T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARIGRUP ÇEŞİTLERİNDE YARIASALLIĞIN KAYNAĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASİE MEKERA

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL

ÇANAKKALE – 2022

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARIGRUP ÇEŞİTLERİNDE YARIASALLIĞIN KAYNAĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASİE MEKERA

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL

ÇANAKKALE – 2022

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Rasie MEKERA
26/01/2022

TEŞEKKÜR

Tezimi gerçekleştirdiğim süre boyunca bana destek çıkan, tüm zorluklara rağmen elimi hiç bırakmayan ve yardımlarını bir an olsun esirgemeyen çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL'e, eğitim hayatım boyunca beni akademik hayata hazırlayan hocalarıma, arkadaşlarıma ve her anımda yanımda olan, beni destekleyen değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi borç bilirim.

Rasie MEKERA

Çanakkale, Ocak 2022

ÖZET

YARIGRUP ÇEŞİTLERİNDE YARIASALLIĞIN KAYNAĞI

Rasie MEKERA
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Didem YEŞİL
26/01/2022, 54

Bu çalışmada, verilen çeşitli S yarıgrupları için $S_S = \{a \in S \mid aSa = (0)\}$ biçiminde tanımlanan yarıasallığın kaynağı kümesinin bazı özellikleri incelenecektir. Bu çalışmanın amacı, matematiğin ve özellikle cebirin önemli konularından biri olan yarıgrup teorisinde elde edilecek genellemeler ve bağlantılar ile problemlere etkili çözümler getirmektir. Ayrıca bu konunun yarıgrup çeşitlerinde araştırılması hem literatüre yeni tanım ve problemler ekleyecek hem de halka teorisi ile yarıgrup teorisi arasında ilişkiler kurulmasına yardımcı olacaktır.

Anahtar sözcükler: Yarıasal Yarıgup, İndirgenmiş Yarıgrup, İdempotent Yarıgrup, Sıfır Bölensiz Yarıgrup, Tersinir Yarıgrup, Tamamen Regüler Yarıgrup

ABSTRACT

THE SOURCE OF SEMIPRIMENESS ON SEMIGROUP TYPES

Rasie MEKERA
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Mathematics
Advisor: Asst. Prof. Dr. Didem YEŞİL
01/26/2022, 54

In this study, some properties of the source set of semiprimeness defined as $S_S = \{a \in S \mid aSa = (0)\}$ for the types semigroups S will be examined. The aim of this study is to get effective solutions to problems with generalizations and connections to be obtained in semigroup theory which is one of the important subjects of mathematics and especially algebra. In addition, investigating this subject in semigroup types will both add new definitions and theorems to the literature, and help establish the relationships between ring theory and semigroup theory.

Keywords: Semiprime Semigroup, Reduced Semigroup, Idempotent Semigroup, Non-zero Divisor Semigroup, Inverse Semigroup , Completely Regular Semigroup

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\emptyset$	Boş küme
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$-$	Fark
$\times$	Kartezyen çarpım
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\Rightarrow$	İse
$\forall$	Her
$\subseteq$	Altkümesi veya eşit
$\nsubseteq$	Altkümesi değil
(0)	Sıfır kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	mod n tamsayılarının kümesi
$\overline{a}$	a nın denklik sınıflarının kümesi
S	Yarıgrup
$\sqrt{S}$	S yarıgrubunun asal radikali
κ	Rees Kongrüans
T_X	Tam Transformasyon yarıgrup
$C(P)$	P nin S yarıgrubundaki tümleyeni
S_S	S yarıgrubunun yarıasallığın kaynağı

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Halkalarda yarıasallık ve yarıasal halkaların özellikleri , halka teoride uzun yıllardır çalışılmakta olan ve güncelliğini koruyan bir çalışma alanıdır. Konuyla ilgili pek çok kitap ve makale yayınlanmıştır. Benzer olarak yarıgruplarda asal ve yarıasal idealler ve yarıgrupların yarıasallığı da önemli bir çalışma alanıdır. Bu konulardaki kaynakların ışığında yarıasallığın kaynağı tanımlanmış ve özellikleri incelenmeye başlanmıştır. Bu konunun yarıgruplara uyarlanması hem literatüre yeni tanım ve teoremler ekleyecek, hem de halka teorisi ile yarıgrup teori arasında ilişki kurulmasına yardımcı olacaktır. Bu konunun incelenmesi yarıgrup teoriye önemli katkılar sağlayacaktır. Bu bağlamda yarıasallık ile yapılan temel çalışmalar aşağıda belirtilmiştir. Bu çalışmaların ışığında yeni bulgular elde edilmeye çalışılacaktır.

Camcı K. D, 2017. Halkalarda Yarıasallığın Kaynağı ve Çarpımsal (Genelleştirilmiş) Türevler, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi.

Aydın N., Demir Ç., Camcı K. D. 2018. The Source of Semiprimeness of Rings, Commun. Korean Math. Soc., 33(4):1083-1096.

McCoy N. H., 1964. The Theory of Rings. The Macmillan Co.

Howie J. M., 1976. An Introduction to Semigroup Theory. L.M.S. Monographs, No. 7. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York.

Grillet P. A., 1995. Semigroups: An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker Inc.

Ahsan J., Zhongkui L., 2001. Prime and Semiprime Acts over Monoids with Zero, Math. J., Ibaraki Univ., 33:9-15.

Shabir M., Kanwal N., 2007. Prime Bi-ideals of Semigroups, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 31: 757-764.

Grimble H., B., 1950. Prime Ideals in Semigroups, The University of Tennessee,

Thesis.

Gilmer R., 1984. Commutative Semigroup Rings, The University of Chicago Press.

İKİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Tanım 2.1. S boştan farklı bir küme ve $\cdot : S \times S \to S$ ikili işlemi tanımlansın. Her $a,b,c \in S$ için $a.(b.c) = (a.b).c$ (birleşme özelliği) koşulu sağlanıyorsa, S kümesine bir ***yarıgrup*** denir.

Tanım 2.2. S bir yarıgrup olsun. Her $x \in S$ için $e.x = x.e = x$ olacak şekilde $e \in S$ varsa e elemanına ***birim eleman*** denir. S yarıgrubuna da ***monoid*** adı verilir. S yarıgrubunun birim elemanı 1_S ile gösterilecektir. O halde,

$$S^1 = \begin{cases} S \ , \ 1_S \in S \text{ ise} \\ S \cup \{1\} \ , \ 1_S \notin S \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3. S bir yarıgrup olsun. $x \in S$ için $x.y.x = x$ ve $y.x.y = y$ olacak şekilde en az bir $y \in S$ elemanı varsa x elemanına ***tersinir eleman***, y elemanına da x in bir ***tersi*** denir.

Uyarı 2.4. Yarıgruplarda bir elemanın tersi tek olmak zorunda değildir.

Uyarı 2.5. S bir yarıgrup olsun. S monoid ise $a \in S$ için $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1_S$ olacak şekilde $a^{-1} \in S$ varsa a elemanına ***tersinir eleman*** denir.

Tanım 2.6. S monoidinin her elemanı tersinir ise S ye bir ***grup*** denir.

Tanım 2.7. S bir yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için $S \neq \{z\}$ olmak üzere $z.a = a.z = z$ olacak şekilde $z \in S$ varsa z elemanına ***sıfır eleman*** denir. S yarıgrubuna da ***sıfırlı yarıgrup***

denir. S yarıgrubunun sıfır elemanı 0_S ile gösterilecektir. O halde,

$$S^0 = \begin{cases} S \ , \ 0_S \in S \text{ ise} \\ S \cup \{0\} \ , \ 0_S \notin S \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 2.8. S bir yarıgrup olsun. Her $x, y \in S$ için $x.y = y.x$ ise S yarıgrubuna ***değişmeli yarıgrup*** denir.

Tanım 2.9. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Her $x, y \in A$ için $x.y \in A$ ise A kümesine S yarıgrubunun ***altyarıgrubu*** denir.

Uyarı 2.10. $(S, .)$ bir yarıgrup olmak üzere her $x, y \in S$ için $x.y = xy$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.11. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. $e^2 = e$ ise e elemanına ***idempotent eleman*** denir. Yarıgrubun bütün elemanları idempotent ise S yarıgrubuna ***idempotent yarıgrup*** denir.

Tanım 2.12. S bir yarıgrup olsun. Bir $x \in S$ için $xyx = x$ olacak şekilde en az bir $y \in S$ varsa x elemanına ***regüler eleman*** denir. Yarıgrubun bütün elemanları regüler ise S yarıgrubuna ***regüler yarıgrup*** denir.

Lemma 2.13. Her regüler elemanın bir tersi vardır.

KANIT. $x \in S$ regüler eleman olsun. O zaman $xyx = x$ olacak şekilde en az bir $y \in S$ vardır. $yxy = y(xyx)y = y(x)yxy = y(xyx)yxy = (yxy)x(yxy)$ olduğundan yxy regüler elemandır. Dolayısıyla $x(yxy)x = (xyx)yx = xyx = x$ sağlanır. O halde x in tersi yxy elemanıdır. $\square$

Uyarı 2.14. S bir regüler yarıgrup ise $x \in S$ için $xyx = x$ olacak şekildeki $y \in S$ teklikle belirli olmak zorunda değildir.

Tanım 2.15. S bir yarıgrup olsun. Her $x \in S$ için $xx^{-1}x = x$ ve $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $x^{-1} \in S$ varsa S yarıgrubuna ***tersinir yarıgrup*** denir.

Uyarı 2.16. Tersinir yarıgrupta $e \in S$ idempotent eleman ise, $e = e^{-1}$ dir.

Tanım 2.17. S bir yarıgrup olsun. Her $x \in S$ için $xx^{-1}x = x$ ve $xx^{-1} = x^{-1}x$ olacak şekilde teklikle belirli $x^{-1} \in S$ varsa S yarıgrubuna ***tamamen regüler yarıgrup*** denir.

Tanım 2.18. $\emptyset \neq X$ kümesi için $T_X = \{\alpha : X \to X | \alpha \ fonksiyon\}$ kümesine ***tam transformasyon yarıgrup*** denir.

Örnek 2.19. T_3 tam transformasyon yarıgrubunda,

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

olsun.

$xyx = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x$ dir. Benzer şekilde $xzx = x$, $zxz = z$, $yxy = y$, $yzy = y$, $zyz = z$ dir. Dolayısıyla x, y ve z tersinir elemanlardır. Her elemanın tersi teklikle belirli olmadığından T_3 tersinir yarıgrup değildir. Fakat T_3 regüler yarıgruptur. Ayrıca $xy = x \neq y = yx$ olduğundan T_3 tamamen regüler yarıgrup değildir.

Örnek 2.20. $(\mathbb{R}, .)$ yarıgrubunu düşünelim.

Her $a \in \mathbb{R}$ için $aba = a$ olan en az bir $b \in \mathbb{R}$ olduğundan $(\mathbb{R}, .)$ regüler yarıgruptur. Aynı zamanda $aa^{-1}a = a$ ve $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $a^{-1} \in \mathbb{R}$ olduğundan $(\mathbb{R}, .)$ tersinir yarıgruptur. $aa^{-1}a = a$ ve $aa^{-1} = a^{-1}a$ olduğundan $(\mathbb{R}, .)$ tamamen regüler yarıgruptur.

Uyarı 2.21. Bütün gruplar regüler yarıgrup ve tersinir yarıgruptur.

Tanım 2.22. Sıfırlı S yarıgrubunun bir $0 \neq x \in S$ için $xy = 0$ olacak şekilde $0 \neq y \in S$ varsa x elemanına ***sol sıfır bölen*** eleman, $zx = 0$ olacak şekilde $0 \neq z \in S$ varsa x elemanına ***sağ sıfır bölen eleman*** denir. Eğer x hem sol sıfır bölen hem sağ sıfır bölen ise x elemanına

sıfır bölen eleman denir.

Tanım 2.23. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. S nin sıfırdan farklı sıfır bölen eleman yoksa S yarıgrubuna ***sıfır bölensiz yarıgrup*** denir.

Tanım 2.24. $(S,\cdot)$ bir yarıgrup, A ve B, S nin iki altkümesi olsun.

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A \ , \ b \in B\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $A = \{a\}$ ise $\{a\} \cdot B$ yerine $a \cdot B$ ve benzer şekilde $B = \{b\}$ ise $A \cdot \{b\}$ yerine $A \cdot b$ gösterimi kullanılır.

Tanım 2.25. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun. $IS \subseteq I$ ise I ya S yarıgrubunun ***sağ ideali***, $SI \subseteq I$ ise I ya S yarıgrubunun ***sol ideali*** denir. I hem sol hem sağ ideal ise I ya S yarıgrubunun bir ***ideali*** denir.

Tanım 2.26. I, S yarıgrubunun bir ideali olmak üzere $I \neq S$ ise I idealine ***öz(proper) ideal*** denir.

Tanım 2.27. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. $(a) = aS = \{as : s \in S\}$ kümesine a tarafından üretilen ***esas ideal*** denir.

Tanım 2.28. P, S yarıgrubunun bir proper ideali olsun. A ve B, S yarıgrubunun iki ideali olmak üzere $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ sağlanıyorsa P idealine S yarıgrubunun ***asal ideali*** denir.

Tanım 2.29. P, S yarıgrubunun bir proper ideali olsun. $a, b \in S$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P idealine ***tamamen asal ideal*** denir.

Tanım 2.30. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunda sıfır ideali asal ideal ise S yarıgrubuna bir ***asal yarıgrup*** denir.

Tanım 2.31. M, S yarıgrubunun keyfi bir altkümesi olsun. Eğer $a, b \in M$ için $axb \in M$ olacak şekilde bir $x \in S$ elemanı varsa M kümesine bir ***m-sistem*** denir.

Tanım 2.32. S yarıgrubunun çarpma işlemine göre kapalı olan elemanlarının bir kümesine ***çarpımsal sistem*** denir. Aslında bu S nin bir altyarıgrubudur.

Uyarı 2.33. Çarpımsal sistem m-sistemdir.

Tanım 2.34. S bir yarıgrup ve A, S yarıgrubunun bir ideali olsun.

$$\sqrt{(A)} = \{r \in S : \text{r yi içeren her } M(r) \text{ m-sistemi için } M(r) \cap A \neq \emptyset\}$$

kümesine A idealinin ***asal radikali*** denir.

Tanım 2.35. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. ***S yarıgrubunun asal radikali*** sıfır idealinin asal radikali olarak tanımlanır ve

$$\sqrt{(S)} = \{s \in S : \text{s yi içeren her } M(s) \text{ m-sistemi için } 0 \in M(s)\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.36. S bir yarıgrup ve Q, S yarıgrubunun bir ideali olsun. S yarıgrubunda herhangi bir A ideali için $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ sağlanıyorsa Q idealine S yarıgrubunun ***yarıasal ideali*** denir.

Tanım 2.37. Q, S yarıgrubunun herhangi bir ideali olsun. $a \in S$ için $a^2 \in Q$ iken $a \in Q$ oluyorsa Q idealine ***tamamen yarıasal ideal*** denir.

Tanım 2.38. N, S yarıgrubunun keyfi bir altkümesi olsun. Eğer $a \in N$ için $axa \in N$ olacak şekilde bir $x \in S$ elemanı varsa N kümesine bir ***n-sistem*** denir.

Tanım 2.39. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. $a \in S$ için $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa a elemanına ***nilpotent eleman*** denir. Bu şekildeki en küçük n pozitif tamsayısına a elemanının ***nilpotentlik indeksi*** denir.

Tanım 2.40. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. Sıfırdan başka nilpotent elemanı olmayan S yarıgrubuna ***reduced(indirgenmiş) yarıgrup*** denir.

Tanım 2.41. S sıfırlı bir yarıgrup ve A, S nin bir ideali olsun. Eğer $A^n = (0)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa A idealine ***nilpotent ideal*** denir.

Tanım 2.42. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. $a \in S$ için $aSa = (0)$ iken $a = 0$ oluyorsa S yarıgrubu ***yarıasal*** olarak adlandırılır.

Tanım 2.43. S sıfırlı bir yarıgrup ve A, S nin bir ideali olsun. A idealinin her elemanı nilpotent ise A idealine ***nil ideal*** denir.

Önerme 2.44. Her nilpotent ideal nil idealdir.

Tanım 2.45. S bir yarıgrup ve Q onun bir proper ideali olsun. $Q \subseteq A \subseteq S$ olacak şekildeki her A ideali için $Q = A$ veya $A = S$ ise Q idealine S yarıgrubunun bir ***maksimal ideali*** denir.

Tanım 2.46. $C(P) = \{r \in S : r \notin P\}$ kümesine P nin S yarıgrubundaki ***tümleyeni*** denir.

Tanım 2.47. κ, S yarıgrubu üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\forall x, y, z \in S$ için $x\kappa y$ iken $(zx)\kappa(zy)$ ise κ bağıntısına ***sol kongrüans*** ve $x\kappa y$ iken $(xz)\kappa(yz)$ ise κ bağıntısına ***sağ kongrüans*** denir. Eğer κ hem sol kongrüans hem de sağ kongrüans ise κ bağıntısına ***kongrüans*** denir.

