T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YARI-RIEMANN UZAYDA SASAKİ MANİFOLDLARIN YENİDEN YAPILANDIRILMASI VE UYGULAMALARI

Mehmet GÜMÜŞ

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YARI-RIEMANN UZAYDA SASAKİ MANİFOLDLARIN YENİDEN YAPILANDIRILMASI VE UYGULAMALARI

Mehmet GÜMÜŞ

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **04/01/2018**

Tez Danışmanı:

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

ÇANAKKALE

Mehmet GÜMÜŞ tarafından Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI yönetiminde hazırlanan ve **04/01/2018** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Yarı-Riemann Uzayda Sasaki Manifoldların Yeniden Yapılandırılması ve Uygulamaları**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN ……………………
Başkan

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI ……………………
Üye

Prof. Dr. Bayram ŞAHİN ……………………
Üye

Prof. Dr. Faruk SOYDUGAN ……………………
Üye

Yrd. Doç. Dr. Can AKTAŞ ……………………
Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Mehmet GÜMÜŞ

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun bilgilerini ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI'ya, Prof. Dr. Bayram ŞAHİN hocama, Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM hocama, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve bana sabreden eşim Esin ESER GÜMÜŞ'e kızlarım Sudenaz ve Tuana'ya ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli annem ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet GÜMÜŞ

Çanakkale, Ocak 2018

SİMGELER VE KISALTMALAR

η	Kontak form
(M,η)	Kontak manifold
(ϕ,ξ,η)	Hemen hemen kontak yapı
(M,ϕ,ξ,η)	Hemen hemen kontak manifold
$(\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$	Hemen hemen kontak metrik yapı
$(M,\phi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$	Hemen hemen kontak metrik manifold
[,]	Lie parantez (braket) operatörü
π	Projeksiyon morfizmi
D,∇	Riemann konneksiyonları
R	Riemann eğrilik tensörü
L	Lie türevi
$\otimes$	Tensör çarpım
M	Yarı-Riemann manifoldu
T_pM	$p\in M$ noktasındaki tanjant uzay
$Rad(TM)$	TM uzayının radikali
$\mathbb{R}_q^n$	n-boyutlu q-indeksli yarı-Öklidyen uzay
$\oplus$	Direkt toplam
$\perp$	Ortagonal direkt toplam
h^l	M manifoldunun ışığımsı (lightlike) ikinci temel formu
h^s	M manifoldunun ekran ikinci temel formu
$\Gamma(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
T	Torsiyon tensörü
Ric	Ricci eğrilik tensörü
$S(TM)$	Ekran dağılım
ξ	Yapı vektör alanı
A	Şekil operatörü
$tr(TM)$	Transversal vektör demeti
$ltr(TM)$	Işığımsı transversal vektör demeti
∇^t	$tr(TM)$ üzerindeki lineer konneksiyon
∇^l	$ltr(TM)$ üzerindeki lineer konneksiyon
$S(TM^{\perp})$	Transversal ekran dağılım

ÖZET

YARI-RIEMANN UZAYDA SASAKİ MANİFOLDLARIN YENİDEN YAPILANDIRILMASI VE UYGULAMALARI

Mehmet GÜMÜŞ
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI
04/01/2018 , 85

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüne ayrılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde temel kavramlar ve teoremler ile yarı-Riemann manifoldlar, quasi-ortonormal taban, kontak manifoldlarla ilgili genel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde dilimlenmiş kontak manifoldlar çalışılmış olup temel teoremleri ispatlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde ise, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış ($\mathcal{A}$-constructed) kontak manifoldlar ile $\mathcal{A}$ -constructed Sasaki manifoldlar tanımlanmıştır.

Doktora tezimin beşinci bölümünde ise, $\mathcal{A}$ -constructed Sasaki manifoldların Riemann eğriliği hesaplanmıştır.

Bu çalışmanın altıncı bölümünde ise, radikal transersal ışığımsı altmanifoldlar ile modifiye radikal transversal ışığımsı altmanifoldların geometrisi çalışılmıştır.

Tezin yedinci ve son bölümünde elde edilen sonuç ve öneriler tartışılmıştır.

Anahtar sözcükler: Diferansiyel Geometri, Kontak, Sasaki Manifold, Altmanifold

ABSTRACT

A NEW CONSTRUCTION OF SASAKİ MANIFOLDS IN SEMI-RIEMANN SPACE and APPLICATIONS

Mehmet GÜMÜŞ
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Doctoral Dissertation in Mathematical Science
Advisor : Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI
04/01/2018, 85

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is assigned to the introduction of my thesis.

In the second chapter, the fundamental definitions and theorems, the semi-Riemann manifolds and the quasi orthonormal base and the contact manifolds and the general theorems have been given.

The third chapter is parted to the sliced contact manifolds and the basic theorems were proved.

In the forth chapter, of my thesis $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-constructed contact and $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-constructed Sasaki manifolds were defined and the theorems were proved.

In the fifth chapter, the Riemannian curvature of $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-constructed Sasaki manifolds was evaluated.

In the sixth chapter, the geometry of the radical transversal lightlike and the modified radical transversal lightlike submanifolds worked.

The seventh chapter is dedicated to the conclusions and suggestions about the thesis.

Keywords: Differantial Geometry, Contact, Sasaki Manifold, Submanifold

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Matematiksel çalışmalar, insanlık tarihinin her aşamasında çok önemli bir yere sahiptir. Matematiğin içinde birçok alt dal bulunmaktadır. Bunlardan diferansiyel geometri matematiğin içinde önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel geometri alanında özellikle Carl Friedrich Gauss ve Bernhard Riemann'ın eğriler ve yüzeyler üzerine çalışmaları çok önemlidir. Yaşadığımız dünyanın fiziksel olaylarının açıklanmasında Gauss ve Riemann'ın "Eğriler ve Yüzeyler Teorisi" ile ilgili çalışmaları çok yararlı olmuştur. Manifold teorisindeki hızlı gelişmeler G. Ricci, T. Levi-Civita, E.B. Christoffel, F. Klein, S. Lie ve E. Cartan gibi matematikçiler sayesinde gerçekleşmiştir. O'Neil, Blair ve Sasaki 20. Yüzyılda yaptıkları çalışmalarla kontak geometriye önemli katkılar sağlamışlardır. Tek boyutlu uzaylarda tanımlanan kontak manifoldlar ve çift boyutlu uzaylarda tanımlanan kompleks ve hemen hemen kompleks manifoldlar birbirlerini tamamlamışlardır. Bu konularda yapılan yüzlerce çalışma bilimin hemen hemen her dalına ışık tutmuştur.

Ayrıca, kontak geometri optikte, rölativite teorisinde, diferansiyel denklemlerin çözümlerinde ve birçok konuda katkı sağlamıştır. Dejenere metriklerin tanımlanması ile birlikte "lightlike" altmanifoldlar teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Bu konuda Duggal ve Bejancu'nun çalışmaları önemlidir. Ayrıca Şahin ve Duggal'ın 2000'li yıllarda birlikte yaptıkları çalışmalar lightlike altmanifoldlar teorisine farklı bir bakış açısı getirmiştir. (Duggal ve Şahin, 2010, 2017)'in Sasaki manifoldlar ile Keahler manifoldların lightlike altmanifoldları üzerine yaptıkları çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Kontak geometri, geometride yeni bir alan olmamasına karşılık, matematik ve matematiksel fiziğin değişik alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. Kontak geometrinin diferansiyel denklemler, optik, genel rölativite ve benzeri alanlarda yararlı uygulamaları vardır. Çalışmalarında kontak geometriyi kullanan ilk matematikçiler: Christian Huygens, Barrow ve Isaac Newton'dur. Sophus Lie, Gray gibi matematikçiler, kontak yapıları diferansiyel denklemler üzerine yaptıkları çalışmalarda kullanmışlardır. Gibbs ise kontak geometriyi termodinamik üzerine çalışırken kullanmıştır. 20. Yüzyıl diferansiyel geometri için önemli bir dönemdir. Çünkü matematik ve fizik çalışmalarında semi-Riemann Geometrisi önemli bir yer almıştır. Burada önemli bir nokta öne çıkmıştır. O da teğet demet ile ortagonal tamamlayan demetin arakesitinin sıfırdan farklı olmasıdır. Bu arakesite O'Neill radikal uzay adını vermiştir. 1950'lerde Marcel Berger Riemann Geometrisinin önemli ve büyük gelişmelerini yayınlamıştır. S. Sasaki 1960'larda Sasaki manifoldlarını tanımlamıştır. Bu çalışmalardan sonra 1970'lerde araştırmalar Lorentz Geometrisi üzerinde odaklanmıştır.

Birçok matematikçi kontak manifoldlar, hemen hemen kontak manifoldlar, hemen hemen kontak metrik manifoldlar ve kontak metrik manifoldlar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bugüne kadar Sasaki manifoldların, Keahler manifoldların ve diğerlerinin lightlike altmanifoldları üzerine birçok farklı makale yayımlanmıştır. Bu çalışmaların bazılarını (Bejancu ve Duggal, 1995,1996), (Belkelfa ve ark., 2002), (Duggal ve Şahin, 2006, 2017), ve (Yıldırım, Şahin, 2010, 2010a)'de görmekteyiz. Çalışmalarımızda belirsiz-Sasaki manifoldlar ile altmanifoldlar teorisi arasında bir boşluk bulunmakta olduğunu gördük. Problemin kontak metrik manifoldlardan kaynaklandığını keşfettik. Çünkü verilen örnekler $d\eta = \Phi$ eşitliğini sağlamadıkları için kontak metrik manifold değildiler. Biz de bu problemi ortadan kaldıracak yeni bir yapı oluşturduk. Sonuç olarak, kontak metrik manifoldların ve diğerlerinin daha geniş bir sınıfını elde ettik.

Tezin ikinci bölümünde, çalışmalarımızda kullandığımız temel kavramlar ve teoremler ile semi-Riemann manifoldlar, quasi-orthonormal taban, kontak manifoldlarla ilgili genel tanımlar ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde, özgün çalışmalarımıza yer vermeye başladık. Örneklerde karşılaştığımız sorunu çözmek için geliştirdiğimiz metodu dilimlenmiş hemen hemen kontak manifoldlarda inceledik. $\mathcal{A}$-constructed ($\mathcal{A}$ Kümesi Üzerinde Yapılandırılmış) hemen hemen kontak manifoldlara geçiş için kullandığımız uyumlu manifold yapısını oluşturduk. Böylece bu bölümde dilimlenmiş kontak manifoldlar çalışılmış olup temel teoremleri ispatladık.

