$ ise, $S \in I$
3. $T, S \in I$ ise, $(T \cup S) \in I$

koşulları sağlanıyorsa I ailesine, $\mathbb{X}$ kümesi üzerinde ideal denir.

Tanım 2.28. (Kostryko vd., 2000) $I, \mathbb{X}$ üzerinde bir ideal olsun.

1. Eğer, $I \neq \emptyset$ ve $I \neq P(\mathbb{X})$ ise I ya aşikar olmayan (öz) ideal denir.
2. Eğer, I bir öz ideal ve $\{\{x\} : x \in \mathbb{X}\} \subseteq I$ oluyorsa I idealine bir uygun (admissible) ideal denir.

Tanım 2.29. (Kostryko vd., 2000) Boştan farklı $\mathbb{X}$ kümesi verilsin. Eğer, $\mathbb{X}$ kümesinin alt kümelerinin boştan başka bir $F \subseteq P(\mathbb{X})$ ailesi

1. $\emptyset \notin F$
2. $T, S \in F$ iken $T \cap S \in F$
3. $T \in F$ ve $S \subseteq T$ ise $S \in F$

koşullarını sağlıyorsa, F ailesine $\mathbb{X}$ kümesi üzerinde bir süzgeç denir.

Not 2.30. (Kostryko vd., 2000) $I \subseteq P(\mathbb{X})$ bir aşikar olmayan ideal olmak üzere,

$$F(I) = \{\mathbb{X} \setminus A : A \in I\}$$

kümesine I ideali ile ilişkili süzgeç denir.

Örnek 2.31. (Kostryko vd., 2000)

I. $\mathbb{N}$ kümesinin sonlu altkümelerinin sınıfı

$$I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu bir kümedir}\}$$

admissible idealdir. Gerçekten,

i. $\emptyset$ sonlu olduğundan $\emptyset \in I_f$

ii. $T, S \in I_f$ olsun. Sonlu iki kümenin birleşimleri sonlu olacağından $T \cup S$ sonlu olur. Yani, $T \cup S \in I_f$ dir.

iii. $T \in I_f$ ve $T \subset S$ olsun. Sonlu bir kümenin altkümeleri de sonlu olacağından $S \in I_f$ olur.

O halde, I_f, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bir admissible idealdir. $\mathbb{N}$ sayılabilir sonsuz olduğundan $\mathbb{N} \notin I_f$ olur. Dolayısıyla I_f, $\mathbb{N}$ kümesinde bir öz idealdir.

II. Benzer şekilde,

$$I_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

bir admissible idealdir.

Tanım 2.32. (Kostryko vd., 2000) $(\mathbb{X}, d)$ bir metrik uzay ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\} \in I$$

oluyorsa (x_k) dizisi x_0 sayısına ideal yakınsaktır (I-yakınsaktır) denir ve $I - \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ ile gösterilir.

Lemma 2.33. (Kostryko vd., 2000) Eğer, I sınıfı $\mathbb{X}$ uzayı üzerinde bir admissible ideal ise klasik yakınsaklık, $I-$ yakınsaklığı gerektirir.

Şimdi, $I-$ yakınsaklık kavramının bazı genel yakınsaklık aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını inceleyelim.
(S) Her sabit $\{x, x, ..., x, ...\}$ dizisi x noktasına yakınsar.
(H) Yakınsak her dizinin limiti tektir.
(F) Yakınsak dizinin her alt dizisi de yakınsaktır. Üstelik yakınsadığı nokta aynıdır.

Teorem 2.34. (Kostryko vd., 2000) $\mathbb{X}$ en az iki elemanlı bir küme ve $I \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ bir admissible ideal olsun. O halde

1. I- yakınsaklık (S) ve (H) aksiyomlarını sağlar.

2. Eğer, I bir sonsuz küme içeriyorsa $I-$ yakınsaklık (F) aksiyomunu sağlamaz.

Tanım 2.35. (Kostryko vd., 2000) $(\mathbb{X}, d)$ bir metrik uzay ve (x_k), $\mathbb{X}$ de bir dizi olsun.

1. $M \notin I$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_m} = x_0$ olacak biçimde bir $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ var ise x_0 elemanına (x_k) dizisinin $I-$ limit noktası,

2. Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : d(x_k, x_0) < \varepsilon\} \notin I$ oluyorsa x_0 elemanına (x_k) dizisinin $I-$ yığılma noktası denir.

Tüm $I-$ limit noktalarının kümesi $I(\Lambda_x)$ ile $I-$ yığılma noktalarının kümesi $I-(\Gamma_x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.36. (Kostryko vd., 2005) (x_k), $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun.

$$A = \{k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq H\} \in I$$

olacak biçimde en az bir H pozitif reel sayısı var ise (x_k) dizisine ideal sınırlıdır ($I-$ sınırlıdır) denir.

Tanım 2.37. (Das ve Savaş, 2011) (x_k) bir reel sayı dizisi, her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\}|}{n} \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa (x_k) dizisi x_0 elemanına ideal istatistiksel yakınsak (I- istatistiksel yakınsak) denir. Burada x_0 elemanına (x_k) dizisinin I- istatistiksel limiti denir ve $I - st - \lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ ile gösterilir.

Teorem 2.38. (Debnath ve Rakshit, 2018) Bir (x_k) dizisinin $I-$ istatistiksel limit noktası varsa, tektir.

KANIT. Kabul edelim ki (x_k) dizisi birbirinden farklı x_0 ve y_0 noktalarına I-istatistiksel yakınsak olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\}|}{n} \geq \delta\right\} \in I \tag{2.2}$$

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : d(x_k, y_0) \geq \varepsilon\}|}{n} \geq \delta\right\} \in I \tag{2.3}$$

dir. Öte yandan (2.2) ve (2.3) den

$$A_1 = \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\}|}{n} \leq \delta \right\} \in F(I)$$

ve

$$A_2 = \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : d(x_k, y_0) \geq \varepsilon\}|}{n} \leq \delta \right\} \in F(I)$$

olur. Bu yüzden $A_1 \cup A_2 \neq \emptyset$ ve $A_1 \cap A_2 \in F(I)$ olur. Şimdi

$$m \in A_1 \cap A_2 \text{ ve } \varepsilon = \frac{d(x_0, y_0)}{3} > 0$$

alalım.

$$\frac{|\{k \leq m : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\}|}{m} < \delta \text{ ve } \frac{|\{k \leq m : d(x_k, y_0) \geq \varepsilon\}|}{m} < \delta$$

olur. $k \leq m$ ve bir $\delta > 0$ değeri için $d(x_k, x_0) < \varepsilon$ ve $d(x_k, y_0) < \varepsilon$ olur. Bu durumda

$$\{k \leq m : d(x_k, x_0) < \varepsilon\} \cap \{k \leq m : d(x_k, y_0) < \varepsilon\} \neq \emptyset$$

dir. Bu ise x_0 ve y_0 ın komşuluklarının ayrık olması ile çelişir. Dolayısıyla (x_k) dizisinin $I-$ istatistiksel limit noktası tektir. □

Teorem 2.39. (Debnath ve Rakshit, 2018) Herhangi bir (x_k) dizisi için $st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ ise $I - st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ dır.