Tanım 2.48. S bir yarıgrup ve I, S yarıgrubunun bir ideali olsun.

$$\kappa = (I \times I) \cup \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$$

bağıntısını alalım. κ bağıntısı bir kongrüans bağıntısıdır. Eğer $\forall a, b \in S$ için

$$a\kappa b \Leftrightarrow a, b \in I \text{ } veya \text{ } a = b$$

sağlanıyorsa κ kongrüansına modulo I ya göre ***Rees kongrüans*** denir.

Gerçekten,

1. $x \in I$ için $(x,x) \in I \times I$ olduğundan $(x,x) \in \kappa$ dır. $x \in S \setminus I$ için $(x,x) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ olduğundan $(x,x) \in \kappa$ dır. Dolayısıyla $x\kappa x$ olduğundan yansıma özelliği sağlanır.

2. $x\kappa y$ olsun. $(x,y) \in \kappa$ dır. $(x,y) \in I \times I$ ise $x,y \in I$ dır. O halde $(y,x) \in I \times I$ olup $(y,x) \in \kappa$ dır. $(x,y) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ ise $(x,y) = (a,a)$ olup $x = y$ elde edilir. Buradan, $(y,x) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ olur ve $(y,x) \in \kappa$ dır. Dolayısıyla $y\kappa x$ olduğundan simetri özelliği sağlanır.

3. $x\kappa y$ ve $y\kappa z$ olsun. O zaman $(x,y) \in \kappa$ ve $(y,z) \in \kappa$ dır. $(x,y),(y,z) \in I \times I$ ise $x,y,z \in I$ dır. O halde $(x,z) \in I \times I$ olup $(x,z) \in \kappa$ elde edilir. $(x,y),(y,z) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ ise $(x,y) = (a,a)$ ve $(y,z) = (a,a)$ olup $y = x$ ve $z = y$ olur. Buradan $x = z$ olduğundan $(x,z) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ dır ve $(x,z) \in \kappa$ olur. O halde $x\kappa z$ olduğundan geçişme özelliği sağlanır. Dolayısıyla κ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

   Şimdi $x\kappa y$ yani $(x,y) \in \kappa$ olsun. $(x,y) \in I \times I$ ise $x,y \in I$ dır. $c \in S$ için I ideal olduğundan $xc, cx \in I$ ve $yc, cy \in I$ olur ve buradan $(xc,yc) \in I \times I$ ve $(cx,cy) \in I \times I$ dır. O halde $(xc,yc),(cx,cy) \in \kappa$ olduğundan $(xc)\kappa(yc)$ ve $(cx)\kappa(cy)$ sağlanır.

   $(x,y) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ ise $(x,y) = (a,a)$ ve $x = y$ dir. $c \in S$ için $xc = yc$ ve $cx = cy$ olur. Böylece $(xc,yc),(cx,cy) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ elde edilir. O halde $(xc,yc),(cx,cy) \in \kappa$ olduğundan $(xc)\kappa(yc)$ ve $(cx)\kappa(cy)$ sağlanır. Dolayısıyla κ bağıntısı bir kongrüanstır.

   Son olarak, $x,y \in S$ için $x\kappa y$ olsun. $(x,y) \in I \times I$ ise $x,y \in I$ olur.

   $(x,y) \in \{(a,a) : a \in S \setminus I\}$ ise $(x,y) = (a,a)$ ve $x = y$ olur. Dolayısıyla $x,y \in S$ için

$$x\kappa y \Leftrightarrow x,y \in I \text{ veya } x = y$$

   dir.

Tanım 2.49. Rees kongrüans κ bağıntısının denklik sınıfları, $a \in S$ için

$$\overline{a} = \{b \in S : (a,b) \in \kappa\}$$

dir. Böylece $a \in I$ için,

$$\overline{a} = \{b \in S : (a,b) \in I \times I\} = I$$

veya $a \notin I$ için,

$$\overline{a} = \{b \in S : a \in S \setminus I \text{ için } (a,b) \in (a,a)\} = \{a\}$$

şeklindedir. O halde S yarıgrubunun modulo κ ya göre denklik sınıfları I ve her

$a \in S \setminus I$ için tek nokta kümesi $\{a\}$ dır. Denklik sınıfların kümesi S/κ gösterimi yerine S/I gösterimi kullanılır ve S/I, S yarıgrubunun modulo I ya göre ***Rees faktör yarıgrubu*** olarak tanımlanır.

Uyarı 2.50. I, S/I nın sıfır elemanıdır.

Tanım 2.51. $(S,*)$ ve $(T,\circ)$ iki yarıgrup olmak üzere $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a,b \in S$ için

$$f(a*b) = f(a) \circ f(b)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna ***yarıgrup homomorfizması*** denir. f örten ise f homomorfizmasına ***yarıgrup epimorfizması*** denir.

Tanım 2.52. I, S yarıgrubunun bir ideali ise,

$$\theta : S \to S/I \ , \ \theta(a) = aI$$

ile tanımlanan dönüşüm bir yarıgrup epimorfizmasıdır. Bu yarıgrup epimorfizmasına ***doğal homomorfizma*** denir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, (Giri ve Wazalwar, 1993) ve (Park ve Kim, 1992) çalışmaları incelendi.

3.1. Değişmeli Olmayan Yarıgruplarda Asal İdealler ve Asal Radikaller

M.Satyanarayana (1972) değişmeli halkalarda tanımlanan asal ideal ve asal radikal kavramlarını değişmeli yarıgruplar üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmada Giri ve Wazalwar (1993), M. Satyanarayana'nın çalışmasını değişmeli olmayan yarıgruplara genellemişlerdir.

3.1.1. Sonuçlar

Sonuç 3.1. S ve T iki yarıgrup olmak üzere $\theta : S \to T$ bir yarıgrup homomorfizması olsun. $A, B \subseteq S$ ve $U, V \subseteq T$ idealleri için $\theta^{-1}(U)\theta^{-1}(V) \subseteq \theta^{-1}(UV)$ dir.

KANIT. θ fonksiyonunun ters görüntüsü $\theta^{-1} = \{x \in S : \theta(x) \in T\}$ şeklindedir. $x \in \theta^{-1}(U)\theta^{-1}(V)$ alalım. O zaman $x = ab$ olacak şekilde $a \in \theta^{-1}(U)$ ve $b \in \theta^{-1}(V)$ vardır. Buradan $\theta(a) \in U$ ve $\theta(b) \in V$ elde edilir. Bu $\theta(a)\theta(b) \in UV$ ve θ homomorfizma olduğundan $\theta(ab) \in UV$ demektir. Böylece $ab \in \theta^{-1}(UV)$ yani $x \in \theta^{-1}(UV)$ olur. Dolayısıyla $\theta^{-1}(U)\theta^{-1}(V) \subseteq \theta^{-1}(UV)$ sağlanır. □

Sonuç 3.2. Yarıgruplarda sağ idealler için azalan zincir kuralının geçerli olması için gerek ve yeter koşul S yarıgrubunun sağ ideallerinin boş olmayan her altkümesinde bir minimal sağ ideal var olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: Yarıgruplarda sağ idealler için azalan zincir kuralı geçerli olsun. O zaman S yarıgrubundaki sağ ideallerin her azalan dizisi $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ durağandır. S yarıgrubunun sağ ideallerinin keyfi bir A altkümesini alalım. O zaman A altkümesi durağandır. Dolayısıyla S yarıgrubunun bir minimal sağ ideali vardır.

$\Leftarrow$: S yarıgrubunun sağ ideallerinin boş olmayan her altkümesinde bir minimal sağ ideal olsun. Sağ idealler için bir azalan zincir durumu $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ alalım. Kabulümüzden bu zincir durağandır. Dolayısıyla yarıgruplarda sağ idealler için azalan zincir kuralı geçerlidir. □

3.1.2. Asal İdealler ve Asal Radikaller

Teorem 3.3. P, S yarıgrubunun bir ideali olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

1. P bir asal idealdir.

2. $a,b \in S$ için $aSb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

3. S^1aS^1 ve S^1bS^1, S yarıgrubunda esas idealler olmak üzere

   $(S^1aS^1)(S^1bS^1) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

4. U ve V, S yarıgrubunda sağ idealler olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

5. U ve V, S yarıgrubunda sol idealler olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

KANIT. $\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}$: P bir asal ideal ve $a,b \in S$ için $aSb \subseteq P$ olsun. $aSb \subseteq P$ iken $SaSbS \subseteq SPS \subseteq P$ olur. Bu yüzden $(SaS)(SbS) \subseteq SaSSbS$ ve $S^2 \subseteq S$ olduğundan $(SaS)(SbS) \subseteq SaSbS \subseteq P$ olur. P asal ideal olduğundan $SaS \subseteq P$ veya $SbS \subseteq P$ dir. Kabul edelim ki $SaS \subseteq P$ olsun. $A = S^1aS^1$ için

$A^3 = (S^1aS^1)(S^1aS^1)(S^1aS^1) = (S^1aS^1S^1aS^1)(S^1aS^1) \subseteq (S^1aS^1aS^1)(S^1aS^1) = (S^1aS^1aS^1S^1aS^1) \subseteq (S^1aS^1aS^1aS^1) = (S^1aS^1)a(S^1aS^1)$ elde edilir. $S^1aS^1 = \{yaz : y,z \in S^1\}$ olduğundan keyfi bir $x \in S^1aS^1$ için $x = yaz$ olacak şekilde $y,z \in S^1$ vardır. $y = z = 1$ ise $x = 1a1 = a \in S$ olur. $y \neq 1$ ve $z \neq 1$ için $a,y,z \in S$ olup $x = yaz \in S$ elde edilir. Dolayısıyla $S^1aS^1 \subseteq S$ elde edilir. Böylece $(S^1aS^1)a(S^1aS^1) \subseteq SaS \subseteq P$ olur. Dolayısıyla $A^3 \subseteq P$ ve P asal ideal olduğundan $A \subseteq P$ sağlanır. $a \in A$ için $a \in P$ elde edilir. Benzer şekilde $SbS \subseteq P$ ve $B = S^1bS^1$ olsun. $B^3 = (S^1bS^1)(S^1bS^1)(S^1bS^1) \subseteq SbS \subseteq P$ olur. P asal ideal olduğunda $B \subseteq P$ ve $b \in B$ için $b \in P$ elde edilir.

$\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3}$: $a,b \in S$ için $aSb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Kabul edelim ki S^1aS^1 ve S^1bS^1 esas idealleri için $(S^1aS^1)(S^1bS^1) \subseteq P$ olsun. O halde $arb \in aSb$ için

$arb = 1a1r1b1 \in (S^1aS^1)(S^1bS^1) \subseteq P$ olduğundan $arb \in P$ dir. Her $r \in S$ için sağlandığından $aSb \subseteq P$ olur. Dolayısıyla **(2)** den $aSb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir.

3 $\Rightarrow$ **4** : S yarıgrubunda S^1aS^1 ve S^1bS^1 esas idealleri için $(S^1aS^1)(S^1bS^1) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Kabul edelim ki S yarıgrubunda U ve V sağ idealleri için $UV \subseteq P$ ve $U \nsubseteq P$ olsun. $u \in U$ için $u \notin P$ dir. $v \in V$ alalım. $(S^1uS^1)(S^1vS^1) \subseteq S^1uS^1S^1vS^1 \subseteq S^1uS^1vS^1 \subseteq S^1UV \subseteq (UV) \cup (SUV) \subseteq P \cup SP \subseteq P$ olur. Bu $u \in P$ veya $v \in P$ demektir. $u \notin P$ olduğundan $v \in P$ dir. Dolayısıyla $V \subseteq P$ sağlanır.

4 $\Rightarrow$ **5** : U ve V sağ idealleri için $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ sağlansın. Kabul edelim ki U ve V, S yarıgrubunda sol idealler olmak üzere $UV \subseteq P$ ve $U \nsubseteq P$ olsun. Böylece $u \in U$ için $u \notin P$ dir. $v \in V$ alalım. $(S^1uS^1)(S^1vS^1) \subseteq UVS^1 \subseteq (UV) \cup (UVS) \subseteq P$ olur. S^1uS^1 ve S^1vS^1 sağ idealler olduğundan **(4)** den $S^1uS^1 \subseteq P$ veya $S^1vS^1 \subseteq P$ dir. **(3)** den $u \in P$ veya $v \in P$ dir. Ancak $u \notin P$ olduğundan $v \in P$ elde edilir. Dolayısıyla $V \subseteq P$ sağlanır.

5 $\Rightarrow$ **1** : U ve V herhangi iki ideal olsun. Her ideal sol ideal olduğundan **(5)** den $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir. Asal ideal tanımından P asal idealdir. □

Sonuç 3.4. P, S yarıgrubunun bir ideali olsun. P nin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $S \setminus P$ nin bir m-sistem olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: P asal ideal olsun. $a, b \in S \setminus P$ alalım. O zaman $a, b \notin P$ dir. Teorem 3.3 den $aSb \nsubseteq P$ olur. Bu durumda $axb \notin P$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Bu $axb \in S \setminus P$ demektir. Böylece $a, b \in S \setminus P$ için $axb \in S \setminus P$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. O halde $S \setminus P$ bir m-sistemdir.

$\Leftarrow$: $S \setminus P$ bir m-sistem olsun. O zaman $a, b \in S \setminus P$ için $axb \in S \setminus P$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Buradan $a, b \notin P$ olur. Dolayısıyla $a, b \notin P$ için $axb \notin P$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Bu $a, b \notin P$ ve $aSb \nsubseteq P$ olduğunu gösterir. O halde Teorem 3.3 den P asal idealdir. □

Önerme 3.5. $r \in \sqrt{(A)}$ ise $r^n \in A$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır.

KANIT. $r \in \sqrt{(A)}$ olsun. $\sqrt{(A)}$ kümesinin tanımından $r \in S$ olmak üzere r yi içeren her m-sistem $M(r)$ için $M(r) \cap A \neq \emptyset$ dir. $B = \{r^i : i = 1, 2, \dots\}$ kümesini alalım. $r^i, r^j \in B$ için $r^i r^j = r^{i+j} = r^k \in B$ olduğundan B kümesi çarpımsal sistemdir. Her çarpımsal sistem bir m-sistem olduğundan B bir m-sistemdir. $i = 1$ için $r \in B$ olduğundan $B \cap A \neq \emptyset$ dir. Bu yüzden $r^n \in A$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. $\square$

Teorem 3.6. Eğer A, S yarıgrubunda bir ideal ise $\sqrt{(A)}$, A yı içeren S yarıgrubundaki tüm asal ideallerin arakesitidir.

KANIT. Her $i \in I$ için P_i, S yarıgrubunda bir asal ideal olmak üzere $A \subseteq P_i$ olduğunu varsayalım. $r \in \sqrt{(A)}$ alalım. $r \notin P_i$ ise P_i asal ideal olduğundan Sonuç 3.4 den $C(P_i)$ bir m-sistemdir. Bu yüzden $C(P_i) \cap A \neq \emptyset$ dir. Fakat $A \subseteq P_i$ olduğundan $C(P_i) \cap A = \emptyset$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $r \in P_i$ olmalıdır. O halde $\sqrt{(A)} \subseteq P_i$ elde edilir. Buradan $\sqrt{(A)} \subseteq \cap P_i$ sağlanır. Şimdi $\cap P_i \subseteq \sqrt{(A)}$ olduğunu gösterelim. $r \notin \sqrt{(A)}$ olsun. $r \notin \sqrt{(A)}$ olduğundan S yarıgrubunda bir m-sistem $M(r)$ vardır öyle ki $r \in M$ ve $M(r) \cap A = \emptyset$ dir. $K = \{I : A \subseteq I,\ S \text{ nin ideali ve } r \in S \text{ için } M(r) \cap I = \emptyset\}$ kümesini düşünelim. $A \subseteq A$ ve $M(r) \cap A = \emptyset$ olduğundan $A \in K$ dır. Yani $K \neq \emptyset$ dir. Zorn Lemmasından K kümesinin bir P maksimal ideali vardır öyle ki $M(r) \cap P = \emptyset$ ve $A \subseteq P$ dir. $r \in M$ için $r \notin P$ olur. Şimdi P nin bir asal ideal olduğunu gösterelim. Teorem 3.3 den $a \notin P$ ve $b \notin P$ ise $(S^1aS^1)(S^1bS^1) \nsubseteq P$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Varsayalım ki $a \notin P$ ve $b \notin P$ olsun. $P \subseteq P \cup (S^1aS^1)$, P nin maksimaliğinden $P \cup (S^1aS^1)$, M nin bir m_1 elemanını içerir. Benzer şekilde $P \subseteq P \cup (S^1bS^1)$, M nin bir m_2 elemanını içerir. $m_1, m_2 \in M$ için M bir m-sistem olduğundan $m_1xm_2 \in M$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. $m_1xm_2 \in (P \cup S^1aS^1)(P \cup S^1bS^1)$ den $m_1 \in P \cup (S^1aS^1)$ ve $m_2 \in P \cup (S^1bS^1)$ elde edilir. $(S^1aS^1)(S^1bS^1) \subseteq P$ ise $m_1xm_2 \in P$ olur. Bu ise $m_1xm_2 \in M(r) \cap P$ olmasını gerektirir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $(S^1aS^1)(S^1bS^1) \nsubseteq P$ sağlanır. O halde P bir asal idealdir. $\square$

3.1.3. Yarıasal İdealler

Teorem 3.7. S sıfırlı bir yarıgrup ve Q, S nin bir ideali olsun. S/Q Rees faktör yarıgrubunun sıfırdan farklı nilpotent idealinin olmaması için gerek ve yeter koşul S yarıgrubunda Q idealinin yarıasal ideal olmasıdır.