Tezin dördüncü bölümünde ise ana yapımız olan "$\mathcal{A}$-constructed kontak manifoldlar" ile "$\mathcal{A}$-constructed Sasaki manifoldlar" tanımlanmıştır. Bu manifoldların geometrisini ve temel teoremlerini ispatladık. $\mathcal{A}$-constructed Sasaki manifoldların örneğini verdik.

Doktora tezimin beşinci bölümünde ise "$\mathcal{A}$-constructed Sasaki manifoldlar" için önemli bir özelik olan Riemann eğriliğini hesapladık.

Tezin altıncı bölümünde ise radikal transersal lightlike altmanifoldlar ile modifiye radikal transversal lightlike altmanifoldların geometrisini çalıştık. Bu altmanifoldların temel teoremleri ispatlandı.

Tezin yedinci ve son bölümünde ise sonuçlar tartışılmış olup öneriler belirtilmiştir.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Bu bölümde literatürde var olan ve tez ile ilgili gerekli olan temel tanımlar, teoremler ve bilgiler verilmiştir. Bu temel tanım ve kavramlar tezin özgün bölümlerinde kullanılmıştır.

2.1.Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 2.1.1. [Artin E., 1957] V reel m-boyutlu bir vektör uzayı ve $g: V \times V \to R$ bir dönüşüm olsun. Eğer g dönüşümü, her $a, b \in R$ ve her $u, v, z \in V$ için

$$(i) \quad g(au + bv, z) = ag(u, z) + bg(v, z) \tag{1.1}$$

$$(ii) \quad g(u, av + bz) = ag(u, v) + bg(u, z) \tag{1.2}$$

koşullarını sağlıyorsa g dönüşümüne ***ikilineer dönüşüm*** denir.

Örnek 2.1.1. g dönüşümü, $g: R^2 \times R^2 \to R$, $g\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ şeklinde tanımlansın. g dönüşümünün R^2 uzayı üzerinde ikilineer dönüşüm olduğu açıktır.

Tanım 2.1.2. [Artin E., 1957] V bir reel vektör uzayı ve g, V uzayı üzerinde ikilineer bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, v \in V$ vektörleri için

$$g(u, v) = g(v, u) \tag{1.3}$$

eşitliği sağlanıyorsa g dönüşümüne ***simetriktir*** denir.

Örnek 2.1.2. A matrisi, $n \times n$ lik simetrik matris olsun. Bu durumda her $v, w \in R^n$ için $Q(v, w) = v^T A w = < v, Aw >$ şeklinde tanımlanan dönüşüm simetriktir.

Tanım 2.1.3. [Artin E., 1957] Simetrik ikilineer dönüşümlere ***ikilineer form*** denir.

Örnek 2.1.3. Örnek 2.1.2'de tanımlanan Q dönüşümü ikilineer formdur.

Tanım 2.1.4. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] V bir reel vektör uzayı ve g, V uzayı üzerinde ikilineer form olsun. Eğer V vektör uzayının $\xi \neq 0$ bir vektörü ve her $v \in V$ için $g(\xi, v) = 0$ koşulu sağlanıyorsa g ikilineer formuna V vektör uzayı üzerinde ***dejeneredir*** denir.

Örnek 2.1.4. $g: R^3 \times R^3 \to R,\ g\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1 y_2 - x_3 y_1$ şeklinde tanımlanan g ikilineer formu R^3 uzayında dejeneredir. Çünkü $\xi = (0, 1{,}0)$ vektörü ve her $v \in R^3$ için $g(\xi, v) = 0$ olur.

Tanım 2.1.5. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde ikilineer form olsun. Eğer her $v \in V$ için $g(u, v) = 0$ eşitliği ancak $u = 0$ ile mümkünse g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde ***non-dejeneredir*** denir.

Örnek 2.1.5. R^n vektör uzayında Öklidyen metrik non-dejeneredir.

Tanım 2.1.6. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde ikilineer form olsun. V uzayının

$$Rad\, V = \{\xi \in V |\ g(v, \xi) = 0, \forall v \in V\} \tag{1.5}$$

ile tanımlı alt uzayına, V uzayının ***radikal uzayı*** ya da ***null uzayı*** denir.

Önerme 2.1.1. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] (W, g), reel n-boyutlu ışığımsı vektör uzayı ve $Rad\, W$ uzayıda W vektör uzayının radikal uzayı olsun. Bu durumda W vektör uzayında, radikal uzayın tamamlayanı olan herhangi bir alt uzay non-dejeneredir. Bu uzaya ***ekran uzay*** denir.

Önerme 2.1.2. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] (V, g), m-boyutlu yarı-Öklidyen uzay, W, V vektör uzayının alt uzayı olsun. Bu durumda:

$$\begin{aligned} &(i)\ \ boy\, W + boy\, W^{\perp} = m \\ &(ii)\ \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W \\ &(iii)\ RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}\ \text{dır.} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Örnek 2.1.6. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] $\mathbb{R}_2^4$ yarı-Riemann uzayı olsun. Eğer bir $M \subset \mathbb{R}_2^4$ altmanifoldu:

$$M = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), x_4 = \ln(1 + (x_1 - x_2)^2)\right\}$$

kümesi ile verilirse bu altmanifold $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \ln(1 + (x_1 - x_2)^2))$ dönüşümü ile ifade edilir. Burada kısmi türevler alındığında teğet uzayın taban elemanlarından biri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}((1+(x_1-x_2)^2)}\left(\sqrt{2}(1+(x_1-x_2)^2), 0, (1+(x_1-x_2)^2), 2\sqrt{2}(x_1-x_2)\right).$$

Yapılan işlemler sonucunda teğet uzayın taban elemanı olarak U_1 vektör uzayı

$$U_1 = \sqrt{2}(1+(x_1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (1+(x_1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_3} + 2\sqrt{2}(x_1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_4}$$

olur. Benzer işlemler yapıldığında teğet uzayın diğer taban elemanı U_2 aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_2 = \sqrt{2}(1+(x_1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (1+(x_1-x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_3} - 2\sqrt{2}(x_1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Sonuç olarak teğet uzay $TM = span\{U_1, U_2\}$ olarak bulunmuş olur.

$TM^\perp$ altuzayını teğet uzayın dik tamamlayan uzayı olarak kabul edelim. $H \in TM^\perp$ vektör alanı için $H = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ olsun. $H \in TM^\perp$ olduğundan $g(U_1, H) = 0$ ve $g(U_2, H) = 0$ olduğu açıktır. Bu durumda $g(U_1, H) = 0$ eşitliğinden

$$\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (\sqrt{2}(1+(x_1-x_2)^2), 0, (1+(x_1-x_2)^2), 2\sqrt{2}(x_1-x_2)) \rangle = 0. \qquad (1.7)$$

elde edilir. Ayrıca $g(U_2, H) = 0$ eşitliğinden de

$$\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (0, \sqrt{2}(1+(x_1-x_2)^2), (1+(x_1-x_2)^2), -2\sqrt{2}(x_1-x_2)) \rangle = 0 \qquad (1.8)$$

ifadesi benzer sebeplerle yazılır. (1.7) ve (1.8) ifadelerinde gerekli işlemler yapılırsa

$$-u_1\sqrt{2}(1+(x_1-x_2)^2) + u_3(1+(x_1-x_2)^2) + u_4 2\sqrt{2}(x_1-x_2) = 0$$
$$-u_2\sqrt{2}(1+(x_1-x_2)^2) + u_3(1+(x_1-x_2)^2) - u_4 2\sqrt{2}(x_1-x_2) = 0.$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini çözmek için $x_1 = x_2$ alındığında; yapılan sadeleştirmeler sonucunda

$$u_3 = u_1\sqrt{2}$$
$$u_3 = u_2\sqrt{2}$$
$$u_4 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $TM^{\perp}$ uzayının taban elemanlarından birisi

$$H_1 = \left(1,1,\sqrt{2},0\right) \Rightarrow H_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1.9}$$

olur. $H_2 \in TM^{\perp}$ vektör alanı için $H_2 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ olsun. Eğer $u_1 = 0$ alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$u_3 = \frac{2\sqrt{2}(x_2 - x_1)}{1 + (x_1 - x_2)^2} u_4$$

sonucuna ulaşılır. Yapılan benzer işlemler sonucunda

$$u_2 = \frac{4(x_2 - x_1)}{(1 + (x_1 - x_2)^2)} u_4 \tag{1.10}$$

eşitliği elde edilir. (1.10) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa dik uzayın tabanının diğer bir elemanı H_2 vektör alanı,

$$H_2 = (0, \frac{4(x_2 - x_1)}{(1 + (x_1 - x_2)^2)} u_4, \frac{2\sqrt{2}(x_2 - x_1)}{(1 + (x_1 - x_2)^2)} u_4, u_4)$$

veya

$$H_2 = 4(x_2 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} + 2\sqrt{2}(x_2 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_3} + (1 + (x_1 - x_2)^2)\frac{\partial}{\partial x_4}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak $TM^{\perp} = span\{H_1, H_2\}$ olur. Teğet uzayın radikal dağılımını bulmak için $K \in Rad\, TM$ olsun. Biliniyor ki $K \in TM$ ve $K \in Rad\, TM^{\perp}$ dir. Bu durumda K vektör alanı

$$K = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \tag{1.11}$$

$$K = \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}) \tag{1.12}$$

şeklinde yazılır. (1.11) ve (1.12) eşitliklerinde U_1, U_2, H_1 ve H_2 vektör alanları yerine yazılırsa

$$K = (\mu_1, \mu_1 + 4\mu_2(x_2 - x_1), 2\sqrt{2}(\mu_1 + \mu_2(x_2 - x_1)), \mu_2(1 + (x_1 - x_2)^2))$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadelerde gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\lambda_1\sqrt{2}(1 + (x_1 - x_2)^2) &= \mu_1 \\
\lambda_2\sqrt{2}(1 + (x_1 - x_2)^2) &= \mu_1 + 4\mu_2(x_2 - x_1) \\
(\lambda_1 + \lambda_2)(1 + (x_1 - x_2)^2) &= 2\sqrt{2}(\mu_1 + \mu_2(x_2 - x_1)) \\
(\lambda_1 - \lambda_2)2\sqrt{2}(x_1 - x_2) &= \mu_2(1 + (x_1 - x_2)^2)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer $x_1 = x_2 = 0$ alırsak

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\lambda_1 &= \mu_1 \\
\sqrt{2}\lambda_2 &= \mu_1 \\
\lambda_1 + \lambda_2 &= 2\sqrt{2}\mu_1 \\
0 &= \mu_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak: K vektör alanı $K = \lambda(1,1,\sqrt{2},0)$ yani $K = \lambda H_1$ şeklinde elde edilir. Böylece $Rad\,TM = span\{H_1\}$ olur.