KANIT. Kabul edelim ki $st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $A(\varepsilon) = \{k \leq n : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi için $\delta(A) = 0$ dır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

dır. O halde, her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : d(x_k, x_0) \geq \varepsilon\}|}{n} \geq \delta \right\}$$

sonlu bir kümedir. Dolayısıyla, I idealine aittir. Bu durumda $I - st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ dır. □

Teorem 2.40. (Debnath ve Rakshit, 2018) $(x_k), \mathbb{X}$ te bir dizi ve I bir admissible ideal olmak üzere $I - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ ise $I - st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ dır.

Örnek 2.41. $I = I_f$ alalım ve (x_k) aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = n^2 \\ 1, & k \neq n^2 \end{cases}$$

$I - st - \lim_{k\to\infty} x_k = 1$ dir. Ancak (x_k) dizisi $I-$ yakınsak bir dizi değildir.

Şimdi istatistiksel ve ideal yakınsak dizi uzaylarının, toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olduğunu ifade ettiğimiz teoremi $I-$ istatistiksel yakınsak dizi uzayları içinde ifade edelim.

Teorem 2.42. (Debnath ve Rakshit, 2018) Herhangi iki $(x_k), (y_k)$ dizileri alındığında;

1. $I - st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $I - st - \lim_{k\to\infty} cx_k = cx_0$.
2. $I - st - \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ ve $I - st - \lim_{k\to\infty} y_k = y_0$ ise $I - st - \lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = x_0 + y_0$ dır.

Tanım 2.43. (Debnath ve Rakshit, 2018) (x_k) bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k\| > H\}|}{n} > \varepsilon \right\} \in I$$

şartını sağlayan H sayısı bulunabiliyorsa (x_k) reel sayı dizisine ideal istatistiksel sınırlı dizi denir.

Tanım 2.44. Debnath ve Rakshit (2018) $x = (x_k)$ dizisi verilmiş olsun. $M \notin I$ ve $st - \lim_{k_m\to\infty} x_{k_m} = x_0$ olacak biçimde bir $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ var ise x_0 elemanına x dizisinin $I-$ istatistiksel limit noktası denir. Bir x dizisinin tüm I istatistiksel limit noktalarının kümesi $I - S(\Lambda_x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.45. (Debnath ve Rakshit, 2018) $x = (x_k)$ dizisi verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - c\| \geq \varepsilon\}|}{n} < \delta \right\} \notin I$$

oluyorsa $c \in \mathbb{X}$ noktasına x dizisinin $I-$ istatistiksel yığılma noktası denir. Bir x dizisinin tüm I- istatistiksel yığılma noktalarının kümesi $I - S(\Gamma_x)$ şeklinde gösterilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

KABA YAKINSAKLIK

Bu alt bölümde klasik yakınsaklığın farklı bir genelleştirmesi olan ve Phu tarafından 2001 yılında sonlu boyutlu uzaylarda tanımlanan kaba yakınsaklık kavramı incelenmiştir.

Tanım 3.1. (Phu, 2001) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay, $r \geq 0$ ve $x = (x_k), \mathbb{X}$ te bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $k \geq k_\varepsilon$ olmak üzere

$$\|x_k - x_0\| < r + \varepsilon$$

şartını sağlayan en az bir $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa veya

$$\lim_{k\to\infty} \sup \|x_k - x_0\| \leq r$$

oluyorsa x dizisi x_0 elemanına kaba yakınsaktır ($r-$ yakınsaktır) denir ve $x_k \xrightarrow{r} x_0$ ile gösterilir. Tanımdaki x_0 elemanına x dizisinin $r-$ limit noktası denir. Tüm $r-$ limit noktalarının kümesi LIM_x^r ile gösterilir. Buradaki r, kabalık derecesi olarak adlandırılır, $r = 0$ olduğu durumda klasik anlamda yakınsaklık elde edilir.

Kaba yakınsaklığın ortaya çıkış nedenini şu şekilde açıklayabiliriz: Bir x_0 noktasına yakınsak olduğu öngörülen bir (y_k) dizisinin terimleri kesin olarak belirlenemeyebilir (yani, ölçülemeyebilir ya da hesaplanamayabilir). Terimleri kesin belirlenemeyen dizinin yerine, işlemleri kolaylaştıracak ve terimleri bilinen bir (x_k) yaklaşım dizisinden yararlanılabilir. (x_k) yaklaşım dizisi her k için $\|x_k - y_k\| \leq r$ olacak şekilde belirlenir. Burada $r > 0$ sayısı, yaklaşım hatasının bir üst sınırıdır. (x_k) dizisi klasik anlamda x_0 noktasına yakınsak değildir. Fakat

$$\|x_k - x_0\| \leq \|x_k - y_k\| + \|y_k - x_0\| \leq r + \|y_k - x_0\|$$

olduğundan (x_k) dizisi x_0 noktasına $r-$ yakınsaktır.

Örnek 3.2. $x = (x_k) \subset \mathbb{R}$ ve $x_k = (-1)^k$ dizisi verilsin. $(-1)^k$ dizisi klasik anlamda yakınsak bir dizi değildir. Ancak, her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_k - x_0| < r + \varepsilon$$

olacak biçimde $r > 0$ bulunabilirse dizi kaba yakınsak olur. Şimdi,

$$|x_k - x_0| < r + \varepsilon \Rightarrow -r - \varepsilon + x_k < x_0 < r + \varepsilon + x_k$$

$(x_k) = (-1)^k$ dizisinin (x_{2k}) ve (x_{2k-1}) şeklinde iki alt dizisini alalım. $x = (x_{2k}) = (1, 1, 1, ...)$ olur ve her $\varepsilon > 0$ için

$$-r - \varepsilon < 1 - x_0 < r + \varepsilon \Rightarrow 1 - r - \varepsilon < x_0 < 1 + r + \varepsilon \Rightarrow x_0 \in [1 - r, 1 + r]$$

olur ve $x = (x_{2k-1}) = (-1, -1, -1, ...)$ olur ve her $\varepsilon > 0$ için

$$-r - \varepsilon < -1 - x_0 < r + \varepsilon \Rightarrow -1 - r - \varepsilon < x_0 < -1 + r + \varepsilon \Rightarrow x_0 \in [-1 - r, -1 + r]$$

elde edilir. Böylece

$$LIM_x^r = \begin{cases} \emptyset, & r < 1 \\ [1 - r, r - 1], & r \geq 1 \end{cases}$$

olur ki bu durumda dizi kaba yakınsaktır.