KANIT. $\Leftarrow$: Q, S yarıgrubunda yarıasal ideal olsun. $S/Q = \overline{S}$ olmak üzere S

üzerinde bir θ doğal homomorfizmasını alalım. Varsayalım ki U, S/Q Rees faktör yarıgrubunda nilpotent ideal olsun. O zaman $\overline{S}$ yarıgrubunda $U^n = \overline{(0)}$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı vardır. Q, S/Q yarıgrubunun sıfır elemanı olmak üzere $\theta^{-1}(U^n) = \theta^{-1}\overline{(0)} = Q$ ve $(\theta^{-1}(U))^n \subseteq \theta^{-1}(U^n) = Q$ olur. Q yarıasal ideal olduğundan $\theta^{-1}(U) \subseteq Q$ ve dolayısıyla $U = \overline{(0)}$ elde edilir. O halde S/Q Rees faktör yarıgrubu sıfır olmayan nilpotent ideal içermez.

$\Rightarrow$: Kabul edelim ki S/Q Rees faktör yarıgrubu sıfır olmayan nilpotent ideal içermesin.A, S yarıgrubunda bir ideal olmak üzere $A^2 \subseteq Q$ olsun. O halde $(\theta(A))^2 = \theta(A^2) = A^2Q \subseteq S/Q$ ve S/Q sıfır olmayan nilpotent ideal içermediğinden $A^2 \subseteq Q$ olduğundan $A^2Q = Q = \overline{(0)}$ olmak zorundadır. Buradan $\theta(A) = \overline{(0)}$ elde edilir ve $A \subseteq Q$ sağlanır. Dolayısıyla Q yarıasal idealdir. □

Teorem 3.8. Q, S yarıgrubunun bir ideali olsun. O halde aşağıdakiler denktir.

1. Q bir yarıasal idealdir.

2. $a \in S$ için $aSa \subseteq Q$ iken $a \in Q$ dur.

3. S^1aS^1, S yarıgrubunda esas ideal olmak üzere $(S^1aS^1)^2 \subseteq Q$ iken $a \in Q$ dur.

4. S yarıgrubunda U sağ ideali için $U^2 \subseteq Q$ iken $U \subseteq Q$ dur.

5. S yarıgrubunda U sol ideali için $U^2 \subseteq Q$ iken $U \subseteq Q$ dur.

KANIT. **1** $\Rightarrow$ **2** : Q bir yarıasal ideal ve $a \in S$ için $aSa \subseteq Q$ olsun. $aSa \subseteq Q$ iken $SaSaS \subseteq SQS \subseteq Q$ olur. Böylece $(SaS)(SaS) \subseteq SaSSaS \subseteq SaSaS \subseteq Q$ ve Q yarıasal ideal olduğundan $SaS \subseteq Q$ elde edilir. $A = S^1aS^1$ için

$A^3 = (S^1aS^1)(S^1aS^1)(S^1aS^1) \subseteq (S^1aS^1)a(S^1aS^1)$ olur. $x \in S^1aS^1$ için $x = yay$ olacak şekilde $y \in S^1 = S \cup \{1\}$ vardır. $y = 1$ alırsak $x = 1a1 = a \in S$ dir. Buradan $S^1aS^1 \subseteq S$ olur. Dolayısıyla $A^3 = (S^1aS^1)^3 = (S^1aS^1)a(S^1aS^1) \subseteq SaS \subseteq Q$ sağlanır. Q yarıasal ideal olduğundan $A \subseteq Q$ dur. Buradan $a \in A$ için $a \in Q$ elde edilir.

2 ⇒ 3 : $a \in S$ için $aSa \subseteq Q$ iken $a \in Q$ olsun. Kabul edelim ki S yarıgrubunda S^1aS^1 esas ideali için $(S^1aS^1)^2 \subseteq Q$ olsun. $ara \in aSa$ için $ara = 1a1r1a1 \in (S^1aS^1)(S^1aS^1) = (S^1aS^1)^2 \subseteq Q$ olduğundan $ara \in Q$ olur. Her $r \in S$ için sağlandığından $aSa \subseteq Q$ elde edilir. Dolayısıyla **(2)** den $a \in Q$ sağlanır.

3 ⇒ 4 : S yarıgrubunda S^1aS^1 esas ideali için $(S^1aS^1)^2 \subseteq Q$ iken $a \in Q$ olsun. Kabul edelim ki S yarıgrubunda U sağ ideali için $U^2 \subseteq Q$ olsun. $u \in U$ alalım. $(S^1uS^1)^2 = (S^1uS^1)(S^1uS^1) = S^1uS^1S^1uS^1 \subseteq S^1uS^1uS^1 \subseteq S^1U^2 \subseteq U^2 \cup SU^2 \subseteq Q$ elde edilir. Dolayısıyla **(3)** den $(S^1uS^1)^2 \subseteq Q$ iken $u \in Q$ olur. O halde $U \subseteq Q$ sağlanır.

4 ⇒ 5 : S yarıgrubunda U sağ ideali için $U^2 \subseteq Q$ iken $U \subseteq Q$ ve kabul edelim ki S yarıgrubunda U sol ideali için $U^2 \subseteq Q$ olsun. $u \in U$ alalım. $(S^1uS^1)^2 = (S^1uS^1)(S^1uS^1) = S^1uS^1S^1uS^1 \subseteq S^1uS^1uS^1 \subseteq US^1 \subseteq U^2 \cup U^2S \subseteq Q$ elde edilir. Dolayısıyla **(3)** den

$(S^1uS^1)^2 \subseteq Q$ iken $u \in Q$ olur. O halde $U \subseteq Q$ sağlanır.

5 ⇒ 1 : U herhangi bir ideal olsun. Her ideal sol ideal olduğundan **(5)** den $U^2 \subseteq Q$ iken $U \subseteq Q$ dir. Yarıasal ideal tanımından Q yarıasal idealdir. □

Teorem 3.9. S bir yarıgrup ve Q, S yarıgrubunun bir ideali olsun. $S \setminus Q$ nun bir n-sistem olması için gerek ve yeter koşul Q idealinin yarıasal ideal olmasıdır.

KANIT. ⇐ : Q bir yarıasal ideal olsun. $a \in S \setminus Q$ alalım. O zaman $a \notin Q$ dur. Böylece Teorem 3.8 den $aSa \nsubseteq Q$ dur. Bu durumda $axa \notin Q$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Bu $axa \in S \setminus Q$ demektir. Böylece $a \in S \setminus Q$ için $axa \in S \setminus Q$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Dolayısıyla $S \setminus Q$ bir n-sistemdir.

⇒ : $S \setminus Q$ bir n-sistem olsun. O halde $a \in S \setminus Q$ için $axa \in S \setminus Q$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Buradan $a \notin Q$ dur. Böylece $a \notin Q$ için $axa \notin Q$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Bu $a \notin Q$ ve $aSa \nsubseteq Q$ olduğunu gösterir. Teorem 3.8 den Q yarıasal idealdir. □

Lemma 3.10. Eğer $a \in N$ için N, S yarıgrubunda bir n-sistem ise o zaman S yarıgrubunda $a \in M$ ve $M \subseteq N$ olan bir m-sistem M vardır.

KANIT. N, S yarıgrubunda bir n-sistem ve $a \in N$ olsun. $a_1 = a$ alalım. O zaman $a_1 \in N$ için N bir n-sistem olduğundan $a_1xa_1 \in N$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. O halde $a_1Sa_1 \subseteq N$ ve $a_1Sa_1 \cap N \neq \emptyset$ dir. $a_2 \in a_1Sa_1 \cap N$ alalım. Burada $a_2 \in N$ olduğundan $a_2za_2 \in N$ olacak şekilde bir $z \in S$ vardır. Böylece $a_2Sa_2 \subseteq N$ ve $a_2Sa_2 \cap N \neq \emptyset$ dir. Böyle devam edersek $a_i \in N$ için $a_{i+1} \in a_iSa_i \cap N$ olur. $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, ...\}$ kümesini düşünelim. $M \subseteq N$ dir. $i \leq j$ için $a_i, a_j \in M$ alalım. O zaman $a_{j+1} \in a_jSa_j \subseteq a_iSa_j$ dir. Ancak $a_j \in M$ dir. Böylece $a_{j+1} = a_ixa_j \in M$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Dolayısıyla M bir m-sitemdir. $\square$

Teorem 3.11. S yarıgrubunda Q idealinin yarıasal ideal olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{(Q)} = Q$ olmasıdır.

KANIT. $\Leftarrow$: Q ideal olmak üzere $\sqrt{(Q)} = Q$ olsun. Teorem 3.6 dan $\sqrt{(Q)} = Q$, Q idealini içeren S yarıgrubundaki bütün asal ideallerin arakesitidir. Ancak asal ideallerin arakesiti yarıasal ideal olduğundan Q yarıasal idealdir.

$\Rightarrow$: Q yarıasal ideal olsun. Q ideal olduğundan her $a, b \in Q$ için $x = a$ veya $x = b$ alınırsa $axb \in Q$ olur. O halde Q bir m-sistemdir ve $Q(a) \cap Q \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $a \in \sqrt{(Q)}$ olur. $Q \subseteq \sqrt{(Q)}$ dur. Varsayalım ki $\sqrt{(Q)} \nsubseteq Q$ olsun. O zaman $a \in \sqrt{(Q)}$ için $a \notin Q$ dur. $a \notin Q$ olduğundan $a \in S \setminus Q$ ve Q yarıasal ideal olduğundan Teorem 3.9 dan $S \setminus Q$ bir n-sistemdir. Lemma 3.10 dan bu n-sistem $S \setminus Q$ için bir m-sistem M vardır ki $a \in M \subseteq S \setminus Q$ dir. Şimdi $a \in \sqrt{(Q)}$ ise $a \in S$ ve her m-sistem $M(a)$ için $M(a) \cap Q \neq \emptyset$ dir. Bu $M(a) \cap S \setminus Q = \emptyset$ demektir. Bu ise $M \subseteq S \setminus Q$ olmasıyla çelişir. $M(a) \cap Q = \emptyset$ dur. Bu yüzden $\sqrt{(Q)} \nsubseteq Q$ kabulü yanlıştır. O halde $\sqrt{(Q)} \subseteq Q$ olur. Dolayısıyla $\sqrt{(Q)} = Q$ sağlanır. $\square$

Sonuç 3.12. S yarıgrubunda bir Q idealinin yarıasal ideal olması için gerek ve yeter koşul Q idealinin S yarıgrubunda asal ideallerin arakesiti olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: Q yarıasal ideal ise Teorem 3.11 den $\sqrt{(Q)} = Q$ dur. Q ideal olduğundan Teorem 3.6 dan $\sqrt{(Q)}$, Q idealini içeren S yarıgrubundaki asal ideallerin arakesitidir. Böylece Q asal ideallerin arakesitidir.

$\Leftarrow$: Q, S yarıgrubunda asal ideallerin arakesiti olsun. Asal ideallerin arakesiti yarıasal ideal olduğundan Q yarıasal idealdir. $\square$

Sonuç 3.13. Eğer A, S yarıgrubunda bir ideal ise o zaman $\sqrt{(A)}$, S yarıgrubunda A idealini içeren yarıasal ideallerin en küçüğüdür.

KANIT. A, S yarıgrubunda bir ideal ise Teorem 3.6 dan $\sqrt{(A)}$, S yarıgrubunda A idealini içeren bütün asal ideallerin arakesitidir. Asal ideallerin arakesiti yarıasal ideal olduğundan $\sqrt{(A)}$ yarıasal idealdir. Q, A idealini içeren herhangi bir yarıasal ideal olsun. $a \in \sqrt{(A)}$ alalım. O halde $a \in S$ ve $M(a) \cap A \neq \emptyset$ dir. $A \subseteq Q$ olduğundan $M(a) \cap Q \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $a \in \sqrt{(Q)}$ olur. Böylece $\sqrt{(A)} \subseteq \sqrt{(Q)}$ dur. Teorem 3.11 den Q yarıasal ideal olduğundan $\sqrt{(Q)} = Q$ dur. O zaman $\sqrt{(A)} \subseteq Q$ elde edilir. Böylece $\sqrt{(A)}$, S yarıgrubunda A idealini içeren yarıasal ideallerin en küçüğüdür. □

3.1.4. Yarıgrupların Asal Radikali

Teorem 3.14. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. Eğer $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubunun asal radikali ise o zaman,

1. $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubunda bütün asal ideallerin arakesitidir.
2. $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubundaki her yarıasal idealde bulunan bir yarıasal idealdir.

KANIT. 1. $\sqrt{(S)} = \sqrt{(0)}$ ve (0), S yarıgrubunda her ideal tarafından kapsandığından Teorem 3.6 dan $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubundaki bütün asal ideallerin arakesitidir.

2. (0), S yarıgrubunda sıfır ideali olduğundan Sonuç 3.13 den $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubundaki yarıasal ideallerin en küçüğüdür. Dolayısıyla $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubundaki her yarıasal idealde bulunan bir yarıasal idealdir.

□

Teorem 3.15. Eğer S sıfırlı bir yarıgrup ise o zaman $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubunda her nilpotent sağ (sol) ideali kapsayan bir nil idealdir.

KANIT. $\sqrt{(S)}$ asal radikalinin nil ideal olduğunu göstermek için $\sqrt{(S)}$ nin her elemanının nilpotent olduğunu göstermemiz gerekir. $a \in \sqrt{(S)}$ alalım. Önerme 3.5 den $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. Böylece $\sqrt{(S)}$ nin her elemanı nilpotent elemandır. Dolayısıyla $\sqrt{(S)}$ nil idealdir. S yarıgrubunda bir A sağ ideali için $A^n = (0)$ olsun. Açıktır ki $A^n = (0) \subseteq \sqrt{(S)}$ dir. Sonuç 3.13 den $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubundaki tüm yarıasal ideallerin en küçüğüdür. O halde $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubundaki bütün nilpotent sağ idealleri kapsar. $\square$

Teorem 3.16. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. T, S yarıgrubunda bir ideal ise T yarıgrubunun asal radikali $T \cap \sqrt{(S)}$ dir.

KANIT. T, S yarıgrubunun bir ideali olduğundan T idealinin kendisi bir yarıgruptur. T yarıgrubunun asal radikali, $\sqrt{(T)} = \{s \in S : \forall$ m-sistem $M(s)$ için $0 \in M(s)\}$ şeklindedir. Böylece Teorem 3.6 dan $\sqrt{(T)}$, S yarıgrubunda T yi içeren bütün asal ideallerin arakesitidir. P, S yarıgrubunun bir asal ideali ise $P \cap T$, T nin bir asal idealidir. Gerçekten $a, b \in T$ ve $aTb \subseteq P \cap T$ olsun. Bu durumda $aSTb \subseteq aTb \subseteq P \cap T \subseteq P$ ve P, S yarıgrubunda asal ideal olduğundan Teorem 3.3 den $a \in P$ veya $b \in P$ dir. $P \cap T \subseteq P$ olduğundan $a \in P \cap T$ veya $b \in P \cap T$ dir. Böylece $P \cap T$, T yarıgrubunda asal idealdir. $\sqrt{(T)} = \cap\{K : K,\ S \text{ de asal}\}$ olmasından $P \cap T$ bu K ideallerinden biridir. O zaman $\sqrt{(T)} = \cap\{K : K,\ S \text{ de asal}\} \subseteq P \cap T$ yani $\sqrt{(T)} \subseteq P$ dir. P, S yarıgrubunun bir asal ideali olduğundan S yarıgrubundaki her asal ideal $\sqrt{(T)}$ kümesini kapsar. O zaman arakesitleride $\sqrt{(T)}$ kümesini kapsar. Buradan $\sqrt{(T)} \subseteq \sqrt{(S)}$ sağlanır ve aynı zamanda $\sqrt{(T)} \subseteq T$ olduğundan $\sqrt{(T)} \subseteq T \cap \sqrt{(S)}$ dir.

Tersine $a \in T \cap \sqrt{(S)}$ alalım. $a \in T$ ve $a \in \sqrt{(S)}$ dir. S yarıgrubunda $a \in T$ ve a yı bulunduran her m-sistem $M(a)$ için $0 \in M(a)$ dır. K, T yarıgrubunda $a \in K$ olacak şekilde bir m-sistem ise aynı zamanda S yarıgrubunda da bir m-sistem olduğundan $0 \in K$ olur. Böylece $a \in \sqrt{(T)}$ dir. Bu ise $T \cap \sqrt{(S)} \subseteq \sqrt{(T)}$ demektir. Dolayısıyla $T \cap \sqrt{(S)} = \sqrt{(T)}$ sağlanır. $\square$

Teorem 3.17. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. S nin asal radikalinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul sıfır olmayan nilpotent (sağ veya sol) idealin olmamasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: S yarıgrubunun asal radikali sıfır olsun. Teorem 3.14 den $\sqrt{(S)}$, S deki tüm asal ideallerin arakesitidir. Asal ideallerin arakesiti yarıasal ideal olduğundan

$\sqrt{(S)} = (0)$ yarıasal idealdir. $A \neq (0)$ ise $A \not\subseteq \sqrt{(S)}$ ve $\sqrt{(S)}$ yarıasal ideal olduğundan $A^2 \not\subseteq \sqrt{(S)}$ dir. Yani $A \neq (0)$ iken $A^2 \neq (0)$ dır. O halde S yarıgrubu sıfır olmayan nilpotent ideale sahip değildir.