Tanım 2.1.7. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde ikilineer form olsun. Eğer her $v \in V$ için:

(i) $g(v,v) < 0$ ise g metriğine ***negatif tanımlıdır*** denir.

(ii) $g(v,v) > 0$ ise g metriğine ***pozitif tanımlıdır*** denir.

Örnek 2.1.7. R^n uzayında tanımlanan Öklidyen metriğin pozitif tanımlı olduğu açıktır.

Tanım 2.1.8. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] V bir reel vektör uzayı, g, V üzerinde ikilineer form ve W, V uzayının herhangi bir altuzayı olsun. $g|_W$ indirgenmiş metriğinin negatif olduğu en büyük W altuzayının boyutuna V uzayı üzerinde ikilineer formun ***indeksi*** denir.

Örnek 2.1.8. $\mathbb{R}_3^9$ uzayında g metriği,

$$g(x,x) = -{x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_6}^2 + {x_7}^2 + {x_8}^2 + {x_9}^2$$

olarak tanımlanırsa, g metriğinin indeksi 3 olur.

Tanım 2.1.9. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] V bir reel vektör uzayı ve g, V uzayı üzerinde ikilineer form olsun. Eğer g, V vektör uzayı üzerinde non-dejenere ikilineer form ise, g ikilineer formuna ***skaler çarpım*** ve V uzayına da ***yarı-Öklidyen*** uzay denir. Eğer, $p.q \neq O$ ise V uzayına ***öz (proper) yarı-Öklidyen uzay*** denir. İkilineer formun dejenere olması durumunda ise V vektör uzayına ***ışığımsı uzay*** denir.

Tanım 2.1.10. [O'Neill B., 1971] V bir yarı-öklidyen uzay ve $v \in V$ olsun. Bu durumda

(i) $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne ***uzayımsı (spacelike)***

(ii) $g(v,v) < 0$ ise v vektörüne ***zamanımsı (timelike)***

(iii) $g(v,v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v vektörüne ***ışığımsı (lightlike)*** denir.

Örnek 2.1.9. Örnek 1.1.6 da yapılan işlemler sonucunda elde edilen U_1 ve U_2 vektör alanları zamanımsı, H_1 vektör alanı ışığımsı ve H_2 vektör alanı uzayımsı bulunur.

Teorem 2.1.1. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde ikilineer form olsun. Bu durumda V vektör uzayı üzerinde:

$i)$ $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$

$ii)$ $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq p$

$iii)$ $g(\alpha_j, \alpha_j) = -1, \quad p+1 \leq j \leq q$

$iv)$ $g(\alpha_k, \alpha_k) = 0, \quad q+1 \leq k \leq m$

olacak şekilde $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ bir taban vardır.

Tanım 2.1.11. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] (V, g) reel m-boyutlu bir yarı-Öklidyen uzay ve W uzayı da V uzayının altuzayı olsun. Eğer $g|_W$ indirgenmiş metriği dejenere ise W altuzayına ***ışığımsı (dejenere) altuzay*** denir. Aksi durumda, W altuzayına ***non-dejenere altuzay*** denir. $W^{\perp} = \{v \in V |\, g(v,w) = 0, \forall w \in W\}$ altuzayına W uzayının ***diki*** denir. Genellikle $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$ dır.

Önerme 2.1.3. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] Boştan farklı her yarı-Öklidyen uzayın ortonormal bir tabanı her zaman vardır.

$(V, g), m$-boyutlu öz yarı-Öklidyen uzay olsun. Lineer cebirin temel teoreminden V uzayının $\{e_1, \dots, e_m\}$ bir ortonormal tabanı vardır. Bu durumda:

i) $\{e_1, \dots, e_q\}$ e_i , $i = 1 \dots q$, zamanımsı vektörler

ii) $\{e_{q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ e_i , $i = q + 1 \dots q + p$, uzayımsı vektörler

iii) $p + q = m$

dir. Burada ışığımsı vektörleri içeren bir taban oluşturabilir. Bu taban aşağıdaki farklı durumlar için oluşturulur.

Durum 1. $q < p$ ise:

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\} \text{ ve } f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \ \ i \in \{1, \dots, q\} \tag{1.13}$$

vektörlerini

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0 \tag{1.14}$$

$$g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij} \ \ i, j \in \{1, \dots, q\} \tag{1.15}$$

koşullarını sağlayacak biçimde oluşturalım. Bu durumda V yarı-Öklidyen uzayının $\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{2q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ tabanı $2q$ tane ışığımsı ve $p - q$ tane uzayımsı vektörünü içerir.

Durum 2. $p < q$ ise:

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} + e_a\} \text{ ve } f_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} - e_a\} \ \ a \in \{1, \dots, p\} \tag{1.16}$$

vektörlerini (1.2) ve (1.3) eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlayalım. Bu eşitliklerde i, j indisleri yerine $a, b \in \{1, \dots, p\}$ yazalım. Sonuç olarak $\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{p+1}, \dots, e_q\}$ tabanı $2p$ tane ışığımsı ve $q - p$ tane zamanımsı vektör içerir.

Durum 3. $p = q$ ise:

$m = 2p = 2q$ olduğundan ışığımsı vektörleri (1.1) ya da (1.4) eşitliklerinden birindeki gibi tanımlarsak $\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*\}$ tabanı $2q$ tane ışığımsı vektör içerir.

Tanım 2.1.12. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] $(V, g), m$-boyutlu öz yarı-Öklidyen uzay olsun. (V, g) uzayının bir $B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$ tabanı

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0\,;\; g(f_i,\; f_j^*) = \delta_{ij} \tag{1.17}$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*)\,;\quad g(u_\alpha, u_\beta) = \epsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{1.18}$$

$i, j \in \{1, \dots, r\}, \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}$

(1.17) ve (1.18) koşullarını sağlıyorsa bu tabana ***quasi-ortonormal*** taban denir.

m-boyutlu öz yarı-Öklidyen V uzayının bir n-boyutlu ışığımsı altuzayı W olsun. Eğer W altuzayının bir tabanı $n = r + s, 1 \leq s \leq t$ için $\{f_1, \dots, f_r, u_1, \dots, u_s\}$ veya $n \leq r$ için $\{f_1, \dots, f_r\}$ oluyorsa V vektör uzayının W altuzayı boyunca quasi-ortonormal tabanı tabanı $B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$ olur.

Önerme 2.1.4. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] W altuzayı boyunca V vektör uzayının quasi-ortanormal tabanı vardır.

İspat: $null\, W = \min\{n, m - n\}$ olduğunu kabul edilsin. Radikal uzayın tanımından $W \cap W^\perp = Rad\, W$ olduğu için

$$W = Rad\, W \perp W'$$
$$W^\perp = Rad\, W \perp W''$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde W' ve W'' ekran altuzayları vardır. Ayrıca V vektör uzayı

$$V = W' \perp (W')^\perp$$

şeklinde yazılabilir. W'', $(W')^\perp$ uzayının non-dejenere altuzayı olduğu için

$$(W')^\perp = \mathrm{W}'' \perp (\mathrm{W}'')^\perp$$

ayrışımı elde edilir. Burada $(\mathrm{W}'')^\perp$, $(W')^\perp$ altuzayında W'' altuzayının ortagonal tamamlayan altuzayıdır. $(\mathrm{W}'')^\perp$ altuzayında $Rad\, W$ uzayının tamamlayan altuzayı U olsun. $(\mathrm{W}'')^\perp$ uzayının boyutu $2r$ olduğundan $Rad\, W$ için $\{f_1, \dots, f_r\}$ ve U için $\{u_1, \dots, u_j\}$ tabanları dikkate alınabilir. Bu durumda $\{f_1^*, \dots, f_r^*\}$ için:

$$f_i^* = \mathrm{A}_\mathrm{i}^\mathrm{j} f_\mathrm{j} + \mathrm{B}_\mathrm{i}^\mathrm{j} u_j \tag{1.19}$$

vektörleri (1.5) eşitliklerini sağlayacak şekilde kurgulanır. Yapılan direkt hesaplamalardan yola çıkarak

$$g(f_i, f_k^*) = \delta_{ik} \Leftrightarrow \mathrm{B}_\mathrm{k}^\mathrm{j}\, g(f_i, u_j) = \delta_{ik} \tag{1.20}$$

eşitliği elde edilir. $\det[g(f_i, u_j)] \neq 0$ olduğu için (1.20) sisteminin $(\mathrm{B}_\mathrm{k}^\mathrm{j})$ için teklikle belli bir çözümü vardır. (1.13) ve (1.14) tekrar kullanılarak

$$g(f_i^*, f_j^*) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}_\mathrm{j}^\mathrm{i} + \mathrm{A}_\mathrm{i}^\mathrm{j} + \mathrm{B}_\mathrm{i}^\mathrm{h}\mathrm{B}_\mathrm{j}^\mathrm{k}\mathrm{g}(u_h, u_k) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak:

$$V = W' \perp W'' \perp (Rad\ W \ \oplus Span\{f_1^*, \dots, f_r^*\}$$

ayrışımı V uzayı için elde edilir. Böylece V uzayının W alt uzayı boyunca quasi-ortonormal tabanı

$$\{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_{n-r}, w_1, \dots, w_{m-n-r}\}$$

olur.