Sonuç 3.3. (Phu, 2001) $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olmak üzere $LIM_x^r \neq \emptyset$ ise

$$LIM_x^r = \left[\lim_{k\to\infty} \sup x_k - r, \lim_{k\to\infty} \inf x_k + r\right]$$

dir.

3.1. Kaba Limit Kümesinin Bazı Özellikleri

Kaba yakınsaklık, klasik anlamda yakınsaklıktan farklı olarak bir dizinin yakınsadığı noktanın tek olmasını gerektirmez. Bu sebeple kaba yakınsaklıkta dizinin kaba yakınsadığı noktaların kümesinin yani LIM_x^r kümesinin topolojik bazı özelliklerini incelemek önemlidir. Bundan dolayı bu alt bölümde söz konusu özellikler incelenmiştir.

Teorem 3.4. (Phu, 2001) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. Bu durumda $diam(LIM_x^r) \leq 2r$ dir. Üstelik, daha küçük bir üst sınır yoktur.

Klasik anlamda yakınsak dizilerin sınırlı olma özelliğinin kaba yakınsaklık için ifadesi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.5. (Phu, 2001) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. (x_k) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $r \geq 0$ için $LIM_x^r \neq \emptyset$ olmasıdır. Ayrıca sınırlı bir (x_k) dizisi pozitif her r reel sayısı için

$$LIM_{x_{k_n}}^r \neq \emptyset$$

özelliğini sağlayan (x_{k_n}) alt dizisini içerir.

Teorem 3.6. (Phu, 2001) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve (x_k), $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. $(x_{k_n}) \subset (x_k)$ ise $LIM_{x_k}^r \subset LIM_{x_{k_n}}^r$ dır.

Teorem 3.7. (Phu, 2001) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. (x_k) dizisinin LIM_x^r kümesi kapalı bir kümedir.

Teorem 3.8. (Phu, 2001) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. (x_k) dizisinin LIM_x^r kümesi konveks bir kümedir.

3.2. Kaba Yakınsaklığın Diğer Yakınsaklık Türleri ile İlişkisi

Tanım 3.9. (Aytar, 2008) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay, $r \geq 0$ ve (x_k), $\mathbb{X}$' de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

veya

$$st - \limsup_{k \to \infty} \|x_k - x_0\| \leq r$$

oluyorsa (x_k) dizisi x_0 sayısına kaba istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_k \xrightarrow{r-st} x_0$ biçiminde gösterilir.

Teorem 3.10. (Aytar, 2008) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. Bu durumda $diam(st - LIM_x^r) \leq 2r$ dir. Üstelik, daha küçük bir üst sınır yoktur.

KANIT. Kabul edelim ki $diam(st - LIM_x^r) > 2r$ olsun. O halde $\|y - z\| > 2r$ olacak biçimde $y, z \in st - LIM_x^r$ vardır. $\varepsilon = \left(0, \frac{\|y-z\|}{2} - r\right)$ seçelim. $y, z \in st - LIM_x^r$ olduğundan

$$K_1 = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y\| \geq r + \varepsilon\}$$

$$K_2 = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - z\| \geq r + \varepsilon\}$$

olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\delta(K_1) = 0$ ve $\delta(K_2) = 0$ olur. Doğal yoğunluk özelliklerini kullanarak $\delta(K_1^c \cap K_2^c) = 1$ olduğunu görebiliriz. Bu yüzden her $k \in K_1^c \cap K_2^c$ için

$$\|y - z\| \leq \|x_k - y\| + \|x_k - z\| < 2(r + \varepsilon) = \|y - z\|$$

elde ederiz ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır.

Şimdi teoremin ikinci kısmı için, $st - \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ olacak biçimde bir $x = (x_k)$ dizisi verilmiş olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yazılır. Böylece

$$y \in \bar{B}_r(x_0) = \{y \in \mathbb{X} : \|y - x_0\| \leq r\}$$

için

$$\|x_k - y\| \leq \|x_k - x_0\| + \|x_0 - y\| \leq \|x_k - x_0\| + r$$

elde edilir. Bu durumda

$$k \in \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| < \varepsilon\}$$

için

$$\|x_k - y\| < r + \varepsilon$$

olur. (x_k) dizisi x_0 elemanına istatistiksel yakınsak olduğundan,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| < \varepsilon\}) = 1$$

elde edilir. Böylece $y \in st - LIM_x^r$ dir. Sonuç olarak

$$st - LIM_x^r = \bar{B}_r(x_0)$$

dır. $diam(\bar{B}_r(x_0)) = 2r$ olduğu için bu genel olarak $st - LIM_x^r$ kümesinin çapının $2r$ üst sınırının her zaman azalmayacağını gösterir. □

Sonuç 3.11. (Aytar, 2008) $x = (x_k)$ dizisi sınırlıysa $st - LIM_x^r \neq \emptyset$ olacak biçimde bir r pozitif reel sayısı vardır.

Teorem 3.12. (Aytar, 2008) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_k), \mathbb{X}$' de bir dizi olsun. (x_k) dizisi istatistiksel sınırlıdır ancak ve ancak $st - LIM_x^r \neq \emptyset$ olacak biçimde bir r pozitif reel sayısı vardır.