$\Leftarrow$: S yarıgrubu sıfır olmayan nilpotent ideal içermesin. O halde S yarıgrubundaki her A ideali için $A \neq (0)$ iken $A^2 \neq (0)$ dır. Yarıasal ideal tanımından (0) yarıasal idealdir. Dolayısıyla S yarıgrubunun asal radikali sıfırdır. $\square$

Teorem 3.18. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunda sağ idealler için azalan zincir kuralı geçerli ise S de her sağ nil ideal nilpotent idealdir.

KANIT. S yarıgrubunda azalan zincir kuralı geçerli olsun. O zaman S deki sağ ideallerin her azalan dizisi $A_1 \supset A_2 \supset ...$ durağandır. A, S yarıgrubunda sıfır olmayan sağ nil ideal olsun. Azalan zincir kuralı geçerli olduğundan bir n pozitif tamsayısı için $A^n = A^{n+1} = A^{n+2} = ...$ dır. $M = A^n$ ve $M \neq (0)$ olduğunu varsayalım. $M^2 = M$ olduğundan $M^2 \neq (0)$ olur. A, S yarıgrubunda bir sağ ideal ve K kümesini $K = \{A \text{ sağ ideal} : AM \neq (0)\}$ şeklinde tanımlayalım. K kümesi M yi içerdiğinden boştan farklıdır. Azalan zincir kuralı geçerli olduğundan Sonuç 3.2 den K kümesinde bir B minimal sağ ideal vardır. $BM \neq (0)$ olduğundan $b \in B$ için $bM \neq (0)$ dır. $bM \subseteq B$ olduğundan bM , S yarıgrubunda sağ idealdir ve $M^2 = M$ olduğundan bM, K kümesinin bir elemanıdır. B, K kümesinde minimal olduğundan $bM = B$ dir. Bir $m \in M$ için $bm = b$ dir. Buradan $b = bm = bm^2 = ...$ elde edilir. M nil ideal olduğundan $bm^k = 0$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. Bu $b = 0$ demektir ve dolayısıyla $bM = (0)$ olur. Bu ise $bM \neq (0)$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden $M = (0)$ ve A sağ nil ideal nilpotent idealdir. $\square$

Sonuç 3.19. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunda sağ idealler için azalan zincir kuralı geçerli ise $\sqrt{(S)}$, S nin her sağ ve sol nilpotent idealini kapsayan nilpotent idealdir.

KANIT. Teorem 3.15 den $0 \in S$ bir yarıgrup ise $\sqrt{(S)}$, S deki her nilpotent (sağ ve sol) ideali içeren bir nil idealdir. Teorem 3.18 den sıfırı olan S yarıgrubunda sağ idealler için azalan zincir kuralı geçerli ise her sağ nil ideal nilpotent idealdir. Dolayısıyla $\sqrt{(S)}$, S yarıgrubunun her sağ ve sol nilpotent idealini kapsayan bir nilpotent idealdir. $\square$

3.1.5. Asal Radikallerin Bazı Sonuçları

Teorem 3.20. A ve B, S yarıgrubunda herhangi iki ideal olmak üzere,

1. $A \subseteq B$ iken $\sqrt{(A)} \subseteq \sqrt{(B)}$ dir.

2. $\sqrt{(AB)} = \sqrt{(A \cap B)} = \sqrt{(A)} \cap \sqrt{(B)}$ dir.

3. $\sqrt{(\sqrt{(A)})} = \sqrt{(A)}$ dır.

KANIT. 1. $A \subseteq B$ olsun. $a \in \sqrt{(A)}$ alalım. O halde $a \in S$ ve $M(a) \cap A \neq \emptyset$ dir. $A \subseteq B$ olduğundan $M(a) \cap B \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $a \in \sqrt{(B)}$ ve $\sqrt{(A)} \subseteq \sqrt{(B)}$ sağlanır.

2. A ve B, S yarıgrubunda iki ideal olduğundan $AB \subseteq A$ ve $AB \subseteq B$ dir. O zaman

$AB \subseteq A \cap B$ ve (1) den $\sqrt{(AB)} \subseteq \sqrt{(A \cap B)}$ sağlanır. $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan (1) den $\sqrt{A \cap B} \subseteq \sqrt{(A)}$ ve $\sqrt{(A \cap B)} \subseteq \sqrt{(B)}$ olur. Dolayısıyla $\sqrt{(A \cap B)} \subseteq \sqrt{(A)} \cap \sqrt{(B)}$ olur. Böylece $\sqrt{(AB)} \subseteq \sqrt{(A \cap B)} \subseteq \sqrt{(A)} \cap \sqrt{(B)}$ elde edilir. Şimdi $z \in \sqrt{(A)} \cap \sqrt{(B)}$ alalım. $z \in \sqrt{(A)}$ ve $z \in \sqrt{(B)}$ dir. Asal radikal tanımından $M(z) \cap A \neq \emptyset$ ve $M(z) \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde z yi içeren m-sistem $M(z)$ vardır. $z_1 \in M(z) \cap A$ ve $z_2 \in M(z) \cap B$ alalım. $z_1, z_2 \in M(z)$ ve $M(z)$ m-sistem olduğundan $z_1 x z_2 \in M(z)$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. A ve B ideal olduğundan $z_1 x z_2 \in A \cap B$ dir. Buradan $M(z) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ dir. Yani $z \in \sqrt{(A \cap B)}$ elde edilir. Benzer şekilde $z_1 x z_2 = z_1(z_2) \in AB$ olduğundan $M(z) \cap (AB) \neq \emptyset$ dir. Yani $z \in \sqrt{(AB)}$ elde edilir. O halde $\sqrt{(A)} \cap \sqrt{(B)} \subseteq \sqrt{(A \cap B)} \subseteq \sqrt{(AB)}$ sağlanır.

3. Teorem 3.11 de A ideal iken $A \subseteq \sqrt{(A)}$ olduğunu gösterdik. (i) den $\sqrt{(A)} \subseteq \sqrt{(\sqrt{(A)})}$ olur. Diğer taraftan $a \in \sqrt{(\sqrt{(A)})}$ alalım. Asal radikal tanımından a yı içeren m-sistem $M(a)$ vardır ve $M(a) \cap \sqrt{(A)} \neq \emptyset$ dir. O zaman $z \in M(a) \cap \sqrt{(A)}$ olacak şekilde en az bir z elemanı vardır. $z \in \sqrt{(A)}$ olduğundan z yi içeren bir m-sistem $M(z)$ vardır ve $M(z) \cap A \neq \emptyset$ dir. $z \in M(a)$ olduğundan $M(a) \cap A \neq \emptyset$ dir. Yani $a \in \sqrt{(A)}$ olur. Dolayısıyla $\sqrt{(\sqrt{(A)})} \subseteq \sqrt{(A)}$ sağlanır.

$\square$

Teorem 3.21. P, S yarıgrubunun bir asal ideali ve A, S yarıgrubunun herhangi bir ideali olsun. $A \subseteq P$ ancak ve ancak $\sqrt{(A)} \subseteq P$ dir.

KANIT. $\Rightarrow$: $A \subseteq P$ olsun. $\sqrt{(A)} \nsubseteq P$ olduğunu varsayalım. $r \in \sqrt{(A)}$ ise $r \notin P$ dir. O halde $r \in C(P)$ ve P asal ideal olduğundan Sonuç 3.4 den $C(P)$ bir m-sistemdir. $r \in \sqrt{(A)}$ olduğundan r yi içeren bir m-sistem vardır ve $C(P) \cap A \neq \emptyset$ dir. $C(P) \cap P = \emptyset$ ve $A \subseteq P$ olduğundan $C(P) \cap A = \emptyset$ olur. Bu ise bir çelişkidir. $A \subseteq P$ ise $\sqrt{(A)} \subseteq P$ olur.

$\Leftarrow$: $\sqrt{(A)} \subseteq P$ olsun. A ideal olduğundan her $a, b \in A$ için $x = a$ veya $x = b$ alınırsa $axb \in A$ olur. Böylece A bir m-sistemdir. A, a yı içeren bir m-sistem olduğundan $A(a) \cap A \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $a \in \sqrt{(A)}$ olur. Buradan $A \subseteq \sqrt{(A)} \subseteq P$ olduğundan $A \subseteq P$ sağlanır. $\square$

Teorem 3.22. S birimli bir yarıgrup olsun. Her pozitif n tamsayısı için $\sqrt{(M)^n} = M$ olacak şekilde teklikle belirli bir M maksimal ideal vardır.

KANIT. $\sqrt{(M)} = M$ olduğunu gösterelim. M ideal olduğundan $M \subseteq \sqrt{(M)}$ dir. $\sqrt{(M)}$ ideal olduğundan $\sqrt{(M)}$ ya öz idealdir ya da öz ideal değildir. M maksimal ideal olduğundan $\sqrt{(M)} \subseteq M$ dir. $\sqrt{(M)}$ öz ideal değilse ise $\sqrt{(M)} = S$ dir. O halde $1 \in \sqrt{(M)}$ olur. Böylece 1 i içeren bir m-sistem $M(1)$ vardır ve $M(1) \cap M \neq \emptyset$ dir. $\{1\}$ tek nokta kümesi 1 i içeren bir m-sistem olduğundan $\{1\} \cap M \neq \emptyset$ dir. Buradan $1 \in M$ elde edilir. Yani $M = S$ olur. Bu ise M nin maksimal ideal olmasıyla çelişir. O halde $\sqrt{(M)} \neq S$ elde edilir. Dolayısıyla $\sqrt{(M)}$ öz idealdir. Varsayalım ki $1 < k < n$ için $\sqrt{(M)^k} = M$ olsun. Tümevarımdan,

$$\begin{aligned} \sqrt{(M)^{k+1}} &= \sqrt{(M)^k (M)} \\ &= \sqrt{(M)^k} \cap \sqrt{(M)} \quad \text{(Teorem 3.20 (ii) den)} \\ &= M \cap M = M \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her n pozitif tamsayısı için $\sqrt{(M)^n} = M$ olur. $\square$

3.2. Yarıgruplarda Asal ve Yarıasal İdealler

Asal idealler yarıgruplarda çok önemli rol oynar. Asal ideallerin arakesiti yarıasal ideal olduğundan Park ve Kim (1992) çalışmasında, S yarıgrubunun asal ideal ve yarıasal ideal arasındaki ilişki incelenmiştir.

3.2.1. Ön Hazırlıklar

Lemma 3.23. P, S yarıgrubunun bir ideali olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

1. P, S yarıgrubunun asal idealidir.

2. Herhangi $a,b \in S$ için $aSb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

KANIT. $\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}$: Teorem 3.3 den görülür.

$\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{1}$: $A,B \subseteq S$ idealleri için $AB \subseteq P$ olsun. $A \nsubseteq P$ ise $a \in A$ için $a \notin P$ olur. Herhangi bir $b \in B$ için $aSb \subseteq AB \subseteq P$ olduğundan (2) den $aSb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Fakat $a \notin P$ olduğundan $b \in P$ olur. Dolayısıyla $B \subseteq P$ elde edilir. Asal ideal tanımından P asal idealdir. □

Örnek 3.24. $m \geq 1$ olmak üzere $S = \{0, a^1, a^2, ..., a^m\}$ kümesi

$$a^i.a^j \begin{cases} a^{i+j}, & i+j \leq m \\ 0, & i+j > m \end{cases}$$

işlemi ile bir yarıgruptur. S yarıgrubunun proper ideali,

$I = \{0, a^k, a^{k+1}, ..., a^m\}(2 \leq k \leq m)$ şeklindedir ve S yarıgrubunun asal ideali değildir.

Çözüm. $\emptyset \neq I \subseteq S$, S yarıgrubunun proper ideali olsun. I ideal olduğundan her $a^i \in S$ ve $a^j \in I$ için $a^i.a^j \in I$ dır. $i = m$ alınırsa $m + j > m$ olduğundan $a^m.a^j = a^{m+j} = 0 \in I$ olur. Her $a^j \in I$ için $i + j \leq m$ ise $a^i.a^j = a^{i+j}$ ve $i + j > m$ ise $a^i.a^j = 0$ şeklindedir. $1 \leq i, j \leq m$ olduğundan $i = j = 1$ alınırsa $a^i.a^j = a^{i+j} = a^{1+1} = a^2 \in I$ olur. $i = 1$ ve $j = 2$ alınırsa $a^i.a^j = a^3 \in I$ olur.

Bu şekilde devam edilirse $a^m \in I$ elde edilir. Dolayısıyla $I = \{0, a^2, a^3, ..., a^m\}$ şeklindedir. Şimdi S yarıgrubunun $A = \{0, a^k, a^{k+1}, ..., a^m\}(2 \leq k \leq m)$,

$B = \{0, a^n, a^{n+1}, ..., a^m\}(2 \leq n \leq m)$ ve $P = \{0, a^t, a^{t+1}, ..., a^m\}(2 \leq t \leq m)$ ideallerini alalım. $AB \subseteq P$ olsun. O zaman $k + n \geq t$ olmalıdır. $k = 2$, $n = 3$ ve $t = 4$ alınırsa $A \nsubseteq P$ ve $B \nsubseteq P$ elde edilir. Dolayısıyla P asal ideal değildir. □

Lemma 3.25. Q, S yarıgrubunun bir ideali olsun. O halde aşağıdakiler denktir.

1. Q bir yarıasal idealdir.

2. $a \in S$ için $aSa \subseteq Q$ iken $a \in Q$ dur.

KANIT. **1** $\Rightarrow$ **2** : Teorem 3.8 den açıktır.

2 $\Rightarrow$ **3** : $A \subseteq S$ ideali için $A^2 \subseteq Q$ olsun. $A \nsubseteq Q$ olduğunu varsayalım. O zaman $a \in A$ için $a \notin Q$ dur. $a \in A$ için $aSa \subseteq A^2 \subseteq Q$ olduğundan **(2)** den $aSa \subseteq Q$ iken $a \in Q$ olur. Bu $A \subseteq Q$ demektir. Kabul yanlıştır. Dolayısıyla $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ve yarıasal ideal tanımından Q yarıasal idealdir. □

Lemma 3.26. $i \in I$ için P_i, S yarıgrubunun asal ideallerinin herhangi bir kümesi olsun. Eğer $Q = \cap\{P_i : i \in I\} \neq \emptyset$ ise Q, S yarıgrubunun yarıasal idealidir.

KANIT. S yarıgrubunun bir A ideali için $A^2 \subseteq Q$ olsun. $Q \subseteq P_i$ olduğundan $i \in I$ için $A^2 \subseteq P_i$ olur. Her asal ideal yarıasal ideal olduğundan $i \in I$ için $A \subseteq P_i$ elde edilir. Dolayısıyla $A \subseteq Q$ dir. Böylece Q, S yarıgrubunun yarıasal idealidir. □

3.2.2. Ana Teoremler

Teorem 3.27. S yarıgrubunun her yarıasal ideali bazı asal ideallerinin arakesitidir.

KANIT. Q, S yarıgrubunun bir yarıasal ideali ve $\{P_i : Q \subseteq P_i,\ P_i \subseteq S \text{ asal ideal}\}$ kümesini düşünelim. S nin kendisi S yarıgrubunun asal ideali olduğundan bu küme boştan farklıdır. Q yarıasal ideal olduğundan $a_1 \notin Q$ iken $a_1Sa_1 \nsubseteq Q$ dur. $a_1Sa_1 \nsubseteq Q$ olduğundan $a_2 \in a_1Sa_1$ için $a_2 \notin Q$ olur. $a_2Sa_2 \nsubseteq Q$ olduğundan $a_3 \in a_2Sa_2$ için $a_3 \notin Q$ olur. Bu şekilde devam edilirse $a_{i+1} \in a_iSa_i$ için $a_{i+1} \notin Q$ elde edilir. $A = \{a_1, a_2, ...\}$ olsun. $a_i, a_j \in A$ ve varsayalım ki $i \leq j$ olsun. O zaman $a_{j+1} \in a_jSa_j \subseteq a_iSa_j$ ve $a_{j+1} \in A$ dır. Benzer şekilde $i > j$ için $a_{i+1} \in a_iSa_i \subseteq a_jSa_i$ ve $a_{i+1} \in A$ dır. $a_{j+1} \in a_iSa_j$ iken $a_{j+1} = a_ixa_j \in A$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Dolayısıyla A bir m-sistemdir ve $A \cap Q = \emptyset$ dir. $T = \{M : M, S$ nin m-sistemi ve $a \in M$ için $M \cap Q = \emptyset\}$ kümesini düşünelim. $a \in A$ ve $A \in T$ olduğundan $T \neq \emptyset$ dir. Zorn lemma kullanarak T kümesinde bir maksimal eleman vardır. Gerçekten, her i için $A_i \in T$ bir zincir olsun. T kümesinin tanımından $a \in A_i$ ve $A_i \cap Q = \emptyset$ dir. Buradan $a \in \cup A_i$ ve $\cup A_i \cap Q = \emptyset$ dir. $\cup A_i$ bir m-sistemdir. Dolayısıyla $\cup A_i \in T$ dir. Aynı zamanda her $i \in I$ için $A_i \subseteq \cup A_i$ olduğundan $\cup A_i$, A_i kümesinin bir üst sınırıdır. O halde T kümesinde bir maksimal eleman vardır. Bu elemana M^1 diyelim.