2.2.Yarı-Riemann Monifoldlar

Tanım 2.2.1. [O'Neill B., 1971] M reel m-boyutlu differansiyellenebilir bir manifold ve g metriği de bu manifold üzerinde (0,2) mertebeden simetrik tensör alanı olsun. Böylece g, M manifoldunun her x noktasında T_xM tanjant uzayı üzerine ikilineer form taşır. Bu form g_x ile gösterilsin. Eğer M manifoldunun her x noktası için g_x ikilineer formunun indeksi aynı ve g_x, T_xM uzayı üzerinde non-dejenere ise bu durumda ikilineer forma ***yarı-Riemann metrik*** ve M manifolduna da ***yarı-Riemann manifold*** denir. Manifoldun indeksinin sıfır (bir) olduğu durumda manifold ***Riemann (Lorentz) manifold*** adını alır.

Tanım 2.2.2. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] Eğer bir ∇ operatörü M manifoldu üzerinde her $X, Y, S, S' \in \chi(M)$ vektör alanları ve differenesiyellenebilir bir f fonksiyonu için:

$$(i)\ \nabla_{fX+Y}(\mathrm{S}) = f\nabla_X(\mathrm{S}) + \nabla_Y(\mathrm{S}) \tag{2.1}$$

$$(ii)\ \nabla_X(f\mathrm{S} + S') = f\nabla_X(\mathrm{S}) + X(f)S + \nabla_X(S') \tag{2.2}$$

koşullarını sağlıyorsa ∇ bağlantısı (konneksiyonu) M manifoldu üzerinde bir ***lineer konneksiyondur***.

Metrik tensör alanı g, ∇ bağlantısına göre paralel ise yani $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için:

$$(\nabla_X g)(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) - g(Y, \nabla_X \mathrm{Z}) = 0 \tag{2.3}$$

eşitliğini sağlıyorsa ∇ bağlantısına ***metrik bağlantı (Riemann konneksiyon)*** denir.

Tanım 2.2.3. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] M bir manifold ve ∇, M üzerinde konneksiyon olsun. Bu durumda ∇ konneksiyonunun ***torsiyon tensörü*** $\forall X, Y \in \chi(M)$ için:

$$\mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \nabla_X \mathrm{Y} - \nabla_Y \mathrm{X} - [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.1. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] Her yarı-Riemann manifold üzerinde tek bir torsiyonsuz metrik konneksiyon vardır. Her yarı-Riemann metrik için $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}, \mathrm{Z}) = {} & \mathrm{X}g(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{Y}g(\mathrm{Z}, \mathrm{X}) - \mathrm{Z}g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + g([\mathrm{X}, \mathrm{Y}], \mathrm{Z}) \\ & - g([\mathrm{Y}, \mathrm{Z}], \mathrm{X}) + g([\mathrm{Z}, \mathrm{X}], \mathrm{Y}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

ile verilen (2.5) eşitliğini sağlar. Bu eşitlik Kozsul Özdeşliği olarak isimlendirilir.

Tanım 2.2.4. [Yano K. ve Kon M., 1984] (M, g), yarı-Riemann manifold olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y \mathrm{Z} - \nabla_Y \nabla_X \mathrm{Z} - \nabla_{[X,Y]} \mathrm{Z} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonunun ***eğrilik tensörü*** denir.

Tanım 2.2.5. [Yano K. ve Kon M., 1984] (M, g) yarı-Riemann bir manifold olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ vektör alanları için:

$$< R(X, Y)Z, W >= g(R(X, Y)Z, W) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan 4. mertebeden tensöre ***Riemann Christoffel eğrilik tensörü*** denir.

Tanım 2.2.6. [Yano K. ve Kon M., 1984] (M, g) yarı-Riemann bir manifold olsun. $p \in M$ olmak üzere P, T_pM uzayında bir yüzey olsun. P yüzeyinin bir $\{X, Y\}$ tabanı için:

$$K(P) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanan $K(P)$ sayısına P yüzeyinin ***kesit eğriliği*** denir.

Tanım 2.2.7. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] $(\bar{M}^{m+k}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunda daldırılmış (immersed) bir altmanifold M olsun. M altmanifoldunda

$i)$ $\bar{g}$ den indirgenmiş metrik g metriği dejenere

$ii)$ g metriğinin radikal dağılımı $Rad\ TM$'nin rankı r $(1 \leq r \leq m)$

koşulları sağlanıyorsa, M altmanifolduna ***ışığımsı altmanifold*** denir.

Radikal altuzay için $Rad(TM) = TM \cap TM^{\perp}$ eşitliği sağlanır. Vektör uzaylarında $TM^{\perp} = \cup_{x \in M} \{u \in T_x\bar{M} \mid \bar{g}(u, v) = 0, \forall v \in T_xM\}$ olduğu bilinmektedir. TM uzayında, $Rad(TM)$ altuzayının yarı-Riemann tamamlayan bir dağılımı, $S(TM)$ ekran dağılım olsun. Böylece $TM = Rad(TM) \perp S(TM)$ olur.

$TM^{\perp}$ uzayında, $S(TM^{\perp})$ ekran transversal vektör demetini $Rad(TM)$ uzayının yarı-Riemann tamamlayan vektör demeti olarak kabul edelim. O halde, $Rad(TM)$ uzayının keyfi bir $\{\xi_i\}$ yerel tabanı için öyle bir $\{N_i\}$ yerel çatısı vardır ki N_i kesitlerinin değerleri $S(TM^{\perp})$ uzayının ortagonal tümleyeni $[S(TM)]^{\perp}$ uzayının içindedir. Bu kesitler $\bar{g}(\xi_i, N_j) = \delta_{ij}$ ve $\bar{g}(N_i, N_j) = 0$ eşitliklerini sağlarlar. Böylece $\{N_i\}$ ile gerilen ışığımsı transversal vektör demeti $ltr(TM)$ vardır. $T\bar{M}|_M$ uzayının içinde TM teğet uzayının tümleyen (fakat ortagonal olmayan) vektör demeti $tr(TM)$ olsun. Bu durumda:

$$tr(TM) = ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}),$$

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \perp [Rad(TM) \oplus ltr(TM)] \perp S(TM^{\perp})[6]$$

eşitlikleri sağlanır. $\bar{M}$ manifoldunun $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldu için aşağıdaki tanımlamalar yapılır:

Durum 1: r-ışığımsı eğer $r < min\{m, k\}$;

Durum 2: Ko-izotropik eğer $r = k < m; S(TM^{\perp}) = \{0\}$;

Durum 3: İzotropik eğer $r = m < k;\ S(TM) = \{0\}$;

Durum 4: Tamamen ışığımsı eğer $r = m = k;\ S(TM) = \{0\} = S(TM^{\perp})$.

Örnek 2.2.1. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] Örnek 2.1.6'da elde edilen vektör alanları için gerekli işlemler yapıldığında U_1 timelike, U_2 timelike, H_1 lightlike ve H_2 spacelike bulunur. Böylece aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$Rad\,TM = span\{H_1\}$$
$$TM = span\{U_1, U_2\}$$
$$TM^{\perp} = span\{H_1, H_2\} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, lightlike altmanifoldlar teorisine göre $S(TM) = span\{U_2\}$ elde edilir ve ayrıca $S(TM^{\perp}) = span\{H_2\}$ şeklinde yazılır. Böylece M, 1-lightlike altmanifoldtur.

Örnek 2.2.2. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] $\mathbb{R}_2^5$ vektör uzayında M altmanifoldu $x_2 = \{(x_3)^2 + (x_5)^2\}^{\frac{1}{2}}$, $x_4 = x_1$, $x_3 > 0$, $x_5 > 0$ eşitlikleri ile verilsin. Örnek 2.1.6 daki işlemler benzer şekilde tekrarlanarak $U_1, U_2, U_3 \in TM$ için yapıldığında:

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$U_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$U_3 = x_5 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_5}$$

elde edilir. Böylece $TM = span\{U_1, U_2, U_3\}$ olur. Yine aynı işlemler $H_1, H_2 \in TM^{\perp}$ için yapıldığında:

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$H_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}$$

elde edilir. Böylece $TM^{\perp} = span\{H_1, H_2\}$ olur. Buradan da $Rad\,TM = span\{H_1, H_2\}$ elde edilir. Sonuç olarak M manifoldu, ko-izotropik lightlike altmanifoldtur.

Örnek 2.2.3. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] $\mathbb{R}_2^5$ uzayında bir M altmanifoldu $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + \sin x_1)$, $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - \sin x_1)$, $x_5 = -\cos x_1$ denklemleri ile verilsin. Örnek 2.2.2'de yapılan işlemler $U_1, U_2 \in TM$ vektör alanları için yapıldığında;

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\cos x_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\cos x_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_4} + \sin x_1 \frac{\partial}{\partial x_5}$$
$$U_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_4}$$

ifadeleri bulunur. Böylece $TM = span\{U_1, U_2\}$ elde edilir. Ayrıca $H_1, H_2, H_3 \in TM^{\perp}$ vektör alanları için yapılan hesaplamalar sonucu

$$H_1 = \frac{\cos x_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$H_2 = -\frac{\cos x_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$H_3 = \sin x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_5}$$

vektör alanları ile $TM^{\perp} = span\{H_1, H_2, H_3\}$ yazılır. Buradan da $Rad\, TM = TM \subset TM^{\perp}$ elde edilir. Sonuç olarak M, altmanifoldu izotropiktir.

Örnek 2.2.4. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] $\mathbb{R}_2^4$ vektör uzayında bir M yüzeyi $x_3 = F(x_1, x_2)$ ve $x_4 = G(x_1, x_2)$ eşitlikleri ile verilsin. (F, G fonksiyonları $\mathbb{R}^2$ uzayının açık ve bağlantılı D kümesi üzerinde düzgündür.) F, G fonksiyonları $(F'_{x_1})^2 + (G'_{x_1})^2 = 1$, $(F'_{x_2})^2 + (G'_{x_2})^2 = 1$, $F'_{x_1}F'_{x_2} + G'_{x_1}G'_{x_2} = 0$ koşullarını sağlıyorlarsa M tamamen lightlike altmanifoldtur.

2.3.Kontak Manifoldlar

Tanım 2.3.1. [Blair D. E., 1976] M, 2n+1-boyutlu, C^{∞} diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer bu manifold üzerinde verilen η, 1-formu M manifoldunun her noktasında

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa η 1-formuna ***kontak form*** ve (M, η) ikilisine de ***kontak manifold*** denir.