KANIT. Kabul edelim ki $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel sınırlı olsun. O halde $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k\| \geq H\}) = 0$ olacak biçimde bir H pozitif reel sayısı vardır. Öncelikle $K := \{k \in \mathbb{N} : \|x_n\| \geq H\}$ olmak üzere $r_1 := \sup\{\|x_k\| : k \in K^c\}$ olsun. O halde $st - LIM_x^{r_1}$ kümesi $\mathbb{X}$ nin orijinini içerir. Bu durumda $st - LIM_x^{r_1} \neq \emptyset$ olur. Eğer, bazı r' ler için $st - LIM_x^r \neq \emptyset$ olursa $x_0 \in st - LIM_x^r$ olacak biçimde en az bir x_0 var demektir. Yani, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

olur. O halde hemen her k için (x_k) yarıçapı r'den büyük olmayan yuvarlar tarafından kapsanır. Yani, $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel sınırlı bir dizidir. □

Teorem 3.13. (Aytar, 2008) $x_0 = (x_{k_n})$, $x = (x_k)$ nin zayıf olmayan bir altdizisi ise $st - LIM_x^r \subseteq st - LIM_{x_0}^r$.

Teorem 3.14. (Aytar, 2008) Kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi kapalı bir kümedir.

KANIT. Eğer, $st - LIM_x^r = \emptyset$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur. Kabul edelim ki $st - LIM_x^r \neq \emptyset$ olsun. O halde $k \to \infty$ iken $y_k \to y_0$ ve $(y_k) \subset st - LIM_x^r$ olacak biçimde bir (y_k) dizisi seçebiliriz. Eğer, $y_0 \in st - LIM_x^r$ olduğunu gösterirsek ispat biter.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $y_k \to y_0$ olduğundan öyle bir $k_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ vardır ki her $k > k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ için

$$\|y_k - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. Şimdi $k_0 > k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ seçersek,

$$\|y_{k_0} - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Diğer yandan, $(y_k) \subset st - LIM_x^r$ olduğundan $y_{k_0} \in st - LIM_x^r$ olur ve

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_{k_0}\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0 \tag{3.1}$$

olur. Şimdi aşağıdaki kapsamanın sağlandığını gösterelim.

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_0\| < r + \varepsilon\} \supseteq \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_{k_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{3.2}$$

$n \in \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_{k_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ alalım. O halde $\|x_n - y_{k_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}$ olur ve bu yüzden

$$\|x_n - y_0\| \leq \|x_n - y_{k_0}\| + \|y_{k_0} - y_0\| < r + \varepsilon$$

olur yani (3.2) sağlanır. Bu durumda (3.1) den (3.2) nin sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğu 1 olur ki bu sol tarafındaki kümenin de doğal yoğunluğunun 1 olması demektir. O halde

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_0\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

dır. □

Teorem 3.15. (Aytar, 2008) Bir dizinin kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi konvekstir.

KANIT. Kabul edelim ki $y_0, y_1 \in st - LIM_x^r$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$K_1 := \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_0\| \geq r + \varepsilon\}$$

$$K_2 := \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_1\| \geq r + \varepsilon\}$$

tanımlansın. $y_0, y_1 \in st-LIM_x^r$ olduğundan $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$ dır. Bu yüzden, her $k \in K_1^c \cap K_2^c$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\|x_k - [(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1]\| = \|(1-\lambda)(x_k - y_0) + \lambda(x_k - y_1)\| < r + \varepsilon$$

olur. $\delta(K_1^c \cap K_2^c) = 1$ olduğundan

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - [(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1]\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

olur. Bu durumda $[(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1] \in st-LIM_x^r$ dır. □

Teorem 3.16. (Aytar, 2008) $r \geq 0$ olmak üzere (x_k) dizisi x_0 elemanına kaba istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $st-\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| \leq r$ olacak biçimde (y_k) dizisi mevcuttur.

KANIT. $(\Rightarrow:)$ $x_k \xrightarrow{r-st} x_0$ olsun. O halde,

$$st-\limsup_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| \leq r \tag{3.3}$$

$y = (y_k)$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$y_k := \begin{cases} x_0, & \|x_k - x_0\| \leq r \\ x_k + r\frac{x_0 - x_k}{\|x_k - x_0\|}, & d.d. \end{cases}$$

O halde,

$$\|y_k - y_0\| = \begin{cases} 0, & \|x_k - x_0\| \leq r \\ \|x_k - x_0\| - r, & d.d. \end{cases}$$

yazabiliriz ve (y_k) dizisinin tanımı gereği her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_k - y_k\| \leq r \tag{3.4}$$

olur. (3.4) den ve (y_k) dizisinin tanımından

$$st - \lim_{k \to \infty} \sup \|y_k - x_0\| = 0$$

olur ve bu $st - \lim_{k \to \infty} y_k = x_0$ demektir.

$(:\Leftarrow)$ $st - \lim_{k \to \infty} y_k = x_0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - x_0\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olur.

$$\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - x_0\| \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}$$

Yukarıdaki kapsamadan ve $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - x_0\| \geq \varepsilon\}) = 0$ olduğundan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$ dır. □

Önerme 3.17. (Aytar, 2008) Herhangi bir $c \in \Gamma_x$ ve $x_0 \in st - LIM_x^r$ için $\|x_0 - c\| \leq r$ dir.

KANIT. Kabul edelim ki $x_0 \in st - LIM_x^r$ için $\|x_0 - c\| > r$ olacak biçimde bir $c \in \Gamma_x$ olsun ve $\varepsilon = \frac{\|x_0 - c\| - r}{3}$ şekilde tanımlansın. O halde

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - c\| < \varepsilon\} \tag{3.5}$$

$c \in \Gamma_x$ olduğundan, $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - c\| < \varepsilon\}) \neq 0$ dır. (3.5) kapsamasından $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$ olur ki bu kabulümüz ile yani $x_0 \in st - LIM_x^r$ olması ile çelişir. □

Tanım 3.18. (Pal vd., 2013) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay, $r \geq 0$ ve $x = (x_k)$,$\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\} \in I$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi x_0 elemanına kaba ideal yakınsaktır denir ve $x_k \xrightarrow{r-I} x_0$ biçiminde ifade edilir ve x dizisinin kaba ideal limit noktaları kümesini $I - LIM_x^r$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.19. (Pal vd., 2013) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. Bu durumda $diam(I - LIM_x^r) \leq 2r$ dir. Üstelik, daha küçük bir üst sınır yoktur.

Teorem 3.20. (Pal vd., 2013) Bir $x = (x_k)$ dizisi $I-$ sınırlıdır ancak ve ancak $I - LIM_x^r \neq \emptyset$ olacak biçimde bir r pozitif reel sayısı vardır.

Teorem 3.21. (Pal vd., 2013) Bir $x = (x_k)$ dizisinin kaba ideal limit noktalarının kümesi $I - LIM_x^r$ kapalı bir kümedir.