$X = \{J : J,$ S nin ideali ve $J \cap M^1 = \emptyset, J \subseteq Q\}$ olsun. $Q \in X$ olduğundan $X \neq \emptyset$ dir. Benzer şekilde Zorn lemma kullanarak X kümesinde bir P maksimal eleman vardır. $x, y \in S/P$ ise $S^1xS^1 \cup P$ ve $S^1yS^1 \cup P$, P yi içeren S yarıgrubunun idealleri ve $M^1 \subseteq S \subseteq S^1xS^1 \cup P$ olduğundan $(S^1xS^1 \cup P) \cap M^1 \neq \emptyset$ ve $(S^1yS^1 \cup P) \cap M^1 \neq \emptyset$ dir. $sxt, uyv \in M^1$ olacak şekilde $s, t, u, v \in S^1$ vardır. M^1, m-sistem olduğundan $(sxt)m(uyv) \in M^1$ olacak şekilde $m \in S$ vardır. $(sxt)m(uyv) \notin P$ olduğundan özel olarak $s = v = 1$ alınırsa $xtmuy \notin P$ olur. Dolayısıyla $xtmuy \in S/P$ ve S/P bir m-sistemdir. $P \in X$ olup $P \subseteq Q$ olduğundan $S/P \cap Q = \emptyset$ dir. Ayrıca S/P bir m-sistem olduğundan T kümesinin tanımından $S/P \in T$ dir. $P \in X$ olduğundan X kümesinin tanımından $P \cap M^1 = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $M^1 \subseteq S/P$ dir. M^1 maksimal olduğundan $S/P = M^1$ olur ve P, Q yu içeren S yarıgrubunun asal idealidir. $a \notin P$ olduğundan

$Q \supseteq \cap\{P_i : i \in I\}$ elde edilir. Dolayısıyla $Q = \cap\{P_i : i \in I\}$ olur. Böylece

$$Q = \cap_{(i \in I)}\{P_i : P_i,\ Q \text{ yu içeren S nin asal ideali}\}$$

şeklindedir. Yani S yarıgrubunun Q yarıasal ideali Q yu içeren S yarıgrubunun bütün asal ideallerinin arakesitidir. □

Sonuç 3.28. S yarıgrubunun herhangi tamamen yarıasal ideali S yarıgrubunun asal ideallerinin arakesitidir.

KANIT. I, S yarıgrubunun tamamen yarıasal ideali olsun. Tamamen yarıasal ideal yarıasal idealdir. Gerçekten, I tamamen yarıasal ideal olduğundan $a \in S$ için $a^2 \in I$ iken $a \in I$ dır. $A^2 \subseteq I$ olsun. $a^2 \in A^2 \subseteq I$ olduğundan $a^2 \in I$ ve I tamamen yarıasal ideal olduğundan $a \in I$ olur. Dolayısıyla $A \subseteq I$ elde edilir. O halde I yarıasal idealdir. Teorem 3.27 den ispatı görülür. □

Teorem 3.29. S yarıgrubunun herhangi tamamen yarıasal ideali S yarıgrubunun tamamen asal ideallerinin arakesitidir.

KANIT. I, S yarıgrubunun tamamen yarıasal ideali olsun. $a \notin I$ ve $A = \{a, a^2, a^3, ...\}$ olsun. Tamamen yarıasal ideal yarıasal ideal olduğundan Teorem 3.27 den A bir m-sistemdir ve $A \cap I = \emptyset$ dir.

$$T = \{M : M, \text{S nin m-sistemi ve } a \in M \text{ için } M \cap I = \emptyset\}$$

kümesini düşünelim. $a \in A$ ve $A \in T$ olduğundan $T \neq \emptyset$ dir. Zorn lemma kullanarak Teorem 3.27 den T kümesinde bir M^1 maksimal eleman vardır. $X = \{J : J, \text{S nin ideali ve } J \cap M^1 = \emptyset, J \subseteq I\}$ olsun. $I \in X$ olduğundan $X \neq \emptyset$ dir. Zorn lemma kullanarak Teorem 3.27 den X kümesinde bir P maksimal eleman vardır ve $P \cap M^1 = \emptyset$ dir. Teorem 3.27 den $S/P = M^1$ olur. $<M^1>$, M^1 tarafından üretilen S yarıgrubunun bir altyarıgrubu olsun. $<M^1> \cap I \neq \emptyset$ ise $a_1a_2...a_n \in <M^1> \cap I$ vardır. Ayrıca $a_1a_2...a_n \in M^1$ dir. M^1 m-sistem olduğundan $a_1x_1a_2x_2...a_{n-1}x_{n-1}a_n \in M^1$ olacak şekilde $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in S$ vardır. $ab \in I$ olsun. I ideal olduğundan $b(ab)a = (ba)^2 \in I$ olur. I tamamen yarıasal ideal olduğundan $ba \in I$ dır. Böylece $a_1x_1a_2x_2...a_{n-1}x_{n-1}a_n \in I$ olur. Bu ise $M^1 \subseteq <M^1>$ olduğundan $M^1 \cap I = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. $<M^1> \cap I = \emptyset$ dir. M^1 kümesinin T kümesinin maksimal elemanı olmasından $M^1 = <M^1>$ dir. O halde M^1, S yarıgrubunun altyarıgrubudur. Yani $a_i, a_j \in M^1$ için $a_ia_j \in M^1$ dir. Böylece $a_i, a_j \notin P$ iken $a_ia_j \notin P$ olduğundan P tamamen asal idealdir. □

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
YARIGRUPLARDA YARIASALLIĞIN KAYNAĞI

Bu bölümde, (Albayrak ve diğerleri, 2021)'de verilen yarıasallığın kaynağı olarak adlandırılan bir küme ile ilgili tanım ve bazı özellikler verildi. Daha sonra, bu küme üzerinde yeni yarıgrup yapıları tanımlandı ve bu yapıların bazı özellikleri incelendi.

Tanım 4.1. S sıfırlı bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. S yarıgrubunun

$$S_S(A) = \{a \in S \mid aAa = (0)\}$$

altkümesi, S yarıgrubunda A kümesinin ***yarıasallığın kaynağı*** olarak adlandırılır. S yarıgrubu için S_S notasyonu $S_S(S)$ kümesinin yerine kullanılır. Böylece S yarıgrubunun yarıasallığın kaynağı

$$S_S = \{a \in S \mid aSa = (0)\}$$

olarak tanımlanır.

Uyarı 4.2. Bu çalışmada S yarıgrubu sıfırlı bir yarıgrup olarak alınacaktır. Çünkü $0 \in S$ için $0.S.0 = 0$ olduğundan $0 \in S_S$ dir. Dolayısıyla $S_S \neq \emptyset$ dir.

Önerme 4.3. $S_S = \{0\}$ olması için gerek ve yeter koşul S yarıgrubunun yarıasal olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: $S_S = \{0\}$ olsun. $a \in S$ için $aSa = (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu $a \in S_S$ demektir. $S_S = \{0\}$ olduğundan $a = 0$ dır. Dolayısıyla S yarıgrubu yarıasaldır.

$\Leftarrow$: S yarıgrubu yarıasal olsun. O zaman $a \in S$ için $aSa = (0)$ iken $a = 0$ dır. Buradan $S_S = \{a \in S \mid aSa = (0)\} = \{0\}$ elde edilir. □

Uyarı 4.4. 1. S sıfırlı bir yarıgrup ve $A \subseteq S$ olsun. $0A0 = (0)$ olduğundan $0 \in S_S(A)$ dır. Dolayısıyla $S_S(A) \neq \emptyset$ dir.

2. S yarıgrubunun bir A altyarıgrubu için $S_A \subseteq S_S(A)$ sağlanır. Gerçekten,

$a \in S_A$ alalım. S_A kümesinin tanımından $a \in A$ ve $aAa = (0)$ dır. $A \subseteq S$ olduğundan $a \in S$ ve $aAa = (0)$ olur. O halde $a \in S_S(A)$ elde edilir. Dolayısıyla $S_A \subseteq S_S(A)$ sağlanır.

3. $\emptyset \neq A, B \subseteq S$ için $A \subseteq B$ iken $S_S(B) \subseteq S_S(A)$ dır. Gerçekten,

   $A \subseteq B$ ve $a \in S_S(B)$ olsun. O zaman $a \in S$ ve $aBa = (0)$ dır. $A \subseteq B$ olduğundan $a \in S$ ve $aAa = (0)$ olur. Bu $a \in S_S(A)$ demektir. Dolayısıyla $S_S(B) \subseteq S_S(A)$ sağlanır.

Lemma 4.5. S bir yarıgrup olsun. $e \in S$ idempotent elemanı ve $y \in S$ için $xyx = x$ olacak biçimdeki $x \in S$ regüler elemanı verilsin.

1. $eS_S \subseteq S_{eS}$
2. $xyS_S \subseteq S_{xyS}$
3. S bir idempotent yarıgrup ise $S_S = \{0\}$ dır.
4. S bir regüler yarıgrup ise $S_S = \{0\}$ dır.
5. $a \in S_S$ ise a nilpotent elemandır.
6. $a \in S_S$ ise a sıfır bölen elemandır.

KANIT. 1. $a \in S_S$ için $ea \in eS_S$ olur. $a \in S_S$ olduğundan $a \in S$ ve $aSa = (0)$ dır. Buradan, $(ea)(eS)(ea) = e(a(eSe)a) \subseteq e(aSa) = e(0) = (0)$ dır. Bu $ea \in S_{eS}$ demektir. O halde $eS_S \subseteq S_{eS}$ sağlanır.

2. $xyx = x$ olup eşitliğin her iki tarafını sağdan y ile çarparsak $xyxy = xy$ olup xy idempotent eleman olur. (1) den $xyS_S \subseteq S_{xyS}$ sağlanır.

3. S bir idempotent yarıgrup ve $a \in S_S$ olsun. Buradan $a \in S$ ve $aSa = (0)$ dır. Özel olarak $a \in S$ için $aaa = 0$ olur. a idempotent eleman olduğundan $a^2 = a$ dır. Buradan $0 = aaa = a^2a = aa = a^2 = a$ olur. Böylece $S_S = \{0\}$ sağlanır.

4. S bir regüler yarıgrup ve $x \in S_S$ olsun. O halde $x \in S$ regüler elemandır ve $xSx = (0)$

dır. Bir $y \in S$ için $0 = xyx = x$ olur. Buradan $S_S = \{0\}$ sağlanır.

5. $a \in S_S$ olsun. O zaman $a \in S$ ve $aSa = (0)$ dır. $a \in S$ için $aaa = a^3 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla a nilpotent elemandır.

6. $0 \neq a \in S_S$ için $aaa = 0$ dır. Bu $a(aa) = 0$ ve $(aa)a = 0$ olarak yazılabilir. $aa = 0$ ise a sıfır bölen elemandır. Diğer taraftan $aa \neq 0$ ise a, a^2 ile belirli sıfır bölen elemandır.

□

Sonuç 4.6. S yarıgrubu için aşağıdakiler doğrudur.

1. S_S kümesinde sıfırdan farklı idempotent eleman yoktur.

2. S_S kümesinde sıfırdan farklı regüler eleman yoktur.

3. S_S kümesinin her elemanı nilpotent elemandır.

4. S_S kümesinin her elemanı sıfır bölen elemandır.

Tanım 4.7. S sıfırlı bir yarıgrup ve $S \neq S_S$ olsun.

1. Eğer $S - S_S$ kümesinin her elemanı idempotent ise S, $|S_S|$-***idempotent yarıgrup***,

2. Eğer $S - S_S$ kümesinin her elemanı regüler ise S, $|S_S|$-***regüler yarıgrup***,

3. Eğer $S - S_S$ kümesinin elemanları nilpotent eleman değilse S, $|S_S|$-***reduced yarıgrup***,

4. Eğer $S - S_S$ kümesinin elemanları ne sol sıfır bölen ne de sağ sıfır bölen ise S, $|S_S|$-***sıfır bölensiz yarıgrup***,

olarak tanımlanır.

Uyarı 4.8. Tanımlardan şu sonuçlar kolayca görülür.

1. $S=\{0\}$ ise $S_S=\{0\}=S$ dir. Bu durumda $S-S_S=\emptyset$ olduğundan bu sıfır yarıgrubu için anlamsızdır. Benzer şekilde $S=S_S$ durumunda $S-S_S=\emptyset$ olur. Böylece durumların çoğunda tanımlar anlamsızdır.

2. Bir S yarıgrubunun elemanları için,

   (a) Eğer a idempotent eleman ise a regüler elemandır.

   (b) Eğer $0\neq a$ nilpotent eleman ise a sıfır bölen elemandır.

   (c) Eğer a nilpotent eleman ise a idempotent eleman değildir.

   Yukarıdaki koşullardan aşağıdaki özellikler sağlanır.

   a Eğer S, $|S_S|$-idempotent yarıgrup ise S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur.

   b Eğer S, $|S_S|$ -idempotent yarıgrup ise S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur.

   c Eğer S, $|S_S|$ -sıfır bölensiz yarıgrup ise S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur.

3. Açıktır ki S idempotent (regüler, reduced, sıfır bölensiz) yarıgrup ise S, $|S_S|$-idempotent (regüler, reduced, sıfır bölensiz) yarıgruptur.

Örnek 4.9. S yarıgrubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	0
c	0	0	0	c

$S_S=\{0,a,b\}$ ve $S-S_S=\{c\}$ dir. $c^2=c$ ve $ccc=c$ olduğundan c idempotent ve regüler elemandır. Böylece S, $|S_S|$-idempotent yarıgrup ve S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur. Ayrıca c nilpotent eleman olmadığından S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur. Fakat $0\neq c\in S$ için $ca=0$ ve $ac=0$ olacak şekilde $0\neq a\in S$ var olduğundan c sıfır bölen elemandır. Dolayısıyla S,

$|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup değildir.

Örnek 4.10. S yarıgrubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	b	b	0
b	0	b	b	0
c	0	0	0	0

$S_S = \{0, c\}$ ve $S - S_S = \{a, b\}$ olarak bulunur. $0 \neq a \in S$ elemanı regüler ve idempotent eleman olmadığından S, $|S_S|$-regüler ve $|S_S|$-idempotent yarıgrup değildir. Ayrıca $0 \neq a \in S$ için $ac = 0$ ve $ca = 0$ olacak şekilde $0 \neq c \in S$ var olduğundan a sıfır bölen elemandır. Benzer şekilde $0 \neq b \in S$ için $bc = 0$ ve $cb = 0$ olacak şekilde $0 \neq c \in S$ var olduğundan b sıfır bölen elemandır. Bu yüzden S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup değildir. Diğer taraftan a ve b nilpotent elemanlar değildir. Dolayısıyla S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur.

Örnek 4.11. S yarıgrubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
b	0	0	b	b
c	0	0	c	c

$S_S = \{0, a\}$ ve $S - S_S = \{b, c\}$ olur. $b^2 = b$, $bbb = b$ ve $c^2 = c$, $ccc = c$ olduğundan b ve c idempotent ve regüler elemanlardır. O zaman S, $|S_S|$-idempotent ve $|S_S|$-regüler yarıgruptur. Ayrıca b ve c sıfır bölensiz elemanlardır. Çünkü $0 \neq b \in S$ için $ba = 0$ olacak şekilde $0 \neq a \in S$ vardır. Fakat $ab = a \neq 0$ dır. Böylece S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgruptur. Diğer taraftan c ve b nilpotent elemanlar değildir. Dolayısıyla S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur.

Örnek 4.12. S yarıgrubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	0	b
c	0	c	b	a

$S_S = \{0,b\}$ ve $S - S_S = \{a,c\}$ olur. $c^2 = a$ olduğundan c idempotent eleman değildir. O halde S, $|S_S|$-idempotent yarıgrup değildir. $aaa = a$ ve $ccc = c$ olduğundan a ve c regüler elemanlardır. Bu yüzden S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur. Ayrıca a ve c sıfır bölen eleman ve nilpotent elemanlar değildir. Dolayısıyla S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur ve S, $|S_S|$-sıfır-bölensiz yarıgruptur.

Örnek 4.13. $(\mathbb{N},.)$ yarıgrubunu düşünelim.

.	0	1	2	3...
0	0	0	0	0...
1	0	1	2	3...
2	0	2	4	6...
3	0	3	6	9...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$S_{\mathbb{N}} = \{0\}$ ve $\mathbb{N} - S_{\mathbb{N}} = \{1,2,3...\}$. Sadece 1 elemanı regüler ve idempotent eleman olduğundan $\mathbb{N}$, $|S_{\mathbb{N}}|$-regüler yarıgrup ve $|S_{\mathbb{N}}|$-idempotent yarıgrup değildir. Diğer taraftan $\mathbb{N} - S_{\mathbb{N}}$ kümesinde sıfır bölen eleman olmadığından $\mathbb{N}$, $|S_{\mathbb{N}}|$-sıfır bölensiz yarıgruptur. $\mathbb{N} - S_{\mathbb{N}}$ kümesinde nilpotent eleman olmadığından $\mathbb{N}$, $|S_{\mathbb{N}}|$-reduced yarıgruptur.