Teorem 2.3.1. [Darboux Teoremi] M manifoldu n-boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olsun ve ω, 1-formu M manifoldu üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlasın:

$i)$ $\quad \omega \wedge (d\omega)^p \neq 0$

$ii)$ $(d\omega)^{p+1} = 0.$

Bu durumda M manifoldunun her noktasında:

$$\omega = dy^{p+1} - \sum_{i=1} y^i dx^i \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir $(x^i, \ldots, x^p, y^i, \ldots, y^p)$ koordinat komşuluğu vardır.

Tanım 2.3.2. [Blair D. E., 1976] M, 2n+1 boyutlu bir manifold ve ϕ, ξ, η tensör alanları M üzerinde sırasıyla (1,1) , (1,0) ve (0,1) tipinde tensör alanları olsun. Eğer ϕ, ξ, η tensörleri için $\forall X \in \chi(M)$ olmak üzere:

$$(i)\ \phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \quad (3.3)$$
$$(ii)\ \eta(\xi) = 1$$

özelikleri sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η) üçlüsüne ***hemen hemen kontak yapı*** ve (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüne de ***hemen hemen kontak manifold*** denir.

Teorem 2.3.2. [Blair D. E., 1976] (2n+1)-boyutlu (M, ϕ, ξ, η) hemen hemen kontak manifoldunda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\phi(\xi) = 0$
(ii) $\eta \circ \phi = 0$
(iii) $rank\phi = 2n$ dir.

Tanım 2.3.3. [Belkelfa ve ark., 2002] (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsü (2n+1)-boyutlu hemen hemen kontak manifold olsun ve g metriği Riemann veya Lorentz metrik iken $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için:

$$g\big(\phi(X), \phi(Y)\big) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3.4)$$

denklemi sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne ***hemen hemen kontak metrik*** yapı ve (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisine de ***hemen hemen kontak metrik manifold*** denir.

Tanım 2.3.4. [Belkelfa M. ve ark., 2002] M manifoldu, (2n+1)-boyutlu manifold ve (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin. Şayet;

$$d\eta(X,Y) = g(X,\phi(Y)) \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanıyorsa (M,ϕ,ξ,η,g) beşlisine ***kontak metrik manifold***, (ϕ,ξ,η,g) yapısına da M manifoldunda ***kontak metrik yapı*** denir.

Tanım 2.3.5. [Yano K. ve Kon M., 1984] F, M manifoldu üzerinde (1,1) tipinde bir tensör alanı olsun. N_F tensörü (1,2) tipinde ve

$$N_F: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X,Y) \to N_F(X,Y)$$

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [F(X),F(Y)] - F[F(X),Y] - F[X,F(Y)] \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu tensöre ***Nijenhuis tensörü*** denir.

Tanım 2.3.6. [Yano K. ve Kon M., 1984] Bir vektör uzay üzerinde tanımlanan J lineer dönüşümü, $J^2 = -I$ eşitliğini sağlıyorsa J dönüşümüne ***hemen hemen kompleks dönüşüm*** denir.

Tanım 2.3.7. [Yano K. ve Kon M., 1984] Şayet Nijenhuis torsiyonu N_J özdeş olarak sıfır ise, J hemen hemen kompleks yapısına ***integrallenebilir*** denir.

Tanım 2.3.8. [Yano K. ve Kon M., 1984] Şayet $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunda J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise; (ϕ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısına ***normal yapı*** denir.

Tanım 2.3.9. [Blair David E., 2002] $(2n+1)$-boyutlu M manifoldu, (ϕ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldundaki parantez operatörü:

$$[\ ,\ ]: \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) \to \chi(M \times \mathbb{R})$$
$$\left(\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right) \to \left[\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right]$$

olmak üzere,

$$\left[\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right] = \left([X,Y], (X(g) - Y(f))\frac{d}{dt}\right) \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlanır. Bu operatör;

i) Anti-simetriktir

$ii)$ Jakobi özdeşliğini sağlar.

Bu şekilde tanımlanan operatör bir ***Lie parantezidir***.

Tanım 2.3.10. [Sasaki S. ve Hatakeyama Y., 1962] M, manifoldu $(2n+1)$-boyutlu ve (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü normal kontak metrik yapı olsun. Bu durumda M manifolduna ***Sasaki manifold*** ve (ϕ, ξ, η, g) yapısına da ***Sasaki yapı*** denir.

Sasaki manifoldlarda Gauss ve Weingarten eşitlikleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.8}$$

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^t V, \forall X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(tr(TM)). \tag{3.9}$$

Burada $\{\nabla_X Y, A_V X\}$ ve $\{h(X,Y), \nabla_X^t V\}$ sırasıyla $\Gamma(TM)$ ve $\Gamma(tr(TM))$ uzayına aittir. ∇ ve ∇^t sırasıyla M ve $tr(TM)$ vektör demeti üzerinde lineer bağlantı (konneksiyon) dır. Ayrıca bu manifoldlarda aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), \tag{3.10}$$

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^l(N) + D^s(X,N),\ \forall N \in \Gamma(ltr(TM)), \tag{3.11}$$

$$\overline{\nabla}_X W = -A_W X + \nabla_X^s(W) + D^l(X,W),\ \forall W \in \Gamma(S(TM^\perp)). \tag{3.12}$$

TM teğet uzayının $S(TM)$ ekran uzayı üzerindeki projeksiyonunu $\bar{P}$ ile gösterelim. Daha sonra burada (3.3), (3.5)-(3.8) ve metrik bağlantı $\overline{\nabla}$ kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\bar{g}(h^s(X,Y), W) + \bar{g}\left(Y, D^l(X,W)\right) = g(A_W X, Y) \tag{3.13}$$

$$\bar{g}(D^s(X,N), W) = \bar{g}(N, A_W X). \tag{3.14}$$

Bir ışığımsı altmanifoldun teğet demetinin ayrışımı yapıldığında aşağıdaki eşitlikler her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için yazılır:

$$\nabla_X \bar{P} Y = \nabla_X^* \bar{P} Y + h^*(X, \bar{P} Y), \tag{3.15}$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X + \nabla_X^{*t} \xi \ . \tag{3.16}$$

Diğer taraftan, (3.15) ve (3.16) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\bar{g}(h^l(X, \bar{P}Y), \xi) = g\left(A_\xi^* X, \bar{P}Y\right) \tag{3.17}$$

$$\bar{g}(h^*(X, \bar{P}Y), N) = g(A_N X, \bar{P}Y) \tag{3.18}$$

$$\bar{g}(h^l(X, \xi), \xi) = 0, \ A_\xi^* \xi = 0 \ . \tag{3.19}$$

Genellikle M manifoldu üzerindeki indirgenmiş bağlantı ∇, metrik bağlantı değildir. Fakat $\bar{\nabla}$ bir metrik bağlantı olduğundan (3.5) eşitliği kullanılarak;

$$(\nabla_{Xg})(Y, Z) = \bar{g}(h^l(X, Y), Z) + \bar{g}(h^l(X, Z), Y). \tag{3.20}$$

elde edilir.

Aslında ∇^* bağlantısının $S(TM)$ uzayı üzerinde bir metrik bağlantı olduğunu belirtmek önemlidir. Son olarak ışığımsı altmanifoldlar için Gauss eşitliği,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z &+ A_{h^l(X,Z)}Y - A_{h^l(Y,Z)}X + A_{h^s(X,Z)}Y \\ &- A_{h^s(Y,Z)}X + (\nabla_X h^l)(Y, Z) - (\nabla_Y h^l)(X, Z) \\ &+ D^l\big(X, h^s(Y, Z)\big) - D^l\big(Y, h^s(X, Z)\big) + (\nabla_X h^s)(Y, Z) \\ &- (\nabla_Y h^s)(X, Z) + D^s\Big(X, h^l(Y, Z)\Big) - D^s\Big(Y, h^l(X, Z)\Big) \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklindedir.

BÖLÜM 3
DİLİMLENMİŞ KONTAK MANİFOLDLAR

3.1.Dilimlenmiş Hemen Hemen Kontak Manifoldlar

Kontak geometride çalışılan hemen hemen kontak metrik manifoldlar; eğer $d\eta(X,Y) = \Phi(X,Y) = g(X,\phi Y)$ eşitliğini sağlıyorsa; hemen hemen kontak metrik manifoldlar, kontak metrik manifoldlar olarak isimlendirilir. Kontak metrik manifoldlarda (ϕ,ξ,η) üçlüsü normal yapı ise, manifolda "Sasaki manifold" denir. Böylece hemen hemen kontak metrik manifold, kontak metrik manifold değil ise, Sasaki manifold da olamaz. Yaptığımız çalışmalarda gördüğümüz kadarıyla literatürde hemen hemen kontak metrik manifoldlara verilen örnekler $d\eta(X,Y) = \Phi(X,Y)$ eşitliğini sağlamamaktadırlar. Böylece bu manifoldlar Sasaki manifold da olamaz.

Örnek 3.1.1. $\mathbb{R}_q^{2m+1}$ uzayında η kontak yapısı $\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{m} y^i dx^i)$, karakteristik vektör alanı ξ olmak üzere $\xi = 2\partial z$ olarak, $\bar{g}$ yarı-Riemann metriğini ise,

$$\bar{g} = \eta\otimes\eta + \frac{1}{4}\Big(-\sum_{i=1}^{\frac{q}{2}} dx^i\otimes dx^i + dy^i\otimes dy^i + \sum_{i=q+1}^{m} dx^i\otimes dx^i + dy^i\otimes dy^i\Big)$$

şeklinde ve

$$\phi_0\big(\textstyle\sum_{i=1}^{m}(X_i\partial x^i + Y_i\partial y^i) + Z\partial z\big) = \sum_{i=1}^{m}\big(Y_i\partial x^i - X_i\partial y^i\big) + \sum_{i=1}^{m}(Y_i y^i)\partial z$$

olsun.