Teorem 3.22. (Pal vd., 2013) Bir $x = (x_k)$ dizisinin kaba ideal limit noktalarının kümesi $I - LIM_x^r$ konveks bir kümedir.

Teorem 3.23. (Pal vd., 2013) $r \geq 0$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi x_0 a kaba ideal yakınsaktır ancak ve ancak $I - \lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| \leq r$ olacak biçimde $y = (y_k)$ dizisi mevcuttur.

Önerme 3.24. (Pal vd., 2013) Herhangi bir $c \in \Gamma_x(I)$ ve her $x_0 \in I - LIM_x^r$ için $\|x_0 - c\| \leq r$ dir.

Tanım 3.25. (Savaş vd., 2019) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay, $r \geq 0$ ve $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n} \geq \delta \right\} \in I$$

koşulu sağlanıyorsa x dizisi x_0 elemanına kaba ideal istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_k \xrightarrow{r-I-st} x_0$ ile gösterilir ve x dizisinin kaba ideal istatistiksel limit kümesini $I - st - LIM_x^r$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.26. (Savaş vd., 2019) Bir $x = (x_k)$ dizisi için $diam(I - st - LIM_x^r) \leq 2r$ dir. Genel anlamda $diam(I - st - LIM_x^r)$ en küçük sınıra sahip değildir.

Teorem 3.27. (Savaş vd., 2019) Bir $x = (x_k)$ dizisi I-istatistiksel sınırlıdır ancak ve ancak $I - st - LIM_x^r \neq \emptyset$ olacak biçimde bir r pozitif reel sayısı vardır.

Teorem 3.28. (Savaş vd., 2019) Bir $x = (x_k)$ dizisinin kaba ideal istatistiksel limit kümesi $I - st - LIM_x^r$ kapalı bir kümedir.

Teorem 3.29. (Savaş vd., 2019) Bir $x = (x_k)$ dizisinin kaba ideal istatistiksel limit noktalarının kümesi $I - st - LIM_x^r$ konveks bir kümedir.

Teorem 3.30. (Savaş vd., 2019) $r \geq 0$ olmak üzere, $x = (x_k)$ dizisi x_0 elemanına kaba ideal istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $I - st - \lim_{k \to \infty} y_k = x_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| \leq r$ olacak biçimde $y = (y_k)$ dizisi mevcuttur.

Teorem 3.31. (Savaş vd., 2019) Herhangi bir $c \in I - S(\Gamma_x)$ ve $x_0 \in I - st - LIM_x^r$ için $\|x_0 - c\| \leq r$ dir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

α. DERECEDEN YAKINSAKLIK

4.1. α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1. (Çolak, 2010) $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere bir $B \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin α. yoğunluğu,

$$\delta_\alpha(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \le n : k \in B\}|}{n^\alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.2. (Çolak, 2010) $B \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer, $0 < \alpha \le \beta \le 1$ eşitsizliği sağlanıyorsa $\delta_\beta(B) \le \delta_\alpha(B)$ olur.

KANIT. Kabul edelim ki $0 < \alpha \le \beta \le 1$ olsun. $n^\alpha \le n^\beta$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^\beta} \le \frac{1}{n^\alpha}$ olur. O halde

$$\frac{|\{k \le n : k \in B\}|}{n^\beta} \le \frac{|\{k \le n : k \in B\}|}{n^\alpha}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $\delta_\beta(B) \le \delta_\alpha(B)$ olduğu görülür. □

Tanım 4.3. (Çolak, 2010) $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $K = |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - x_0| \ge \varepsilon\}|$ kümesinin α. yoğunluğu 0 oluyorsa yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \le n : |x_k - x_0| \ge \varepsilon\}|}{n^\alpha} = 0$$

ise (x_k) dizisi x_0 reel sayısına α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim^\alpha x_k = x_0$ ile gösterilir.

Teorem 4.4. (Çolak, 2010) $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ reel sayı dizileri ve $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere,

1. $st - \lim^\alpha x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $st - \lim^\alpha cx_k = cx_0$ dır.

2. $st - \lim^\alpha x_k = x_0$ ve $st - \lim^\alpha y_k = y_0$ ise $st - \lim^\alpha (x_k + y_k) = x_0 + y_0$ dır.

KANIT. 1. $c=0$ için ispat açıktır. Kabul edelim ki, $c\neq 0$ olsun. $st-\lim^{\alpha} x_k = x_0$ olduğundan, her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|}{n^{\alpha}}=0$$

dır. Aynı zamanda,

$$\frac{|\{k\leq n:|cx_k-cx_0|\geq\varepsilon\}|}{n^{\alpha}}\leq\frac{\left|\left\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|}{n^{\alpha}}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\leq n:|cx_k-cx_0|\geq\varepsilon\}|}{n^{\alpha}}=0$$

dır.

2. Benzer şekilde her $\varepsilon>0$ için,

$$\frac{|\{k\leq n:|x_k+y_k-(x_0+y_0)|\geq\varepsilon\}|}{n^{\alpha}}\leq\frac{\left|\left\{k\leq n:|x_k-x_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n^{\alpha}}+\frac{\left|\left\{k\leq n:|y_k-y_0|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n^{\alpha}}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\leq n:|x_k+y_k-(x_0+y_0)|\geq\varepsilon\}|}{n^{\alpha}}=0$$

dır.

□

Teorem 4.5. (Çolak, 2010) $x=(x_k)$ bir reel sayı dizisi ve $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $st-\lim^{\alpha} x_k = x_0$ olsun. O halde $x=(x_k)$ dizisinin $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$ olacak biçimde bir $y=(y_k)$ alt dizisi vardır.

4.2. α. Dereceden İdeal İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.6. (Das ve Savaş, 2014) $(x_k), \mathbb{X}$'de bir dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için;

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon| \geq \delta\}|}{n^{\alpha}} \right\} \in I$$

oluyorsa (x_n) dizisi x_0 sayısına α. dereceden I-istatistiksel yakınsaktır denir ve $I - st - \lim_x^{\alpha} = x_0$ ile gösterilir. α. dereceden I-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S(I)^{\alpha}$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.7. (Das ve Savaş, 2014) $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere $S(I)^{\alpha} \subset S(I)^{\beta}$ olması için en az bir $k \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\alpha < \frac{1}{k} < \beta$ ve $I = I_f$ dir.