Önerme 4.14. A, S yarıgrubunun bir altyarıgrubu olsun. Aşağıdaki koşullar geçerlidir.

1. S, $|S_S|$-idempotent (regüler) yarıgrup ise A, $|S_A|$-idempotent (regüler) yarıgruptur.

2. S, $|S_S|$-reduced (sıfır bölensiz) yarıgrup ise A, $|S_A|$-reduced (sıfır bölensiz) yarıgruptur.

KANIT. 1. S, $|S_S|$-idempotent (regüler) yarıgrup ve $a \in A - S_A$ olsun. O zaman $a \in A$ ve $a \notin S_A$ dır. $a \notin S_A$ olduğundan $aAa \neq (0)$ dır. $A \subseteq S$ olduğundan $a \in S$ ve $aSa \neq (0)$ elde edilir. O halde $a \notin S_S$ olur. Bu $a \in S - S_S$ demektir. Böylece A, $|S_A|$-idempotent (regüler) yarıgruptur.

2. S, $|S_S|$-reduced (sıfır bölensiz) yarıgrup ve $a \in A - S_A$ olsun. O zaman $a \in A$ ve $a \notin S_A$ dır. $A \subseteq S$ olduğundan **(1)** den $a \in S$ ve $a \notin S_S$ olur. Bu $a \in S - S_S$ demektir. Böylece A, $|S_A|$-reduced (sıfır bölensiz) yarıgruptur.

□

Örnek 4.15. $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ yarıgrubunu düşünelim. M, matrislerde çarpma işlemine göre sıfır elemanı olan bir yarıgruptur. $S_M = \left\{ A \in M : AMA = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\}$ şeklindedir. $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \in M$ için $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ ise

$\begin{bmatrix} ax & ay+bx & 0 \\ 0 & ax & 0 \\ 0 & 0 & ax \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} axa & axb+aya+bxa & 0 \\ 0 & axa & 0 \\ 0 & 0 & axa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ olur.

$axa = 0$ ve $axb + aya + bxa = 0$ dır. $x = 0$ için $\begin{bmatrix} 0 & aya & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$. Bu yüzden $a = 0$ olmalı. O zaman $\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in S_M$ dir. $b = y$ için $S_M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$ ve $M - S_M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \right\}$ bulunur. Her $A = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \in M - S_M$ için $ABA = A$ olacak şekilde bir $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{-y}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix} \in M - S_M$ vardır. O halde M, $|S_M|$-regüler yarıgruptur. Diğer taraftan $M - S_M$ kümesinin elemanları $x = 0$ için nilpotent elemanlardır.

Fakat, $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy+yx & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ olduğundan M yarıgrubunun tanımından nilpotent eleman yoktur. Ayrıca $M - S_M$ kümesinin sıfır bölen elemanı yoktur. Çünkü, $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ için

$$\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb+ya & 0 \\ 0 & xa & 0 \\ 0 & 0 & xa \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde M, $|S_M|$-sıfır bölensiz yarıgruptur. Şimdi M yarıgrubunun bir $A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ altyarıgrubunu alalım. $S_A = \left\{ B \in A : BAB = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\}$ şeklindedir. $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \in A$ için $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ ise

$$\begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & ax & 0 \\ 0 & 0 & ax \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} axa & 0 & 0 \\ 0 & axa & 0 \\ 0 & 0 & axa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

olur. $axa = 0$ dır. Hem $x = 0$ hem $a = 0$ için $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. O halde $S_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A - S_A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \right\}$ olur. Her $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \in A - S_A$ için $ABA = A$ olacak şekilde $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix} \in A - S_A$ vardır. O halde A, $|S_A|$-regüler yarıgruptur. Aynı zamanda $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ dır. Yani $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}^n \neq \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ olduğundan nilpotent eleman yoktur. O halde A, $|S_A|$-reduced yarıgruptur. Diğer taraftan, $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ için

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $A - S_A$ kümesinin sıfır bölen elemanı yoktur. A, $|S_A|$-sıfır bölensiz yarıgruptur.

Önerme 4.16. S sıfırlı bir yarıgrup olsun.

1. S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup ise $S - S_S$ altyarıgruptur.

2. S değişmeli, $|S_S|$-idempotent (regüler) yarıgrup ise $S - S_S$ altyarıgruptur.

KANIT. 1. S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup ve $x, y \in S - S_S$ olsun. O zaman x ve y sıfır bölensiz elemanlardır. Buradan $x(yc) = 0 \Rightarrow yc = 0 \Rightarrow c = 0$ olur. Dolayısıyla xy sıfır bölensiz elemandır. Bu $xy \in S - S_S$ demektir. Böylece $S - S_S$ altyarıgruptur.

2. Değişmeli yarıgrupta idempotent elemanların çarpımı idempotent, regüler elemanların çarpımı regüler ve nilpotent elemanların çarpımı nilpotent elemanlardır. S, $|S_S|$-idempotent (regüler) yarıgrup ve $a, b \in S - S_S$ olsun. Buradan $a, b \in S$ ve $a, b \notin S_S$dir. O halde $aSa \neq (0)$ ve $bSb \neq (0)$ dır. $b \in S$ için $aba \neq 0$ ve S değişmeli olduğundan $aab \neq 0 \Rightarrow a^2b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $ab \in S_S$ olsun. S_S kümesinin tanımından $ab \in S$ ve $(ab)S(ab) = (0)$ dır. $a \in S$ için

$$(ab)a(ab) = 0 \Rightarrow abaab = 0 \Rightarrow aba^2b = 0 \Rightarrow abab = 0 \Rightarrow (ab)^2 = 0 \Rightarrow ab = 0$$

olur. Bu çelişkidir. Dolayısıyla $ab \notin S_S$ olmalıdır. O halde $ab \in S - S_S$ dir. Böylece $S - S_S$ altyarıgruptur.

□

Lemma 4.17. S, $|S_S|$-sıfır bölensiz veya $|S_S|$-reduced yarıgrup ise;

1. $S_S = \{a \in S \mid a^3 = 0\}$ dır.

2. Özel olarak S monoid ise $S_S = \{a \in S \mid a^2 = 0\}$ dır.

KANIT. 1. S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup olsun. $A = \{a \in S \mid a^3 = 0\}$ kümesi için $S_S \subseteq A$ her zaman sağlanır. Gerçekten, $a \in S_S$ alalım. S_S kümesinin tanımından $aSa = (0)$ dır. $a \in S$ için $0 = aaa = a^3$ olur. O halde $a \in A$ elde edilir. Dolayısıyla $S_S \subseteq A$ sağlanır. Şimdi keyfi $a \in A$ alalım. Kabul edelim ki $a \in S - S_S$ olsun. Bu durumda

$$0 = a^3 = aa^2 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

elde edilir. Fakat bu $a \notin S - S_S$ demektir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $a \in S_S$ dir. Dolayısıyla $A \subseteq S_S$ sağlanır. O halde $A = S_S$ dir. Şimdi S, $|S_S|$-reduced yarıgrubunu düşünelim. Benzer şekilde A kümesi için $S_S \subseteq A$ olduğu görülür. Keyfi bir $a \in A$ için $a^3 = 0$ olduğundan a nilpotent elemandır. S, $|S_S|$-reduced yarıgrup olduğundan $S - S_S$ kümesinde nilpotent eleman yoktur. O halde $a \notin S - S_S$ dir. Buradan $a \in S_S$ elde edilir. Dolayısıyla $A \subseteq S_S$ bulunur. O halde $A = S_S$ sağlanır.

2. $A = \{a \in S \mid a^2 = 0\}$ olmak üzere $a \in S_S$ alalım. Buradan $a \in S$ ve $aSa = (0)$ dır. Özel olarak $1_S \in S$ için $a1_Sa = a^2 = 0$ olduğundan $a \in A$ olur. Dolayısıyla $S_S \subseteq A$ elde edilir. Şimdi keyfi $a \in A$ alalım. Kabul edelim ki $a \in S - S_S$ olsun. A kümesinin tanımından $a^2 = 0$ dır. Bu ise $0 = a$ olmasını gerektirir. Bu da kabulümüz ile çelişir. O halde $a \in S_S$ dir. Dolayısıyla $A \subseteq S_S$ dir. Yani $A = S_S$ sağlanır.

□

Lemma 4.18. $(\mathbb{Z}_n, .)$ yarıgrubunu alalım. Bir p asal sayısı için $n = p^2$ ise

$S_{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{0}, \overline{p}, \overline{2p}, ..., \overline{(p-1)p}\}$ dir. Özel olarak $n = p$ asal sayısı için $S_{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{0}\}$ dır.

KANIT. p asal sayı olmak üzere $n = p^2$ olsun. Lemma 4.17 den keyfi $\overline{a} \in S_{\mathbb{Z}_n}$ için $\overline{a^2} = \overline{0}$ dır. O halde $n = p^2|a^2$ olur. Buradan $pp|a^2 \Rightarrow p|a^2$ ve $p|a^2$ dir. p asal sayı olduğundan $p|a$ elde edilir. Buradan $a = pk$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $S_{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{0}, \overline{p}, \overline{2p}, ..., \overline{(p-1)p}\}$ olur. Diğer taraftan $n = p$ asal sayısı için $\overline{p} = \overline{0}$ olduğundan

$$S_{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{0}, \overline{p}, \overline{2p}, ..., \overline{(p-1)p}\} = \{\overline{0}\}$$

bulunur. □

Teorem 4.19. $(\mathbb{Z}_n, .)$ yarıgrubunu alalım.

1. $n > 2$ için $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-idempotent monoid değildir.

2. p asal sayı olmak üzere n sayısı p ya da p^2 ise $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-regüler monoidtir.

3. n nin bir asal sayı ya da bir asal sayının karesi olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{Z}_n$ yarıgrubunun $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-sıfır bölensiz monoid olmasıdır.

4. n asal sayı ise $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-reduced monoidtir.

KANIT. 1. $\mathbb{Z}_2$ monoidi için,

.	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$S_{\mathbb{Z}_2} = \{\overline{0}\}$ ve $\mathbb{Z}_2$- $S_{\mathbb{Z}_2} = \{\overline{1}\}$ şeklindedir. O halde $\overline{1}$ idempotent elemandır. Bu yüzden $\mathbb{Z}_2$, $|S_{\mathbb{Z}_2}|$-idempotent monoidtir. $n > 2$ için $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-idempotent monoid ve $\overline{a} \in S_{\mathbb{Z}_n}$ tersinir eleman olsun. O halde $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ için $\overline{a}\mathbb{Z}_n\overline{a} = \overline{(0)}$ ve $\overline{a}\overline{a^{-1}} = \overline{a^{-1}}\overline{a} = \overline{1}$ olacak şekilde $\overline{a^{-1}} \in \mathbb{Z}_n$ vardır. Buradan $\overline{0} = \overline{a}\overline{a^{-1}}\overline{a} = \overline{aa^{-1}}\overline{a}$ sağlanır. Bu $\overline{a} = \overline{0}$ olmasını gerektirir. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $S_{\mathbb{Z}_n}$ kümesinde tersinir eleman yoktur. Böylece $\overline{1} \neq \overline{a} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ dir. Bu durumda $\overline{a}$ bir idempotent elemandır. Ancak birimden farklı bir tersinir eleman idempotent eleman olamaz. Dolayısıyla kabul yanlıştır. $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-idempotent monoid değildir.

2. Lemma 4.18 den n asal sayı ise $S_{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{0}\}$ dır. $n = p^2$, p asal sayı ise $S_{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{0}, \overline{p}, \overline{2p}, ..., \overline{(p-1)p}\}$ dir. Herhangi bir $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ için $ebob(n,a) = 1$ ise $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ tersinir elemandır. O halde her $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ için $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a} = \overline{1}$ olacak şekilde $\overline{b} = \overline{a^{-1}} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ vardır. $\overline{b}\overline{a} = \overline{1}$ eşitliğinin her iki tarafını soldan $\overline{a}$ ile çarparsak $\overline{a}\overline{b}\overline{a} = \overline{a}$ olur. $\overline{a}$ regüler elemandır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-regüler monoidtir.

3. $\Rightarrow$: p bir asal sayı olmak üzere n ya p ya da p^2 olsun. **(2)** den $\overline{0} \neq \overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ tersinir elemandır. O halde $\overline{a}\overline{a^{-1}} = \overline{a^{-1}}\overline{a} = \overline{1}$ olacak şekilde $\overline{a^{-1}} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ vardır. $\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ için $\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$ eşitliğinin her iki tarafını $\overline{a^{-1}}$ ile çarparsak $\overline{a^{-1}}\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$ iken $\overline{b} = \overline{0}$ olur. O halde $\overline{a}$ sıfır bölensiz elemandır. Böylece $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-sıfır bölensiz monoidtir.

   $\Leftarrow$: $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-sıfır bölensiz monoid olsun. Bu durumda her $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ sıfır bölensiz elemanı tersinir elemandır ve $ebob(n,a) = 1$ dir. Kabul edelim ki n asal sayı olmasın ve p asal sayısı için $n = pk$ $(1 < k < n)$ olsun. O zaman $ebob(p,n) \neq 1$ olduğundan p tersinir eleman değildir. Lemma 4.17 den $\overline{p} \in S_{\mathbb{Z}_n}$ ve $p^2 = \overline{0}$ dır. Buradan $n|p^2 \Rightarrow pk|p^2 \Rightarrow k|p$ olur. p asal sayı olduğundan $k = 1$ veya $k = p$ dir. $1 < k < n$ olduğundan $k = p$ elde edilir. Dolayısıyla $n = pk = pp = p^2$ sağlanır.

4. $n = p$ asal sayı olsun. **(2)** den sıfırdan farklı her $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ tersinir elemandır. Kabul edelim ki $\overline{a}$ nilpotent eleman olsun. O zaman $\overline{a^n} = \overline{0}$ olacak şekilden bir pozitif n tamsayısı vardır. Aynı zamanda $\overline{a}\overline{a^{-1}} = \overline{a^{-1}}\overline{a} = \overline{1}$ olacak şekilde $\overline{a^{-1}} \in \mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ vardır. $\overline{a^n} = \overline{0}$ eşitliğinin her iki tarafını $\overline{a^{-1}}$ ile çarparsak $\overline{a^{n-1}} = \overline{a^n}\overline{a^{-1}} = \overline{0}$ olur. Bu şekilde devam edilirse $\overline{a} = \overline{0}$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $\mathbb{Z}_n$-$S_{\mathbb{Z}_n}$ kümesinde nilpotent eleman yoktur. $\mathbb{Z}_n$, $|S_{\mathbb{Z}_n}|$-reduced monoidtir.

□

Örnek 4.20. $(\mathbb{Z}_4, .)$ monoidinin işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	1	2	3
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$S_{\mathbb{Z}_4} = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ ve $\mathbb{Z}_4 - S_{\mathbb{Z}_4} = \{\overline{1}, \overline{3}\}$ dir. $\overline{3}.\overline{3} = \overline{1}$ olduğundan $\overline{3}$ idempotent eleman değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_4$, $|S_{\mathbb{Z}_4}|$-idempotent monoid değildir. Fakat $\overline{3}.\overline{3}.\overline{3} = \overline{3}$ ve $\overline{1}.\overline{1}.\overline{1} = \overline{1}$ olduğundan $\overline{1}$ ve $\overline{3}$ elemanları regüler elemanlardır. Bu yüzden $\mathbb{Z}_4$, $|S_{\mathbb{Z}_4}|$-regüler monoidtir. Ayrıca $\overline{1}$ ve $\overline{3}$ sıfır bölen elemanlar değildir. Bu durumda $\mathbb{Z}_4$, $|S_{\mathbb{Z}_4}|$-sıfır bölensiz monoidtir. $\overline{1}$ ve $\overline{3}$ nilpotent elemanlar olmadığından $\mathbb{Z}_4$, $|S_{\mathbb{Z}_4}|$-reduced monoidtir.

Örnek 4.21. $(\mathbb{Z}_8, .)$ monoidinin işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$S_{\mathbb{Z}_8} = \{\overline{0}, \overline{4}\}$ ve $\mathbb{Z}_8 - S_{\mathbb{Z}_8} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ dir. Sadece $\overline{1}$ elemanı idempotent eleman olduğundan $\mathbb{Z}_8$, $|S_{\mathbb{Z}_8}|$-idempotent monoid değildir. $\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = \overline{0}$ olduğundan $\overline{2}$ regüler eleman değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_8$, $|S_{\mathbb{Z}_8}|$-regüler monoid değildir. Diğer taraftan, $\overline{0} \neq \overline{2}$ ve $\overline{0} \neq \overline{4}$ elemanları için $\overline{2}.\overline{4} = \overline{0}$ olduğundan $\overline{2}$ sıfır bölen elemandır. Aynı zamanda $\overline{2}^3 = \overline{0}$ olduğundan $\overline{2}$ nilpotent elemandır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_8$, $|S_{\mathbb{Z}_8}|$-sıfır bölensiz ve $\mathbb{Z}_8$, $|S_{\mathbb{Z}_8}|$-reduced monoid değildir.