$\mathbb{R}_2^9$ manifoldunda $X = (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6,X_7,X_8,X_9)$ vektör alanı olup, her bir X_i, $X_i = (x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4,z)$ gibidir. Ayrıca $\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{m} y^i dx^i)$, 1-formu için $d\eta = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} dx^i \Lambda\, dy^i$ olur. $d\eta(X,Y)$ ifadesi hesaplandığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}(X_1Y_5 - X_5Y_1 + X_2Y_6 - X_6Y_2 + X_3Y_7 - X_7Y_3 + X_4Y_8 - X_8Y_4).$$

Diğer taraftan $g(X,\phi Y)$ ifadesi hesaplandığında ise aşağıdaki sonuç bulunur:

$$g(X,\phi Y) = \frac{1}{4}(X_9 - X_1y^1 - X_2y^2 - X_3y^3 - X_4y^4)(Y_5y^1 + Y_6y^2 + Y_7y^3 + Y_8y^4 - Y_5y^1 - Y_6y^2 - Y_7y^3 - Y_8y^4) + \frac{1}{4}(-X_1Y_5 + X_5Y_1 + X_3Y_7 - X_7Y_3 + X_4Y_8 - X_8Y_4).$$

Böylece $\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y) \neq d\eta(X,Y)$ sonucuna ulaşılır. $\Phi \neq d\eta$ olduğundan $(\mathbb{R}_2^9, \eta)$ kontak metrik manifold olamaz. Dolayısıyla Sasaki manifold değildir.

Tanım 3.1.1. [Hungerford T. W., 1974] V, bir vektör uzayı olsun. $S \subset V$ altuzayı için:

$$S^\perp = \{f \in V^* \mid f(s) = 0, \forall s \in S\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye S altuzayının ***sıfırlayanı (annihilatörü)*** denir. Ayrıca buradan da $dim\, S + dim\, S^\perp = dim\, V$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.1.2. V bir vektör uzayı, H kümesi de V vektör uzayında bir dağılım ve $S \subset H$ altuzayı için $\pi: V \to H$ izdüşüm fonksiyonu olsun. $S_\pi^\perp = \{f \in H^* \mid f(\pi X) = 0, \forall X \in V\}$ şeklinde tanımlanan kümeye S altuzayının π izdüşüm morfizmi ile oluşturulmuş ***dilimlenmiş sıfırlayanı*** denir.

Teorem 3.1.1. $dim(D_i)_{\pi_i}^\perp = 1$ ise $\xi^*(\xi) = 1$ olacak şekilde teklikle belirlenmiş bir ξ^* 1-formu vardır.

İspat: $dim(D_i)_{\pi_i}^\perp = 1$ ise $(D_i)_{\pi_i}^\perp = Sp\{\omega\}$ olacak şekilde bir $\omega \in H^*$ vektör alanı vardır. Bu durumda $\forall \xi^* \in (D_i)_{\pi_i}^\perp$ için $\xi^* = \lambda\omega$ $(\lambda \neq 0)$ olarak yazılır. Eğer $\lambda = \frac{1}{\omega(\xi)}$ olarak seçilirse $\xi^* = \frac{1}{\omega(\xi)}\omega \in (D_i)_{\pi_i}^\perp$ olur. Ayrıca $\xi^*(\xi) = \frac{1}{\omega(\xi)}\, \omega(\xi)$=1 dir.

Kabul edelim ki $\xi^*(\xi) = 1$ ve $\alpha(\xi) = 1$ olacak şekilde ikinci bir α fonksiyonu olsun. Böylece $\alpha = \lambda_1\omega$ ve $\xi^* = \lambda_2\omega$ şeklinde olur. Burada, $\alpha(\xi) = \lambda_1\omega(\xi)$ ve $\xi^*(\xi) = \lambda_2\omega(\xi)$ eşitliklerinden $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\omega(\xi)}$ elde edilir. Sonuç olarak $\xi^* = \alpha$ olur.

Sonuç 3.1.1. Bu durumda ω, 1-formu $\omega = \varpi + \xi^*$ olacak şekilde yazılır.

Tanım 3.1.2. M bir manifold ve TM, M manifoldunun teğet demeti olsun. Ayrıca H, TM teğet uzayı üzerinde bir dağılım ve $\xi \in H$ olsun. π projeksiyon morfizmini, (0,1) tipinde, ω 1-formunu (1,1) tipinde ve ϕ_π tensör alanlarını $\pi: TM \to H$ $(X \to \pi(X))$, $\omega : TM \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ $(X \to \omega(X))$, $\phi_\pi : TM \to H$ $(X \to \phi_\pi(X))$ şeklinde tanımlayalım. Eğer bu tensör alanları

$$\phi_\pi^2 X = -\pi(X) + \omega(X)\xi \tag{4.1}$$

$$\omega(\xi) = 1 \tag{4.2}$$

eşitliklerini sağlıyorsa, $(M, \phi_\pi, \omega, \pi, \xi)$ beşlisine ***dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold*** denir.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}^5$ uzayında koordinat fonksiyonları (x_1, x_2, y_1, y_2, z) olsun. ω tensör alanını ve ξ yapı vektör alanını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\omega = \frac{1}{2}(dz - y_1 dx_1)$$

$$\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

ω 1-formunun ve ξ yapı vektör alanının tanımlarından $\omega(\xi) = 1$ kolaylıkla görülür. Şimdi, $\mathbb{R}^5$ uzayında H altuzayını $H = Sp\{\partial x_1, \partial y_1, \partial z\}$ olarak seçelim. Bu durumda projeksiyon morfizmi π aşağıdaki gibi oluşur:

$$\pi : \mathbb{R}^5 \to H$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \to \pi X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_3 \\ 0 \\ X_5 \end{pmatrix}.$$

Diğer taraftan H altuzayı için $\mathbb{R}^5$ uzayında ϕ_π tensör alanı

$$\phi_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde seçildiğinde

$$\phi_\pi X = \begin{pmatrix} X_3 \\ 0 \\ -X_1 \\ 0 \\ y_1 X_3 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \phi_\pi^2 X = \begin{pmatrix} -X_1 \\ 0 \\ -X_3 \\ 0 \\ -y_1 X_1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (4.3) eşitlikleri (4.1) ifadesinde yazılırsa

$$\phi_\pi^2 X = -\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_3 \\ 0 \\ X_5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(X_5 - y_1 X_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi_\pi^2 X = -\pi(X) + \omega(X)\xi$$

elde edilir. Sonuç olarak $(\mathbb{R}^5, \phi_\pi, \omega, \pi, \xi)$ beşlisi dilimlenmiş hemen hemen kontak manifoldtur.

Teorem 3.1.1. $(M, \phi_\pi, \omega, \pi, \xi)$ beşlisi dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold olsun. Bu manifoldda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$i)\ \omega \circ \phi_\pi = 0$

$ii)\ \phi_\pi(\xi) = 0$

$iii)\ Ker\phi_\pi = \pi^{-1}(Sp\{\xi\})$.

İspat: $ii)$ Eğer X vektör alanı yerine ξ vektör alanı (4.1) ifadesinde yazıldığında $\phi_\pi^2 \xi = -\pi(\xi) + \omega(\xi)\xi = -\xi + \xi = 0$ elde edilir. Bu sonuç (4.1)'de kullanıldığında;

$$\phi_\pi^3(\xi) = \phi_\pi^2\big(\phi_\pi(\xi)\big) = 0 \tag{4.4}$$

$$\phi_\pi^2\big(\phi_\pi(\xi)\big) = -\pi\phi_\pi(\xi) + \omega\big(\phi_\pi(\xi)\big)\xi = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. Dilimlenmiş hemen hemen kontak manifoldlarda $\pi\phi_\pi = \phi_\pi$ özelliği vardır ve (4.5) numaralı ifadede bu özellik kullanıldığında;

$$\phi_\pi(\xi) = \omega\big(\phi_\pi(\xi)\big)\xi \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda kabul edelim $\omega\big(\phi_\pi(\xi)\big) \neq 0$ olsun. (4.6) eşitliğinin her iki tarafının ϕ_π altında görüntüsü alındığında;

$$\phi_\pi^2(\xi) = \omega\big(\phi_\pi(\xi)\big)\phi_\pi(\xi) = 0 \tag{4.7}$$

olur. Böylece $\phi_\pi(\xi) = 0$ sonucuna ulaşılır.

i) Burada χ(M) de $\phi_\pi^3(X) = -\phi_\pi(X)$ eşitliği ∀ X ∈ χ(M) için doğru olduğu görülür. Ayrıca:

$$\phi_\pi^3(X) = \phi_\pi^2\big(\phi_\pi(X)\big) \tag{4.8}$$

eşitliği yazıldığında

$$-\phi_\pi(X) + \omega\big(\phi_\pi(X)\big)\xi = -\phi_\pi(X) \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak $\omega \circ \phi_\pi = 0$ olur; çünkü $\xi \neq 0$ dır.

iii) $X \in Ker\phi_\pi$ ise $\phi_\pi(X) = 0$ eşitliği doğrudur. Bu özellik (4.1) de kullanıldığında

$$\phi_\pi^2 X = -\pi(X) + \omega(X)\xi = 0 \tag{4.10}$$

ifadesi elde edilir. (4.10) eşitliğinden yola çıkıldığında $\pi(X) = \omega(X)\xi$ eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik $X \in \pi^{-1}(Sp\{\xi\})$ sonucunu verir. Böylece $Ker\phi_\pi = \pi^{-1}(Sp\{\xi\})$ elde edilir.

3.2.Dilimlenmiş Hemen Hemen Kontak Metrik ve Dilimlenmiş Normal Kontak Metrik Manifoldlar

Bu bölümde dilimlenmiş hemen hemen kontak manifoldlarda Riemann metriği tanımlanarak dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifoldlar ve dilimlenmiş normal kontak metrik manifoldlar tanımlandı.

Tanım 3.2.1. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi)$ beşlisi dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold olsun. ∀ $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için:

$$g(\phi_\pi X, \phi_\pi Y) = g(\pi X, \pi Y) - \omega(X)\omega(Y) \tag{5.1}$$

eşitliği sağlanıyor ise, $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısına ***dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold*** denir.

Örnek 3.2.1. Örnek 3.1.2'de verilen manifold üzerinde g semi-Riemann metriği

$$g \coloneqq -\frac{1}{4}(dx_1^2 + dy_1^2) + \frac{1}{4}(dx_2^2 + dy_2^2) + \omega \otimes \omega \tag{5.2}$$

gibi tanımlansın. Bu durumda gerekli işlemler yapıldığında,

$$g(\phi_\pi X, \phi_\pi Y) = -\frac{1}{4}(X_3Y_3 + X_1Y_1)$$
$$g(\pi X, \pi Y) = -\frac{1}{4}(X_1Y_1 + X_3Y_3) + \omega(X)\omega(Y)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan anlaşılacağı gibi

$$g(\phi_\pi X, \phi_\pi Y) = g(\pi X, \pi Y) - \omega(X)\omega(Y)$$

olur. Sonuç olarak $(\mathbb{R}_2^5, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısı dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifoldtur. Dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifoldlardan dilimlenmiş kontak metrik manifoldlara geçiş yapmak için ***temel 2-form***

$$\Phi_\pi(X, Y) = g(\pi X, \phi_\pi Y) \tag{5.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.2. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısı dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Bu manifoldda

$$d\omega(X, Y) = \varepsilon g(\pi X, \phi_\pi Y) = \varepsilon \Phi_\pi(X, Y) \tag{5.4}$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu tür manifoldlara ***dilimlenmiş* $(\boldsymbol{\varepsilon})$*-kontak metrik manifold*** denir.