KANIT. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. O halde,

$$\frac{|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|}{n^{\beta}} \leq \frac{|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|}{n^{\alpha}}$$

ve her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|}{n^{\beta}} \geq \delta \right\} \subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|}{n^{\alpha}} \geq \delta \right\}$$

olur. Buradan sağ taraftaki küme I idealine aitse açıktır ki sol taraftaki kümede I idealine aittir ve bu $S(I)^{\alpha} \subset S(I)^{\beta}$ olduğunu gösterir. Sonucun sadece bahsedilen koşullara uyan α ve β lar için geçerli olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki diziyi inceleyelim,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = j^n, j \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq j^n, j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$I = I_f$ olmak üzere $I - st - \lim^{\beta} x_k = 0$ yani $x \in S(I)^{\beta}$ dır fakat $x \notin S(I)^{\alpha}$ dır. □

Sonuç 4.8. (Das ve Savaş, 2014) Eğer, bir dizi bir x_0 elemanına α. dereceden ideal istatistiksel yakınsak ise bu dizi x_0 elemanına ideal istatistiksel yakınsaktır.

4.3. α. Dereceden Kaba İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.9. (Maity, 2016) $(\mathbb{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi ve $r \geq 0 \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} = 0$$

oluyorsa x dizisi $x_0 \in \mathbb{R}$ elemanına α. dereceden kaba istatistiksel yakınsaktır denir ve $x \xrightarrow{st-r^\alpha} x_0$ şeklinde gösterilir. Herhangi bir x dizisinin α. dereceden kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi $st - LIM_x^{r\alpha}$ ile gösterilir.

Tanım 4.10. (Maity, 2016) $x = (x_k), \mathbb{X}$' de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : \|x_k\| \geq H\}|}{n^\alpha} = 0$$

olacak biçimde bir H pozitif reel sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisi α. dereceden istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 4.11. (Maity, 2016) $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$'de bir dizi olmak üzere x dizisi α. dereceden istatistiksel sınırlıdır ancak ve ancak $st - LIM_x^{r\alpha} \neq \emptyset$ olacak biçimde bir r pozitif reel sayısı vardır.

KANIT. Kabul edelim ki $x = (x_k)$ dizisi α. dereceden istatistiksel sınırlı olsun. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|\{k \leq n : \|x_k\| \geq H\}| = 0$ olacak biçimde bir H pozitif reel sayısı vardır. Şimdi bir r_1 tanımlayalım. Öncelikle $K := \{k \in \mathbb{N} : \|x_k\| \geq H\}$ olmak üzere $r_1 := \sup\{\|x_k\| : k \in K^c\}$ olsun. O halde $st - LIM_x^{r\alpha}$ kümesi $\mathbb{X}$ in orijinini içerir. Bu durumda $st - LIM_x^{r\alpha} \neq \emptyset$ olur. Eğer, bazı r'ler için $st - LIM_x^{r\alpha} \neq \emptyset$ olursa $x_0 \in st - LIM_x^{r\alpha}$ olacak biçimde en az bir x_0 var demektir. Yani, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} = 0$$

olur. O halde hemen her (x_k) yarıçapı r' den büyük olmayan yuvarlar tarafından kapsanır. Yani $x = (x_k)$ dizisi α. dereceden istatistiksel sınırlıdır. $\square$

Teorem 4.12. (Maity, 2016) $st-LIM_x^{r\alpha}$, x dizisinin α. dereceden kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi kapalı bir kümedir.

KANIT. Eğer, $st-LIM_x^{r\alpha}=\emptyset$ ise ispat açıktır. Kabul edelim ki $st-LIM_x^{r\alpha}\neq\emptyset$ olsun. O halde $k\to\infty$ iken $y_k\to y_0$ ve $(y_k)\subset st-LIM_x^{r\alpha}$ olacak biçimde bir (y_k) dizisi seçebiliriz. Eğer, $y_0\in st-LIM_x^{r\alpha}$ olduğunu gösterirsek ispat biter.

$\varepsilon>0$ verilsin. $y_k\to y_0$ olduğundan öyle bir $k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ vardır ki her $k>k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ için

$$\|y_k-y_0\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Şimdi $k_0>k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olacak şekilde bir $k_0\in\mathbb{N}$ seçersek,

$$\|y_{k_0}-y_0\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Diğer yandan, $(y_k)\subset st-LIM_x^{r\alpha}$ olduğundan $y_{k_0}\in st-LIM_x^{r\alpha}$ olur ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\leq n:\|x_k-y_{k_0}\|\geq r+\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n^\alpha}=0 \tag{4.1}$$

olur. Şimdi aşağıdaki kapsamanın sağlandığını gösterelim.

$$\left\{k\leq n:\|x_k-y_{k_0}\|<r+\frac{\varepsilon}{2}\right\}\subseteq\{k\leq n:\|x_k-y_0\|<r+\varepsilon\} \tag{4.2}$$

$t\in\left\{k\leq n:\|x_k-y_{k_0}\|<r+\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ alalım. O halde $\|x_t-y_{k_0}\|<r+\frac{\varepsilon}{2}$ olur. Bu yüzden,

$$\|x_t-y_0\|\leq\|x_t-y_{k_0}\|+\|y_{k_0}-y_0\|<r+\varepsilon \tag{4.3}$$

olur ki (4.2) kapsaması sağlanır. Bu durumda (4.1) den (4.2) nin sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğu 1 olur ki bu sol tarafındaki kümenin doğal yoğunluğunun da 1 olması demektir. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\leq n:\|x_k-y_0\|\geq r+\varepsilon\}|}{n^\alpha}=0$$

dır. □

Teorem 4.13. (Maity, 2016) $st-LIM_x^{r\alpha}$, x dizisinin α. dereceden kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi konvekstir.

KANIT. Kabul edelim ki $y_1, y_2 \in st-LIM_x^{r\alpha}$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$K_1 := \{k \leq n : \|x_k - y_1\| \geq r+\varepsilon\}$$

$$K_2 := \{k \leq n : \|x_k - y_2\| \geq r+\varepsilon\}$$

tanımlansın. $y_1, y_2 \in st-LIM_x^{r\alpha}$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|K_1| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|K_2| = 0$ dır. Bu yüzden her $k \in K_1^c \cap K_2^c$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\|x_k - [(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2]\| = \|(1-\lambda)(x_k - y_1) + \lambda(x_k - y_2)\| < r+\varepsilon$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|K_1^c \cap K_2^c| = 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : \|x_k - [(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2]\| \geq r+\varepsilon\}|}{n^\alpha} = 0$$

olur. Bu durumda $[(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \in st-LIM_x^{r\alpha}$ olur ve ispat biter. □

Teorem 4.14. (Maity, 2016) $r > 0$ olmak üzere, $x = (x_k)$ dizisi x_0 elemanına α. dereceden kaba istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $st-LIM_y^{r\alpha} = x_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| \leq r$ olacak biçimde $y = (y_k)$ dizisi mevcuttur.