Lemma 4.22. $\emptyset \neq I, J \subseteq S$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $S_I \cap S_J \subseteq S_{I \cap J}$ dır.

2. I sol (sağ) ideal ise $S_S(I)$ sağ (sol) idealdir. Özel olarak S_S, S yarıgrubunun idealidir.

3. I sol (sağ) ideal ise S_I sağ (sol) idealdir.

4. I ve J ideal ise $S_S(I)S_S(J) \subseteq S_S(IJ)$ dır.

5. I ve J ideal ise $S_I S_J \subseteq S_{IJ}$ dır.

KANIT. 1. $a \in S_I \cap S_J$ alalım. O zaman $a \in S_I$ ve $a \in S_J$ dır. S_I ve S_J kümelerinin tanımından $aIa = (0)$ ve $aJa = (0)$ dır. $I \cap J \subseteq I$ olduğundan $a(I \cap J)a \subseteq aIa = (0)$ olur. Böylece $a \in S_{I \cap J}$ elde edilir. Dolayısıyla $S_I \cap S_J \subseteq S_{I \cap J}$ sağlanır.

2. I sol ideal ve $a \in S_S(I)$ alalım. Buradan $a \in S$ ve $aIa = (0)$ dır. Keyfi $x \in I$ ve $s \in S$ için $sx \in I$ olur. O halde $(as)I(as) = (a(sI)a)s \subseteq (aIa)s = (0)s = (0)$ dır. Dolayısıyla $as \in S_S(I)$ olup $S_S(I)$ sağ idealdir.

3. I sol ideal ve $a \in S_I$ olsun. O zaman $a \in I$ ve $aIa = (0)$ dır. Dolayısıyla keyfi bir $s \in S$ için $(as)I(as) = (a(sI)a)s \subseteq (aIa)s = (0)s = (0)$ olup $as \in S_I$ olur. S_I sağ idealdir.

4. I ve J ideal olsun. $x \in S_S(I)S_S(J)$ alalım. O halde $x = ab$ olacak şekilde $a \in S_S(I)$ ve $b \in S_S(J)$ vardır. O zaman $aIa = (0)$ ve $bJb = (0)$ dır. Dolayısıyla

$$(ab)(IJ)(ab) = (a(bIJ)a)b \subseteq (aIa)b = (0)b = (0)$$

dır. Bu ise $ab \in S_S(IJ)$ demektir. Böylece $S_S(I)S_S(J) \subseteq S_S(IJ)$ elde edilir.

5. I ve J ideal olsun. $x \in S_I S_J$ olsun. O halde $x = ab$ olacak şekilde $a \in S_I$ ve $b \in S_J$ vardır. **(4)** den $bIJ \subseteq I$ dır. Dolayısıyla

$$(ab)(IJ)(ab) = (a(bIJ)a)b \subseteq (aIa)b = (0)b = (0)$$

sağlanır. Bu $ab \in S_{IJ}$ demektir. Böylece $S_I S_J \subseteq S_{IJ}$ elde edilir.

□

Sonuç 4.23. I ve J, S yarıgrubunun sol (sağ) ideal ve $I \cap J \neq \emptyset$ ise $S_S(I) \cap S_S(J)$ sağ (sol) idealdir.

KANIT. I ve J, S yarıgrubunun sol (sağ) ideal ve $I \cap J \neq \emptyset$ olsun. $a \in S_S(I) \cap S_S(J)$ alalım. $a \in S_S(I)$ ve $a \in S_S(J)$ dır. Lemma 4.22 (2) den $S_S(I)$ ve $S_S(J)$ sağ (sol) idealdir. Dolayısıyla $S_S(I) \cap S_S(J)$ sağ (sol) idealdir. □

Teorem 4.24. S bir değişmeli yarıgrup olsun. S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul her I ve J ideali için $I \cap J - S_{I\cap J} = IJ - S_{IJ}$ olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olsun. $x \in I \cap J - S_{I\cap J}$ alalım. Buradan

$x \in I \cap J \subseteq S$ ve $x \notin S_{I\cap J}$ dır. Varsayalım ki $x \in S_S$ olsun. O halde $xSx = 0$ dır. S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olduğundan $xyx = x$ olacak şekilde $y \in S$ vardır. $y \in S$ için $0 = xyx = x$ elde edilir. Bu sonuç $x \notin S_{I\cap J}$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden $x \in S$ ve $x \notin S_S$ dir. Bu ise x regüler eleman demektir. Bu yüzden $xyx = x$ olacak şekilde $y \in S$ vardır. I ve J ideal olduğundan $x = x(yx) \in IJ$ yazılır. Böylece $x \notin S_{IJ}$ dır. Önerme 4.14 den S, $|S_S|$-regüler yarıgrup iken IJ, $|S_{IJ}|$-regüler yarıgruptur. O zaman $x \in IJ - S_{IJ}$ olup $I \cap J - S_{I\cap J} \subseteq IJ - S_{IJ}$ elde edilir. Diğer taraftan, $x \in IJ - S_{IJ}$ alalım. O halde x regüler elemandır. Çünkü $x \in IJ \subseteq S$ ve $S_S \subseteq S_{IJ}$ olduğundan $x \notin S_S$ dir. Ayrıca $IJ \subseteq I \cap J$ olduğundan $S_{I\cap J} \subseteq S_{IJ}$ dır. O halde $x \in I \cap J$ olur ve x regüler elemanı için $x \notin S_{I\cap J}$ kullanılarak $x \in I \cap J - S_{I\cap J}$ olur. Bu yüzden $IJ - S_{IJ} \subseteq I \cap J - S_{I\cap J}$ sağlanır. O halde $IJ - S_{IJ} = I \cap J - S_{I\cap J}$ elde edilir.

$\Leftarrow$: I ve J ideal ve $a \in S - S_S$ için $IJ - S_{IJ} = I \cap J - S_{I\cap J}$ olsun.

$(a) = \{ax : x \in S\} \cup \{a\}$ kümesini düşünelim. Hipotezden,

$$(a) - S_{(a)} = ((a) \cap S) - S_{((a)\cap S)} = (a)S - S_{(a)S} = aS - S_{aS}$$

dir. $a \notin S_S$ ve $S_{(a)} \subseteq S_S$ kullanılarak $a \in (a) - S_{(a)}$ elde edilir. Bu yüzden $a \in aS - S_{aS}$ dir. Ayrıca S değişmeli yarıgrup olduğundan $aS = Sa$ dır. Hipotezden,

$$aS - S_{aS} = (aS \cap Sa) - S_{(aS\cap Sa)} = aSSa - S_{aSSa} = aS^2a - S_{aS^2a}$$

dır. Buradan $a \in (aS^2a - S_{aS^2a})$ elde edilir. Bu demektir ki bazı $b \in S^2 \subseteq S$ için $a = aba$ olacak şekilde a regüler elemandır. Böylece S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur. $\square$

Teorem 4.25. S değişmeli yarıgrup olsun. S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul her I ideali için $I^2 - S_{I^2} = I - S_I$ olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olsun. I ideali için Teorem 4.24 kullanılarak

$I^2 - S_{I^2} = II - S_{II} = I \cap I - S_{I \cap I} = I - S_I$ sağlanır.

$\Leftarrow$: Her I ideali için $I^2 - S_{I^2} = I - S_I$ olsun. J ideali için $I \cap J$ ideal olduğundan hipotezden $I \cap J - S_{I \cap J} = (I \cap J)^2 - S_{(I \cap J)^2} \subseteq (I \cap J)(I \cap J) - S_{(I \cap J)(I \cap J)}$ dır. Lemma 4.22 (5) den $S_I S_J \subseteq S_{IJ}$ kullanılarak $S_{I \cap J} S_{I \cap J} \subseteq S_{(I \cap J)^2}$ sağlanır. $IJ \subseteq I \cap J$ olduğundan

$I \cap J - S_{I \cap J} \subseteq (IJ)^2 - S_{(IJ)^2}$ olur. Böylece $S_{IJ} S_{IJ} \subseteq S_{(IJ)^2} \subseteq S_{IJ}$ olup

$I \cap J - S_{I \cap J} \subseteq IJ - S_{IJ}$ olur. Ayrıca $IJ \subseteq I \cap J$ ise $IJ - S_{IJ} \subseteq I \cap J - S_{I \cap J}$ sağlanır. Buradan $I \cap J - S_{I \cap J} = IJ - S_{IJ}$ olur. O halde Teorem 4.24 den S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur.

□

Teorem 4.26. S değişmeli, $|S_S|$-regüler yarıgrup ise S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur.

KANIT. S değişmeli, $|S_S|$-regüler yarıgrup olsun ve $a \in S - S_S$ nilpotent eleman olsun. Bu durumda $a^n = 0$ ve $a^{n-1} \neq 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. a regüler eleman olduğundan $aba = a$ olacak şekilde $b \in S$ vardır. S değişmeli olduğundan $a^2b = a$ olur. Bu yüzden $0 = a^n = a^{n-2}a^2 = a^{n-2}a^2b = a^{n-2}a = a^{n-1}$ olur. Fakat bu $a^{n-1} \neq 0$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden kabul yanlıştır. $S - S_S$ kümesinde nilpotent eleman yoktur. Böylece S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur. □

Örnek 4.27. S yarıgrubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	0	a	b	c	d	e
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	c	0	0
b	0	0	b	0	d	0
c	0	0	c	0	a	0
d	0	d	0	b	0	0
e	0	0	0	0	0	0

$S_S = \{0, e\}$ ve $S - S_S = \{a, b, c, d\}$ dir. $cc = 0$ olduğundan c idempotent eleman değildir. O halde S, $|S_S|$-idempotent yarıgrup değildir. Diğer taraftan $aaa = a$, $cdc = ac = c$, $bbb = b$ ve $dcd = d$ olduğundan $S - S_S$ kümesinin her elemanı regüler elemandır. Böylece S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur. $cc = 0$ ve $dd = 0$ olduğundan c ve d nilpotent elemanlardır. Dolayısıyla S, $|S_S|$-reduced yarıgrup değildir. $0 \neq a$ ve $0 \neq b$ için $ab = 0$ olduğundan a sıfır bölen elemandır. O halde S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup değildir.

BEŞİNCİ BÖLÜM
YARIGRUP ÇEŞİTLERİNDE YARIASALLIĞIN KAYNAĞI

Bu tez kapsamında elde edilen yeni teoremler, sonuçlar ve ilişkiler aşağıda verilmiştir.

Tanım 5.1. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. $x \in S - S_S$ için $xx^{-1}x = x$ ve $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $x^{-1} \in S$ varsa S ye $|S_S|$-***tersinir yarıgrup*** denir.

Tanım 5.2. S sıfırlı bir yarıgrup olsun. $x \in S - S_S$ için $xx^{-1}x = x$ ve $xx^{-1} = x^{-1}x$ olacak şekilde teklikle belirli $x^{-1} \in S$ varsa S ye $|S_S|$-***tamamen regüler yarıgrup*** denir.

Lemma 5.3. $S - S_S$ kümesinin her elemanının tersinir eleman olması için gerek ve yeter koşul S yarıgrubunun $|S_S|$-regüler yarıgrup olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: $S - S_S$ kümesinin her elemanı tersinir eleman ve $a \in S - S_S$ alalım. O zaman $aba = a$ ve $bab = b$ olacak şekilde $b \in S$ vardır. Dolayısıyla a ve b regüler elemanlardır. S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur.

$\Leftarrow$: S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olsun. $a \in S - S_S$ alalım. O halde $aba = a$ olacak şekilde $b \in S$ vardır. Her regüler elemanın tersi var olduğundan a tersinir elemandır. Dolayısıyla $S - S_S$ nin her elemanı tersinir elemandır. $\square$

Teorem 5.4. S, $|S_S|$- tersinir yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul S, $|S_S|$-regüler yarıgrup ve S yarıgrubunun idempotent elemanları birbiri ile değişmeli olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: S, $|S_S|$-tersinir yarıgrup olsun. Lemma 5.3 dan S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur. $e, f \in S$ idempotent elemanlar olsun. İdempotent elemanların çarpımı idempotent eleman olduğundan ef, fe idempotent elemanlardır. Böylece $(ef)(fe)(ef) = efef = (ef)^2 = ef$ ve $(fe)(ef)(fe) = fefe = (fe)^2 = fe$ dir. S, $|S_S|$-tersinir yarıgrup olduğundan ef elemanının tersi $(ef)^{-1}$ ve fe dir. Aynı zamanda tersinir yarıgrupta $ef \in S$ idempotent elemanı için $ef = (ef)^{-1}$ dir. Dolayısıyla $(ef)^{-1} = ef = fe$ olduğundan idempotentler değişmelidir.

$\Leftarrow$: S, $|S_S|$-regüler yarıgrup ve S yarıgrubunun idempotent elemanları birbiri ile değişmeli olsun. $e, f \in S$ idempotent eleman olmak üzere $ef, fe \in S$ idempotent ve $ef = fe$ dir. $e, f \in S - S_S$ alalım. O halde

$$efe = e \Rightarrow eef = e \Rightarrow ef = e$$

ve

$$fef = f \Rightarrow ffe = f \Rightarrow fe = f$$

olacak şekilde $e, f \in S$ vardır. Buradan $e = ef = fe = f$ elde edilir. Her regüler elemanın tersi var olduğundan $e = efe$, $fef = f$ ve $e = f$ olduğundan S, $|S_S|$-tersinir yarıgruptur. $\square$

Teorem 5.5. S değişmeli bir yarıgrup olsun. $S - S_S$ kümesinin her elemanı tersinir eleman ise S, $|S_S|$-tersinir yarıgruptur.

KANIT. $a \in S - S_S$ tersinir eleman olsun. O zaman $aba = a$ ve $bab = b$ olacak şekilde en az bir $b \in S$ vardır. Kabul edelim ki a elemanının başka bir tersi c olsun. O halde $aca = a$ ve $cac = c$ dir. Buradan,

$b = bab = b(aca)b = bac(a)b = bac(aca)b = (bac)(ac)(ab) = (bac)(ab)(ac) = (ba)(ca)(bac) = (ca)(ba)(bac) = c(aba)(bac) = ca(bac) = c(aba)c = cac = c$

dir. Dolayısıyla $b = c$ olduğundan a elemanının tersi teklikle belirlidir. Dolayısıyla S, $|S_S|$-tersinir yarıgruptur. $\square$

Teorem 5.6. S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgrup ise S, $|S_S|$-tersinir (regüler) yarıgruptur.

KANIT. S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgrup olsun. $x \in S - S_S$ alalım. O zaman $xx^{-1}x = x$ ve $x^{-1}x = xx^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $x^{-1} \in S$ vardır. $x^{-1}x = xx^{-1}$ eşitliğinin her iki tarafını soldan x^{-1} elemanı ile çarparsak,

$$x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}x^{-1}x \Rightarrow (xx^{-1}x)^{-1} = x^{-1}xx^{-1} \Rightarrow x^{-1} = x^{-1}xx^{-1}$$

elde edilir. O halde $x \in S - S_S$ tersinir elemandır. Dolayısıyla S, $|S_S|$-tersinir yarıgruptur. $\square$

Örnek 5.7. S yarıgrubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	0
b	0	b	b	0
c	0	0	0	0

$S_S = \{0, c\}$ ve $S - S_S = \{a, b\}$ dir. $aaa = a$, $bbb = b$ olduğundan a ve b regüler elemanlardır. S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur. Aynı zamanda a ve b idempotent elemanlar olduğundan S, $|S_S|$-idempotent yarıgruptur. $0 \neq a, b \in S$ için $ac = 0$, $ca = 0$ ve $cb = 0$, $bc = 0$ olacak şekilde $0 \neq c \in S$ olduğundan a ve b sıfır bölen elemanlardır. S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup değildir. a ve b nilpotent eleman olmadığından S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur. $aaa = a$, $bbb = b$, $aba = a$ ve $bab = b$ olduğundan her elemanın tersi teklikle belirli değildir. Dolayısıyla S, $|S_S|$-tersinir yarıgrup değildir. Ayrıca $ab = a \neq b = ba$ olduğundan S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgrup değildir.

Teorem 5.8. S değişmeli $|S_S|$-tersinir yarıgrup ise S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgruptur.

KANIT. S değişmeli $|S_S|$-tersinir yarıgrup olsun. $a \in S - S_S$ alalım. O halde $aa^{-1}a = a$ ve $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $a^{-1} \in S$ vardır. $a = aa^{-1}a$ eşitliğinin her iki tarafını sağdan a^{-1} elemanı ile çarparsak,

$$aa^{-1} = aa^{-1}aa^{-1} \Rightarrow aa^{-1} = a^{-1}aa^{-1}a \Rightarrow aa^{-1} = a^{-1}a$$

elde edilir. O halde S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgruptur. □

Teorem 5.9. S değişmeli, $|S_S|$-regüler yarıgrup ise S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgruptur.

KANIT. S değişmeli $|S_S|$-regüler yarıgrup olsun. $a \in S - S_S$ alalım. O zaman a regüler elemanı tersinir elemandır. Teorem 5.5 den S, $|S_S|$-tersinir yarıgruptur. Teorem 5.8 den S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgruptur. □

Teorem 5.10. S değişmeli, $|S_S|$-idempotent yarıgrup ise S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgruptur.