Örnek 3.2.2. Örnek 3.2.1'de $(\mathbb{R}_2^5, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısının dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold koşullarını sağladığı gösterilmişti. Bu manifoldda

$$d\omega = \frac{1}{4} dx_1 \wedge dy_1 \tag{5.5}$$

olur. (5.5) numaralı denklem kullanıldığında;

$$d\omega(\pi X, \pi Y) = \frac{1}{4}(X_1 Y_3 - Y_1 X_3)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$g(\pi X, \phi_\pi \mathrm{Y}) = -\frac{1}{4}(X_1 Y_3 - Y_1 X_3) = \Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

eşitliği vardır. Böylece $\Phi = -d\omega$ eşitliğine ulaşılır. Bu da bize $(\mathbb{R}_2^5, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısının dilimlenmiş (-1)-kontak metrik manifold olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.3. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi)$ dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold olsun. Bu durumda $\bar{\pi}$ morfizmi;

$$\bar{\pi} : \chi(M \times \mathbb{R}) \to \chi(M \times \mathbb{R})$$
$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right) \to \bar{\pi}\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\pi X, f\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\bar{\pi}$ morfizmi $\bar{\pi}^2 = \bar{\pi}$ eşitliğini sağlar. Yani $\bar{\pi}$, $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunda bir izdüşüm fonksiyonudur.

M manifoldu üzerinde parantez operatörü [,] olmak üzere, $\pi[\,,] = [\pi, \pi]$ eşitliği vardır. $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunda parantez operatörü için:

$$[\,,]: \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) \to \chi(M \times \mathbb{R})$$
$$\left(\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right) \to \left[\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right]$$

olmak üzere,

$$\left[\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right] = \left([X, Y], (X(g) - Y(f))\frac{d}{dt}\right) \tag{5.6}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır (Blair 1976, 2002). Burada $\bar{\pi}[\,,] = [\bar{\pi}, \bar{\pi}]$ eşitliğinin sağlandığını göstermek kolaydır. Diğer taraftan, J dönüşümü

$$J: \chi(M \times \mathbb{R}) \to \chi(M \times \mathbb{R})$$

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right) \to J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = (\phi_\pi X - f\xi, \omega(X)\frac{d}{dt}) \tag{5.7}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece J dönüşümünün

$i)$ J lineer

$ii)$ $J^2 = -\bar{\pi}$

özelliklerini sağladığı açıktır. Yani J dönüşümüne, $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde ***dilimlenmiş hemen hemen kompleks dönüşüm*** diyeceğiz.

Tanım 3.2.4. [Yano K. ve Kon M., 1984] Şayet N_J Nijenhius tensörü $N_J \equiv 0$ eşitliğini özdeşlik olarak sağlıyorsa, J dilimlenmiş hemen hemen kompleks yapısına ***integrallenebilir*** denir.

Tanım 3.2.5. Eğer $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunda J dilimlenmiş hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirse, $(\phi_\pi, \xi, \omega, \pi)$ dilimlenmiş hemen hemen kompleks yapısına ***dilimlenmiş normal yapı*** denir.

Dilimlenmiş kontak metrik manifoldlarda Nijenhius tensörünün bileşenlerinin hesaplanması önemlidir. Bunun için

$$N_J\left(\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right) = N_J\big((X,0),(Y,0)\big) + gN_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right) -$$
$$fN_J\left((Y,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right) + fgN_J(\left(0,\frac{d}{dt}\right),\left(0,\frac{d}{dt}\right))$$

ifadesi yazıldığında $N_J(\left(0,\frac{d}{dt}\right),\left(0,\frac{d}{dt}\right) = 0$ olduğundan sadece $N_J\big((X,0),(Y,0)\big)$ ve $N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)$ değerlerinin hesaplanmaları yeterli olacaktır. Bu ifadelerin bileşenleri yazıldığında

$$N_J\big((X,0),(Y,0)\big) = (N^1(X,Y), N^2(X,Y)\xi) \tag{5.8}$$

$$N_J\left((X,0),(0,\frac{d}{dt})\right) = (N^3(X), N^4(X)\xi) \tag{5.9}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.8) ve (5.9) de verilen ifadelerde bulunan N^1, N^2, N^3 ve N^4 bileşenlerinin değerlerinin hesaplanması için:

$$\begin{aligned} N_J\big((X,0),(Y,0)\big) = & -[(X,0),(Y,0)] + [J(X,0), J(Y,0)] - J[J(X,0),(Y,0)] \\ & -J[(X,0), J(Y,0)] \\ & = -([X,Y],0) + \left[\left(\phi_\pi X, \omega(X)\frac{d}{dt}\right), \left(\phi_\pi Y, \omega(Y)\frac{d}{dt}\right)\right] \\ & -J\left[\left(\phi_\pi X, \omega(X)\frac{d}{dt}\right), (Y,0)\right] \\ & -J[(X,0), \left(\phi_\pi Y, \omega(Y)\frac{d}{dt}\right)] \end{aligned} \tag{5.10}$$

eşitliği kullanılır. (5.10) ifadesinde parantez operatörünün tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} N_J\big((X,0),(Y,0)\big) = & -([X,Y],0) + \left([\phi_\pi X, \phi_\pi Y], \left(\phi_\pi X\omega(Y) - \phi_\pi Y\omega(X)\right)\frac{d}{dt}\right) \\ & -J\left([\phi_\pi X, Y], -Y\omega(X)\frac{d}{dt}\right) - J\left([X, \phi_\pi Y], -X\omega(Y)\frac{d}{dt}\right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

ifadesi elde edilir. (5.11) numaralı ifadede dilimlenmiş hemen hemen kompleks dönüşüm tanımı kullanıldığında (5.10) ifadesi

$$\begin{aligned} N_J\big((X,0),(Y,0)\big) = & -([X,Y],0) + \left([\phi_\pi X, \phi_\pi Y], \left(\phi_\pi X\omega(Y) - \phi_\pi Y\omega(X)\right)\frac{d}{dt}\right) \\ & -(\phi_\pi[\phi_\pi X, Y] + Y\omega(X)\xi, \omega([\phi_\pi X, Y])\frac{d}{dt}) - (\phi_\pi[X, \phi_\pi Y] \\ & -X\omega(Y)\xi, \omega([X, \phi_\pi Y])\frac{d}{dt}) \end{aligned} \tag{5.12}$$

şeklinde olur. (5.12) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler ve işlemeler yapıldığında;

$$\begin{aligned} N^1(X,Y) = & \phi_\pi^2[X,Y] + [\phi_\pi X, \phi_\pi Y] - \phi_\pi[\phi_\pi X, Y] - \phi_\pi[X, \phi_\pi Y] \\ & +(X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X,Y])\xi \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. Ayrıca N_{ϕ_π} tensörünün

$$N_{\phi_\pi}(X,Y) = \phi_\pi^2[X,Y] + [\phi_\pi(X), \phi_\pi(Y)] - \phi_\pi([\phi_\pi(X), Y]) - \phi_\pi([X, \phi_\pi(Y)]) \tag{5.14}$$

olduğu ve $2d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X,Y]$ eşitliği biliniyor. (5.13) ve (5.14) eşitliklerinden:

$$N^1(X,Y) = N_{\phi_\pi}(X,Y) + 2d\omega(X,Y)\xi \tag{5.15}$$

sonucu elde edilir. Şimdi $N^2(X,Y)$ tensörü için

$$N^2(X,Y) = \phi_\pi X\omega(Y) - \phi_\pi Y\omega(X) - \omega([\phi_\pi X,Y]) - \omega([X,\phi_\pi Y]) \tag{5.16}$$

$$(L_{\phi_\pi X}\omega)(Y) = \phi_\pi(X)\omega(Y) - \omega([\phi_\pi X,Y]) \tag{5.17}$$

$$(L_{\phi_\pi Y}\omega)(X) = \phi_\pi(Y)\omega(X) - \omega([\phi_\pi Y,X]) \tag{5.18}$$

sonuçları elde edilir. (5.17) ve (5.18) ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak

$$(L_{\phi_\pi X}\omega)(Y) - (L_{\phi_\pi Y}\omega)(X) = \phi_\pi(X)\omega(Y) - \phi_\pi(Y)\omega(X) - \omega([\phi_\pi X,Y]) - \omega([X,\phi_\pi Y])$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak:

$$N^2(X,Y) = (L_{\phi_\pi X}\omega)(Y) - (L_{\phi_\pi Y}\omega)(X) \tag{5.19}$$

elde edilir.

Ayrıca, $N_J\left((X\,,0)\,,(0,\frac{d}{dt})\right) = (N^3(X),N^4(X))$ eşitliğini belirtir ve gerekli işlemler yapıldığında

$$N^3(X) = -[\phi_\pi X,\xi] + \phi_\pi[X,\xi] \tag{5.20}$$

$$N^4(X) = \xi\omega(X) + \omega[X,\xi] \tag{5.21}$$

olur. Diğer taraftan $(L_\xi\phi_\pi)X = [\xi,\phi_\pi X] - \phi_\pi[X,\xi]$ ve $(L_\xi\omega)X = \xi,\omega(X) + \omega[X,\xi]$ eşitlikleri (5.20) ve (5.21) ifadelerinde kullanılırsa

$$N^3(X) = (L_\xi\phi_\pi)X \tag{5.22}$$

$$N^4(X) = (L_\xi \omega)X. \tag{5.23}$$

Sonuçları elde edilir.

Tanım 3.2.6. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi)$ dilimlenmiş hemen hemen kontak manifoldunun normal olması için gerek ve yeter şart N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörlerinin özdeşlik olarak sıfır olmasıdır.