Teorem 4.15. (Maity, 2016) Γ_x, tüm kaba istatistiksel yığılma noktalarının kümesi olmak üzere keyfi bir $c \in \Gamma_x$ ve $x_0 \in st-LIM_x^{r\alpha}$ için $\|x_0 - c\| \leq r$ olacak biçimde bir r pozitif reel sayısı vardır.

BEŞİNCİ BÖLÜM

α. DERECEDEN KABA İDEAL İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 5.1. $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} \geq \delta \right\} \in I, \alpha \in (0,1]$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi x_0 noktasına α. dereceden kaba ideal istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_k \xrightarrow{I_{st} - r\alpha} x_0$ ile gösterilir. α. dereceden kaba ideal istatistiksel limit noktalarının kümesi $I - st - LIM_x^{r\alpha}$ ile gösterilir.

Tanım 5.2. $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k\| > H\}|}{n^\alpha} > \delta \right\} \in I$$

olacak biçimde bir H reel sayısı mevcutsa $x = (x_k)$ dizisine α. dereceden istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 5.3. $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$ normlu uzayında bir dizi olsun. x dizisi α. dereceden istatistiksel sınırlıdır ancak ve ancak $I - st - LIM_x^{r\alpha} \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $r \geq 0$ reel sayısı vardır.

KANIT. ($\Rightarrow$:) Kabul edelim ki $x = (x_k)$ α. dereceden $I-$ istatistiksel sınırlı dizi olsun. O halde,

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k\| > H\}|}{n^\alpha} > \delta \right\} \in I$$

olacak biçimde bir H reel sayısı vardır. $r_1 := \sup\{\|x_t\| : t \in \mathbb{N}\}$ olsun. $I - st - LIM_x^{r_1\alpha}$, $\mathbb{X}$'in orijinini içerdiğinden $I - st - LIM_x^{r\alpha} \neq \emptyset$ dir.

($\Leftarrow$:) Kabul edelim ki herhangi bir $r \geq 0$ için $I - st - LIM_x^{r\alpha} \neq \emptyset$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} > \delta \right\} \in I$$

olacak biçimde bir $x_0 \in I - st - LIM_x^{r\alpha}$ vardır. Burada $\varepsilon = \|x_0\|$ seçersek, her $\delta > 0$ ve $H = r + \|x_0\|$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq H\}|}{n^\alpha} > \delta \right\} \in I$$

olur. Bu yüzden, (x_k) dizisi α. dereceden $I-$ istatistiksel sınırlıdır. □

Teorem 5.4. $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$ normlu uzayında bir dizi olsun. $I - st - LIM_x^{r\alpha}$ kümesi kapalıdır.

KANIT. $I - st - LIM_x^{r\alpha} = \emptyset$ ise ispat açıktır. Kabul edelim ki $I - st - LIM_x^{r\alpha} \neq \emptyset$ ve $n \to \infty$ iken $y_n \to x_0$ olacak biçimde bir $(y_n) \subseteq I - st - LIM_x^{r\alpha}$ dizisi var olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için $n > n_\varepsilon$ olacak biçimde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\|y_n - x_0\| < \varepsilon$ dur. Şimdi $n_0 \in \mathbb{N}$, $y_{n_0} \in (y_n) \subseteq I - st - LIM_x^{r\alpha}$ seçelim. Bu durumda,

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{\left|\{k \leq n : \|x_k - y_{n_0}\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\}\right|}{n^\alpha} < \delta \right\} \in F(I)$$

olur. $t \in A$ alırsak,

$$\frac{\left|\{k \leq t : \|x_k - y_{n_0}\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\}\right|}{t^\alpha} < \delta$$

olur. Maksimum $k \leq t$ için $\|x_k - y_{n_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}$ ve keyfi bir $n_0 > n_\varepsilon$ için,

$$\|x_k - x_0\| \leq \|x_k - y_{n_0}\| + \|y_{n_0} - x_0\| < r + \varepsilon$$

olur ve maksimum $k \leq t \in A$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} < \delta \right\} \in I$$

olur. Bu yüzden $x_0 \in I - st - LIM_x^{r\alpha}$ dir. Sonuç olarak $I - st - LIM_x^{r\alpha}$ kapalı bir kümedir. □

Teorem 5.5. $x = (x_k)$, $\mathbb{X}$ normlu uzayında bir dizi olsun. $I - st - LIM_x^{r\alpha}$ kümesi konvekstir.

KANIT. Kabul edelim ki $y_0, y_1 \in I - st - LIM_x^{r\alpha}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - y_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} \geq \delta \right\} \in I$$

$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - y_1\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} \geq \delta \right\} \in I$$

olur. Şimdi $F(I)$ dan $S = \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$ sonlu kümesini alalım, $s \in S$ için

$$B_1 = \{k \leq s : \|x_k - y_0\| \geq r + \varepsilon\} \text{ ve } B_2 = \{k \leq s : \|x_k - y_1\| \geq r + \varepsilon\}$$

olsun. Burada, $\lim_{n\to\infty} \frac{|B_1|}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{|B_2|}{n^\alpha} = 0$ dır. Her $k \in B_1^c \cap B_2^c$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\|x_k - ((1-\lambda)y_0 + \lambda y_1)\| = \|(1-\lambda)(x_k - y_0) + \lambda(x_k - y_1)\| < r + \varepsilon$$

ve $\lim_{n\to\infty} \frac{|B_1^c \cap B_2^c|}{n^\alpha} = 1$ olur. Bu yüzden,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - ((1-\lambda)y_0 + \lambda y_1)\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} < \delta \right\} \supseteq S \in F(I)$$

olur ki sonuç olarak $I - st - LIM_x^{r\alpha}$ konvekstir. □

Teorem 5.6. Keyfi bir $b \in I - S(\Gamma_x)$ ve $x_0 \in I - st - LIM_x^{r\alpha}$ için $\|x_0 - b\| \leq r$ olacak biçimde bir r pozitif reel sayısı vardır.