KANIT. S, $|S_S|$-idempotent yarıgrup ve $a \in S - S_S$ alalım. O zaman $a^2 = a$ dır. $a^3 = aa^2 = aa = a$ olduğundan a regüler elemandır. Dolayısıyla a tersinir elemandır. Teorem 5.5 den S, $|S_S|$-tersinir yarıgruptur. Teorem 5.8 den S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgruptur. $\square$

Örnek 5.11. S yarıgrubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi olsun.

.	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	0	0
b	0	0	0	a	b
c	0	c	d	0	0
d	0	0	0	c	d

$S_S = \{0\}$ ve $S - S_S = \{a,b,c,d\}$ dir. $aaa = a$, $bcb = b$, $cbc = c$, $ddd = d$ olduğundan S, $|S_S|$-regüler yarıgruptur. $bb = 0$ olduğundan S, $|S_S|$-idempotent yarıgrup değildir. $0 \neq a \in S$ için $ad = 0$ ve $da = 0$ olacak şekilde $0 \neq d \in S$ olduğundan a ve d sıfır bölen elemanlardır. Dolayısıyla S, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup değildir. $bb = 0$ ve $cc = 0$ olduğundan b ve c nilpotent elemanlardır. S, $|S_S|$-reduced yarıgrup değildir. Her elemanın tersi teklikle belirli olduğundan S, $|S_S|$-tersinir yarıgruptur. $cbc = c$ ve $bcb = b$ fakat $bc = a \neq d = cb$ olduğundan her eleman tersi ile değişmeli değildir. Dolayısıyla S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgrup değildir.

Teorem 5.12. S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgrup ise S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur.

KANIT. S, $|S_S|$-tamamen regüler yarıgrup ve $a \in S - S_S$ nilpotent eleman olsun. O halde $a^n = 0$ ve $a^{n-1} \neq 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı vardır. Aynı zamanda $aa^{-1}a = a$ ve $aa^{-1} = a^{-1}a$ olacak şekilde teklikle belirli $a^{-1} \in S$ vardır.

$$aa^{-1}a = a \Rightarrow aaa^{-1} = a \Rightarrow a^2a^{-1} = a$$

dır. Böylece,

$$0 = a^n = a^{n-2}a^2 = a^{n-2}a^2a^{-1} = a^{n-2}a = a^{n-1}$$

elde edilir. Bu ise $a^{n-1} \neq 0$ olmasıyla çelişir. Kabul yanlıştır. $S - S_S$ kümesinde nilpotent eleman yoktur. Böylece S, $|S_S|$-reduced yarıgruptur. $\square$

Teorem 5.13. S bir yarıgrup olsun. $S - S_S$ kümesinin bir n-sistem olması için gerek ve yeter koşul S_S nin yarıasal ideal olmasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: $S - S_S$ bir n-sistem olsun. O zaman $a \in S - S_S$ için $axa \in S - S_S$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan $a \notin S_S$ için $axa \notin S_S$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Bu gösterir ki $a \notin S_S$ ve $aSa \nsubseteq S_S$ dir. O halde S_S, yarıasal idealdir.

$\Leftarrow$: S_S, yarıasal ideal olsun. $a \in S - S_S$ alalım. $a \notin S_S$ iken $aSa \nsubseteq S_S$ dir. Bu durumda $axa \notin S_S$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. $axa \in S - S_S$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in S - S_S$ için $axa \in S - S_S$ olacak şekilde $x \in S$ var olduğundan $S - S_S$ bir n-sistemdir. $\square$

Önerme 5.14. S bir yarıgrup ve S_S, S nin yarıasal ideali olsun . Bu durumda S_S, S nin bütün yarıasal ideallerinin arakesitine eşittir.

KANIT. A, S yarıgrubunun bir yarıasal ideali olsun. $a \in S_S$ ise $aSa = (0) \subseteq A$ dır. Buradan $a \in A$ elde edilir. Dolayısıyla $S_S \subseteq A$ dır. Şimdi her i için S yarıgrubunun bütün A_i yarıasal ideallerinin arakesiti $\cap A_i$ olsun. S_S kümesi her yarıasal ideal tarafından kapsandığından $S_S \subseteq \cap A_i$ dir. Tersine S_S, S nin yarıasal ideali olduğundan $\cap A_i \subseteq S_S$ dir. Dolayısıyla $\cap A_i = S_S$ sağlanır. $\square$

Sonuç 5.15. A, S yarıgrubunda bir yarıasal ideal ise S_S, A yarıasal ideali tarafından kapsanılan yarıasal ideallerin en küçüğüdür.

KANIT. A, S yarıgrubunun yarıasal ideali olsun. Yarıasal ideallerin arakesiti yarıasal ideal olduğundan Önerme 5.14 den $\cap A_i = S_S$ yarıasal idealdir. $\square$

Teorem 5.16. S bir yarıgrup olsun. $S_S = \{0\}$ olması için gerek ve yeter koşul S_S kümesinin S yarıgrubunda sıfırdan farklı nilpotent ideal olmamasıdır.

KANIT. $\Rightarrow$: $S_S = \{0\}$ olsun. Kabul edelim ki her i için A_i, S yarıgrubunda yarıasal ideal olsun. Önerme 5.14 den $\cap A_i = S_S$ dir. Yarıasal ideallerin arakesiti yarıasal ideal olduğundan $\cap A_i = S_S$ yarıasal idealdir. Herhangi bir K ideali için $K \neq (0)$ ise $K \not\subseteq S_S$ ve S_S yarıasal ideal olduğundan $K^2 \not\subseteq S_S$ dir. Dolayısıyla $K^2 \neq (0)$ dır. Böylece sıfırdan farklı ideal nilpotent ideal değildir. O halde S_S, S yarıgrubunda sıfırdan farklı nilpotent ideal içermez.

$\Leftarrow$: S_S, S yarıgrubunda sıfırdan farklı nilpotent ideal içermesin. O halde her A ideali için $A \neq (0)$ iken $A^2 \neq (0)$ dır. Dolayısıyla (0) ideali yarıasal idealdir. Önerme 5.14 den $S_S = \{0\}$ elde edilir. □

Teorem 5.17. S bir yarıgrup olsun. S regüler yarıgrup ise S_S yarıasal idealdir.

KANIT. S regüler yarıgrup olsun. O halde her $a \in S$ için $aba = a$ olacak şekilde $b \in S$ vardır. Kabul edelim ki $a \in S$ için $aSa \subseteq S_S$ olsun. $a \in aSa \subseteq S_S$ olduğundan $a \in S_S$ elde edilir. Dolayısıyla S_S, yarıasal idealdir.

□

Lemma 5.18. S, $|S_S|$-tersinir (tamamen regüler) yarıgrup ve P, $|S_P|$-tersinir (tamamen regüler) yarıgrup olsun. $f : S \to P$, $f(0_S) = 0_P$ koşulunu sağlayan bir homomorfizma olmak üzere, $f(x) \in S_p$ ise $x \in S_S$ dir. Tersine, f örten ve $x \in S_S$ ise $f(x) \in S_P$ dir.

KANIT. Kabul edelim ki $x \notin S_S$ olsun. O zaman $x \in S - S_S$ dir. Bu durumda $xx^{-1}x = x$ ve $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $x^{-1} \in S$ vardır. Buradan, f homomorfizma olduğundan

$$f(x) = f(xx^{-1}x) = f(x)f(x^{-1})f(x) = f(x)f(x)^{-1}f(x)$$

ve

$$f(x)^{-1} = f(x^{-1}) = f(x^{-1}xx^{-1}) = f(x^{-1})f(x)f(x^{-1}) = f(x)^{-1}f(x)f(x)^{-1}$$

dir. Bu $f(x) \in P - S_P$ demektir. Dolayısıyla $f(x) \notin S_P$ elde edilir.

Tersine, $x \in S_S$ ise her $a \in S$ için $xax = 0_S$ dir. Buradan $f(xax) = f(0_S)$ ve f örten olduğundan $f(x)Pf(x) = 0_P$ elde edilir. Bu ise $f(x) \in S_P$ demektir. □

Teorem 5.19. S, $|S_S|$-tersinir yarıgrup ise S/ρ, $|S_{S/\rho}|$-tersinir yarıgruptur.

KANIT. S, $|S_S|$-tersinir yarıgrup olsun. O zaman $a \in S - S_S$ için $aa^{-1}a = a$ ve $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $a^{-1} \in S$ vardır. $y \in S/\rho - S_{S/\rho}$ alalım. Bu durumda $y = a\rho$ olacak şekilde $a \in S$ vardır.

$$y = a\rho = (aa^{-1}a)\rho = (a)\rho.(a^{-1})\rho.(a)\rho = (a)\rho.(a)^{-1}\rho.(a)\rho$$

ve

$$(a)^{-1}\rho = (a^{-1})\rho = (a^{-1}aa^{-1})\rho = (a^{-1})\rho.(a)\rho.(a^{-1})\rho = (a)^{-1}\rho.(a)\rho.(a)^{-1}\rho$$

olacak şekilde $(a)^{-1}\rho \in S/\rho$ vardır. Dolayısıyla S/ρ, $|S_{S/\rho}|$-tersinir yarıgruptur. □

Teorem 5.20. S, $|S_S|$-tersinir (tamamen regüler) yarıgrup ve $f : S \to P$, $f(0_S) = 0_P$ koşulunu sağlayan bir homomorfizma olsun. Eğer f örten ise $f(S)$, $|S_P|$-tersinir (tamamen regüler) yarıgruptur.

KANIT. S, $|S_S|$-tersinir yarıgrup ve $a \in S - S_S$ olsun. Bu durumda $aa^{-1}a = a$ ve $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ olacak şekilde teklikle belirli $a^{-1} \in S$ vardır. $y \in f(S) - S_p$ alalım. O halde, $y = f(a) \notin S_p$ olacak şekilde $a \in S$ vardır. Lemma 5.18 den $a \notin S_S$ dir. Dolayısıyla her $a^{-1} \in S$ için

$$y = f(a) = f(aa^{-1}a) = f(a)f(a^{-1})f(a) = f(a)f(a)^{-1}f(a)$$

ve

$$f(a)^{-1} = f(a^{-1}) = f(a^{-1}aa^{-1}) = f(a^{-1})f(a)f(a^{-1}) = f(a)^{-1}f(a)f(a)^{-1}$$

olacak şekilde $f(a)^{-1} \in f(S)$ sağlanır. Böylece $f(S)$, $|S_P|$-tersinir yarıgruptur. □

ALTINCI BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ilk olarak tez boyunca kullanılmış olan temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Bu bölümde aynı zamanda yarıgrupların tersinir, regüler ve tamamen regülerlik özellikleri incelenmiştir.

Tezin devamında, Giri ve Wazalwar (1993) ve Park ve Kim (1992) çalışmalarında inceledikleri yarıgruplar için asal idealler ve asal radikaller kavramları yer almıştır. Ayrıca Aydın ve diğerleri (2018) çalışmasında, R halkası için $S_R = \{a \in R : aRa = (0)\}$ kümesini halkalarda yarıasallığın kaynağı olarak tanımladılar. Bu tanım kullanılarak, bir S yarıgrubu için yarıgruplarda yarıasallığın kaynağı $S_S = \{a \in S : aSa = (0)\}$ kümesi olarak Albayrak ve diğerleri (2021) tarafından tanımlanmıştır.

Çalışmanın devamında, $|S_S|$-reduced yarıgrup, $|S_S|$-sıfır bölensiz yarıgrup, $|S_S|$-idempotent yarıgrup, $|S_S|$-regüler yarıgrup, $|S_S|$-tersinir yarıgrup ve $|S_S|$-tamamen regüler yarıgrup yapıları elde edilmiştir. Sonrasında da bu yapıların özellikleri, bunlar ile ilgili örnekler ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir. Bunlar;

a Eğer S, $|S_S|$-idempotent yarıgrup ise S, $|S_S|$-regüler yarıgrup,

b Eğer S, $|S_S|$ -idempotent yarıgrup ise S, $|S_S|$-reduced yarıgrup,

c Eğer S, $|S_S|$ -sıfır bölensiz yarıgrup ise S, $|S_S|$-reduced yarıgrup,

d Eğer S, $|S_S|$- tamamen regüler yarıgrup ise S, $|S_S|$-tersinir(regüler) yarıgrup,

şeklindedir. Bunlara ek olarak, S değişmeli yarıgrup olmak üzere,

1. S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul her I ve J ideali için

   $I \cap J - S_{I\cap J} = IJ - S_{IJ}$ olmasıdır.

2. S, $|S_S|$-regüler yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul her I ideali için $I^2 - S_{I^2} = I - S_I$ olmasıdır.

teoremleri çalışmanın önemli sonuçlarıdır.

Daha sonra her i için A, S yarıgrubunun yarıasal ideali olmak üzere $\cap A_i = S_S$ olduğu gösterilmiştir.

Giri ve Wazalwar (1993), S yarıgrubunda Q idealinin yarıasal ideal olması için gerek ve yeter koşulun $\sqrt{(Q)} = Q$ olduğunu ispatlamışlardır. Aynı zamanda (Teorem 3.17) de, S yarıgrubunda sıfır olmayan nilpotent idealin olmaması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{S} = (0)$ olduğunu kanıtlamışlardır. Bu teoremden yola çıkarak bu tezde bir S yarıgrubunda sıfır olmayan nilpotent idealin olmaması için gerek ve yeter koşul $S_S = \{0\}$ olduğu ispat edilmiştir.

Son olarak, eğer A, S yarıgrubunda bir ideal ise o zaman $\sqrt{(A)}$, S yarıgrubunda A idealini içeren yarıasal ideallerin en küçüğüdür. Buradan da A, S yarıgrubunda bir yarıasal ideal ise S_S, A yarıasal ideali tarafından kapsanılan yarıasal ideallerin en küçüğüdür sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

Adams, D. H. (1971). Semigroups with no non-zero nilpotent elements. *Mathematische Zeitschrift, 123*(2), 168–176. https://doi.org/10.1007/BF01110115

Ahsan, J., Zhongkui, L. (2001). Prime and Semiprime Acts over Monoids with Zero. *Mathematical Journal of Ibaraki University, 33*(2001), 9-15. https://doi.org/10.5036/mjiu.33.9

Albayrak, B., Yeşil, D., ve Karalarlıoğlu Camcı, D. (2021). The source of semiprimeness of semigroups. *Journal of Mathematics, 2021*, Article ID 4659756, 1-8. https://doi.org/10.1155/2021/4659756

Aydın, N., Demir, Ç., ve Karalarlıoğlu Camcı, D. (2018). The source of semiprimeness of rings. *Communications of the Korean Mathematical Society, 33*(4), 1083–1096. https://doi.org/10.4134/CKMS.c170409

Clifford, A. H., ve Preston, G. B. (1961). *The Algebraic Theory of Semigroups, 7*(1). Mathematical Surveys and Monographs. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1090/surv/007.1

Gilmer, R. (1984). *Commutative Semigroup Rings* (1st ed.). The University of Chicago Press.

Giri, R. D., ve Wazalwar, A. K. (1993). Prime Ideals and Prime Radicals in Non-Commutative Semigroups. *Kyungpook Mathematical Journal, 33*(1), 37-48. https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO199325748114631.page

Grillet, P. A. (1995). *Semigroups: An Introduction to the Structure Theory* (1st ed.). CRC Press.

Grimble, H. B. (1950). *Prime Ideals in Semigroups* (Master's Thesis). University of Tennessee, Knoxville.

Howie, J. M. (1976). *An Introduction to Semigroup Theory* (L.M.S. Monographs 7). Academic Press.

Iseki, K. (1956). A characterization of regular semigroup. *Proceedings of the Japan Academy, 32*(9), 676-677. https://doi.org/10.3792/pja/1195525246

Jezek, J., Kepka, T., ve Nemec, P. (2008). Commutative semigroups that are nil of index 2 and have no irreducible elements. *Mathematica Bohemica, 133*(1), 1–7. https://doi.org/10.21136/MB.2008.133941

Karalarlıoğlu Camcı, D. (2017). *Halkalarda Yarıasallığın Kaynağı ve Çarpımsal (Genelleştirilmiş) Türevler* (Doktora tezi). Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Çanakkale, Türkiye. Erişim adresi: https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/ (Tez No.

457053)

McCoy, N. H. (1964). *The Theory of Rings* (1st ed.). Macmillan.

Park, Y. S., ve Kim, J. P. (1992). Prime and semiprime ideals in semigroups. *Kyungpook Mathematical Journal, 32*(3), 629–632. https://kmj.knu.ac.kr/journal/view.html?uid=823&vmd=Full

Reinhart, A. (2012). Structure of general ideal semigroups of monoids and domains. *Journal of Commutative Algebra, 4*(3), 413–444. https://doi.org/10.1216/JCA-2012-4-3-413

Rosales, J. C. (2002). Commutative monoids with zero-divisors. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 8*(5), 773–788. http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5B_3_773_0

Shabir, M., Kanwal, N. (2007). Prime Bi-ideals of Semigroups. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 31*(4), 757-764. http://www.seams-bull-math.ynu.edu.cn/archive.jsp

Van Rooye, G. W. S. (1995). Remarks on (0-minimal) minimal quasi-ideals in (semigroups with 0) rings. *Quaestiones Mathematicae, 18*(4), 477–485. https://doi.org/10.1080/16073606.1995.9631815