KANIT. Kabul edelim ki $\|x_0 - b\| > r$ olacak biçimde $b \in I - S(\Gamma_x)$ ve $x_0 \in I - st - LIM_x^{r\alpha}$ var olsun. $\varepsilon = \frac{\|x_0 - b\| - r}{2}$ olsun. O halde,

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - b\| \geq \varepsilon\}|}{n^\alpha} < \delta \right\} \notin I$$

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^\alpha} \geq \delta \right\} \in I$$

olur. A kümesinden bir t elemanı alırsak, $\frac{|\{k \leq t : \|x_k - b\| \geq \varepsilon\}|}{t^\alpha} < \delta$ olur. Maksimum $k \leq t$ için

$\|x_k - b\| < \varepsilon$ olur. Bu yüzden $k \leq t \in A$ için,

$$\|x_k - x_0\| \geq \|x_0 - b\| - \|x_k - b\| > r + \varepsilon$$

olur ve bu $A \subseteq B$ anlamına gelir ki bu da $B \notin I$ olması demektir. Sonuç olarak çelişkiye varırız. O halde her $x_0 \in I - st - LIM_x^{r\alpha}$ ve $b \in I - S(\Gamma_x)$ için $\|x_0 - b\| \leq r$ demektir. □

Teorem 5.7. $r \geq 0$ olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisi x_0 elemanına α. dereceden $I-$ istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $I - st - LIM_y^{\alpha} = x_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| \leq r$ olacak biçimde $y = (y_k)$ dizisi mevcuttur.

KANIT. ($\Leftarrow$:) Kabul edelim ki $I - st - LIM_y^{\alpha} = x_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| \leq r$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için,

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|y_k - x_0\| \geq \varepsilon\}|}{n^{\alpha}} < \delta \right\} \in I$$

olur. Ayrıca,

$$\|x_k - x_0\| \leq \|x_k - y_k\| + \|y_k - x_0\| < r + \varepsilon, k \leq s \in A^c$$

dir. Bu yüzden,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^{\alpha}} < \delta \right\} \supseteq A^c \in F(I)$$

O halde, $x = (x_k)$ dizisi x_0 elemanına α. dereceden kaba $I-$ istatistiksel yakınsaktır.
($\Rightarrow$:) Kabul edelim ki $I - st - LIM_x^{r\alpha} = x_0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|x_k - x_0\| \geq r + \varepsilon\}|}{n^{\alpha}} > \delta \right\} \in I$$

olur. Şimdi $y = (y_k)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$y_k = \begin{cases} x_0, & \|x_k - x_0\| \leq r \\ x_k + r\frac{x_0 - x_k}{\|x_k - x_0\|}, & d.d. \end{cases}$$

Aşağıdaki eşitsizlikler,

$$\|y_k - x_0\| \leq \begin{cases} 0, & \|x_k - x_0\| \leq r \\ \|x_k - x_0\|, & d.d. \end{cases}$$

ve

$$\|x_k - y_k\| \leq r$$

sağlanır. Bu sebeple,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{|\{k \leq n : \|y_k - x_0\| \geq \varepsilon\}|}{n^{\alpha}} > \delta \right\} \in I$$

olur. Sonuç olarak $I - st - LIM_y^{\alpha} = x_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| \leq r$ dir. □

ALTINCI BÖLÜM
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, α. dereceden kaba ideal istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve α. dereceden kaba ideal istatistiksel yakınsak dizilerin limit noktalarının kümesinin bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bazı teoremlerin ispatlarında kullanılmak üzere α. dereceden istatistiksel sınırlılık kavramı tanıtılmıştır.

Daha sonraki çalışmalarda, derecelendirilmiş kaba istatistiksel, ideal istatistiksel ve kaba ideal istatistiksel yakınsama kavramları çift indisli diziler, bulanık sayı dizileri gibi farklı dizi uzayları üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Aytar, S. (2008). “Rough statistical convergence”. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29 (3-4), 291–303. https://doi.org/10.1080/01630560802001064

Çolak, R. (2010). “Statistical convergence of order α”. *New Delphi: M. Mursaleen*.

Das, P. ve Savaş, E. (2011). “A generalized statistical convergence via ideals”. *Applied Mathematic Letters*, 24, 2103–2108.

Das, P. ve Savaş, E. (2014). “On I-statistical and I-lacunary statistical convergence of Order $Alpha$”. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 40, 459–472.

Debnath, S. ve Rakshit, D. (2018). “On I-statistical convergence”. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 13, 101–109.

Fast, H. (1951). “Sur la convergence statistique”. *Colloquium Mathematicum*, 2, 241–244.

Freedman, A. R. ve Sember, J. J. (1981). “Densities and summability”. *Pacific Journal of Mathematics*, 95, 293–305.

Fridy, J. A. (1985). “On statistical convergence”. Analysis, 5, 301–313.

Fridy, J. A. (1993). “Statistical limit points”. *Proc Amer Math Soc.*, 118, 1187–1192.

Fridy, J. A. ve Orhan, C. (1997). “Statistical limit superior and limit inferior”. *Proc Amer Math Soc.*, 125, 3625–3631.

Gadjiev, A.D.,Orhan, C. (2002). “Some approximation theorems via statistical convergence”. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 32(1), 129–138.

Kostryko, P., Salat, T. ve Wilczynski, W. (2000) “I-convergence”. *Real Analysis Exchange*, 26, 669–686.

Kostryko, P., Macaj, M., Salat, T., Sleziak, M. (2005). “I- convergence and extremal I limit”. *Points, Math.*, 55 (2005), 443–464.

Maity, M. (2016). “A note on rough statistical convergence of order α”. https://doi.org/10.48550/arXiv.1603.00183.

Niven, I. (1951) “The asymptotic density of sequences”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57, 6, 420–434.

Pal, S. K., Chandra, D. ve Dutta, S. (2013). “Rough Ideal Convergence”. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42 (6), 633–640.

Phu, H.X. (2001). “Rough Convergence in Normed Linear Spaces”. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 22, 199–222.

Salat, T. (1980). “On statistically convergent sequences of real numbers”. *Math. Slovaca*, 30, 139–150.

Savaş, E., Debnath, S. ve Rakshit, D. (2019). “On I-statisticaly rough convergence”. *Publications De L’institut Matematique*, 105 (119), 145–150.

Schoenberg, J. (1951). “The integrability of certain functions and related summability methods”. *The American Mathematical Monthly*, 66, 361–375.

Steinhaus, H. (1951). “Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique”. *Colloquium Mathematicum*, 2, 73–74.

Zygmund, A. (1939). “Trigonometrical series”. *Warsaw: M. L. Gostekhizdat.*