Teorem 3.2.1. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi)$ beşlisi dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold olsun. Bu durumda $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$ dır.

İspat: $N^1(X, Y) = 0$ olsun. (5.13) eşitliğinde Y yerine ξ vektör alanı alınırsa;

$$N^1(X,\xi) = -\xi + [\phi_\pi X, \phi_\pi \xi] - \phi_\pi[\phi_\pi X, \xi] - \phi_\pi[X, \phi_\pi \xi] + \big(X\omega(\xi) - \xi\omega(X)\big)\xi \tag{5.24}$$

olur. (5.24) numaralı eşitlikten

$$[\xi, X] + \phi_\pi[\xi, \phi_\pi X] - \big(\xi\omega(X)\big)\xi = 0 \tag{5.25}$$

sonucuna ulaşılır. (5.25) eşitliğinin her iki tarafına ω 1-formu uygulandığında;

$$\omega[\xi, X] + \omega(\phi_\pi[\xi, \phi_\pi X]) - \big(\xi\omega(X)\big)\omega(\xi) = 0$$

veya kısaca, $\omega[\xi, X] - \xi\omega(X) = 0$ olur. Bu sonuç (5.23) eşitliğinde kullanıldığında $N^4(X) = 0$ elde edilir. (5.23) eşitliğinde X vektör alanı yerine $\phi_\pi X$ vektör alanı yazıldığında;

$$[\xi, \phi_\pi X] - \phi_\pi[\xi, X] + \phi_\pi[\xi, \omega(X)\xi\ ] = 0 \tag{5.26}$$

eşitliği elde edilir. (5.26) eşitliğinde her iki tarafın ω 1-formu altında görüntüsü alındığında;

$$\omega[\xi, \phi_\pi X] = 0 \tag{5.27}$$

olur. (5.25) eşitliğinin her iki tarafının ϕ_π altında görüntüsü alınırsa

$$\phi_\pi[\xi, X] - [\xi, \phi_\pi X] = 0 \tag{5.28}$$

elde edilir. (5.28) ifadesi $N^3(X)$ için kullanılırsa

$$N^3(X) = (L_\xi \phi_\pi)X = \phi_\pi[\xi, X] - [\xi, \phi_\pi X] = 0$$

sonucu elde edilir. Ayrıca $N^1(X, Y) = 0$ olduğundan $N^1(\phi_\pi(X), Y) = 0$ dır. Böylece (5.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&-[\phi_\pi(X), Y] - [X, \phi_\pi(Y)] + [\omega(X)\xi, \phi_\pi(Y)] - \phi_\pi[-X + \omega(X)\xi, Y] = 0 \\
&-\phi_\pi[\phi_\pi(X), \phi_\pi(Y)] + \phi_\pi(X)\omega(Y)\xi - [\phi_\pi(X), Y] - [X, \phi_\pi(Y)] - \phi_\pi(Y)\omega(X)\xi \\
&\quad +\omega(X)[\xi, \phi_\pi(Y)] - \phi_\pi[-X + \omega(X)\xi, Y] - \phi_\pi[\phi_\pi(X), \phi_\pi(Y)] + \phi_\pi(X)\omega(Y)\xi = 0
\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafa ω 1-formu uygulanır ve $\omega[\xi, \phi_\pi X] = 0$ eşitliğini kullanılırsa;

$$\phi_\pi(X)\omega(Y) - \phi_\pi(Y)\omega(X) - \omega[\phi_\pi(X), Y] - \omega[X, \phi_\pi(Y)] = 0 \tag{5.29}$$

elde edilir. Sonuç olarak $N^2(X, Y) = 0$ olur.

Teorem 3.2.2. Dilimlenmiş (ε)-kontak metrik manifoldlarda N^2 ve N^4 özdeşlik olarak sıfırdır.

İspat: $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısı dilimlenmiş (ε)-kontak metrik manifold ise,

$$d\omega(\pi X, \pi Y) = g(X, \phi_\pi(Y)) \tag{5.30}$$

eşitliği vardır. (5.21) numaralı eşitlikte X vektör alanı yerine $\phi_\pi(X)$ ve Y vektör alanı yerine $\phi_\pi(Y)$ yazıldığında;

$$\begin{aligned}
d\omega\big(\phi_\pi(X), \phi_\pi(Y)\big) &= g(\phi_\pi(X), \phi_\pi^2(Y)) \\
&= -g(X, \phi_\pi^3(Y)) \\
&= -g(X, -\phi_\pi(Y)) \\
&= g(X, \phi_\pi(Y))
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d\omega\big(\phi_\pi(X), \phi_\pi(Y)\big) = d\omega(X, Y) \tag{5.31}$$

eşitliği elde edilir. (5.31) ifadesinde Y vektör alanı yerine $\phi_\pi(Y)$ vektör alanı yazılırsa

$$d\omega(\phi_\pi(X), Y) + d\omega\big(X, \phi_\pi(Y)\big) = 0\ .$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $N^2(X, Y) = 0$ olur. Bu manifoldta

$$d\omega(X, \xi) = g\big(X, \phi_\pi(\xi)\big) = 0$$

ve

$$d\omega(X, \xi) = \frac{1}{2}(X\omega(\xi) - \xi\omega(X) - \omega[X, \xi])$$

olduğundan $\xi\omega(X) - \omega[X, \xi] = 0$ sonucu elde edilir. Böylece M manifoldunda $N^4(X) = 0$ eşitliği her $X \in \chi(M)$ vektör alanı için doğru olduğundan $N^4 \equiv 0$ sonucu elde edilir.

Tanım 3.2.7. Dilimlenmiş (ε)-kontak metrik manifoldu normal ise bu manifolda ***dilimlenmiş (ε)-Sasaki manifold*** denir.

Teorem 3.2.3. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısı dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Bu manifoldda $\forall X \in \chi(M)$ için kovaryant türev;

$$2g\big((\nabla_X\phi_\pi)Y, Z\big) = 3d\Phi_\pi(\pi X, \phi_\pi Y, \phi_\pi Z) - 3d\Phi_\pi(\pi X, \pi Y, \pi Z) + g(N^1(Y, Z), \phi_\pi X) + \omega(X)N^2(Y, Z) + 2(\phi_\pi Y, \pi X)\omega(Z) - 2(\phi_\pi Z, \pi X)\omega(Y) \tag{5.32}$$

eşitliği ile tanımlanır. (5.32) eşitliğinde $\Phi_\pi(X, Y) = g(\pi X, \phi_\pi Y)$ denklemi ile ifade edilir.

Tanım 3.2.8. $\bar{h}$ tensörü,

$$\bar{h}: \chi(M) \rightarrow H$$
$$X \rightarrow \bar{h}(X) = \tfrac{1}{2}(L_\xi\phi_\pi)X$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada $\pi\bar{h} = \bar{h}\pi = \bar{h}$ eşitlikleri aşikardır.

Teorem 3.2.4. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ dilimlenmiş (ε)-kontak metrik manifoldunda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\pi(\nabla_X\xi) = -\phi_\pi X - \phi_\pi\bar{h}X \tag{5.33}$$

eşitliği doğrudur. Aynı zamanda, ϕ_π ve $\bar{h}$ tensörü için $\phi_\pi \bar{h} = -\bar{h}\phi_\pi$ ve $tr\bar{h} = 0$ eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca $\bar{h}$ tensörü simetriktir.

İspat: $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ dilimlenmiş (ε)-kontak metrik manifoldunda $\nabla_\xi \phi_\pi = 0$ ve $\nabla_\xi \xi = 0$ dır. Böylece:

$$\begin{aligned} g\big((L_\xi \phi_\pi)X, Y\big) &= g(\nabla_X \phi_\pi X - \nabla_{\phi_\pi X}\xi - \phi_\pi\big(\nabla_\xi X\big) + \phi_\pi \nabla_X \xi, Y) \\ &= g(-\nabla_{\phi_\pi X}\xi + \phi_\pi \nabla_X \xi, Y) \end{aligned} \tag{5.34}$$

elde edilir. (5.34) eşitliğinde X ve Y vektör alanlarından birisi ξ karakteristik vektör alanı olursa (5.32) eşitliği sıfır olur. X ve Y vektör alanları, ξ ye ortagonal alınırsa, $N^2 = 0$ ve $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ olduğundan $\omega[\phi_\pi X, \pi Y] + \omega[\pi X, \phi_\pi Y] = 0$ eşitliği elde edilir. Böylece yapılan işlemler sonucunda,

$$g\big((L_\xi \phi_\pi)X, Y\big) = \omega\big(\nabla_{\phi_\pi X} Y\big) + \omega(\nabla_X \phi_\pi Y) \tag{5.35}$$

olur. Çünkü; $g(Y, \xi) = 0$ eşitliğinden $g\big(\nabla_{\phi_\pi X} Y, \xi\big) + g\big(Y, \nabla_{\phi_\pi X}\xi\big) = 0$ ifadesi elde edilir. Böylece $g\big(-\nabla_{\phi_\pi X}\xi, Y\big) = \omega\big(\nabla_{\phi_\pi X} Y\big)$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde işlemler yapılırsa; $g(\phi_\pi(\nabla_X \xi), Y) = \omega(\nabla_X \phi_\pi Y)$ bulunur. Böylece (5.34) eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\omega([\phi_\pi X, Y]) + \omega([X, \phi_\pi Y]) = 0 \tag{5.36}$$

olduğundan, $g\big(\nabla_{\phi_\pi X} Y - \nabla_Y \phi_\pi X, \xi\big) + g\big(\nabla_X \phi_\pi Y - \nabla_{\phi_\pi Y} X, \xi\big) = 0$ olur. Böylece,

$$g\big(\bar{h}X, Y\big) = \omega\big(\nabla_{\phi_\pi X} Y\big) + \omega(\nabla_X \phi_\pi Y) = \omega(\nabla_Y \phi_\pi X) + \omega\big(\nabla_{\phi_\pi Y} X\big) \tag{5.37}$$

ve $g\big(\bar{h}X, Y\big) = g\big(X, \bar{h}Y\big)$ elde edilir ($\bar{h}$ simetriktir). Dilimlenmiş (ε)-kontak metrik manifoldlarda $\Phi_\pi = d\omega$ ve $N^2 = 0$ eşitlikleri kullanılırsa

$$2g\big((\nabla_X \phi_\pi)\xi, Z\big) = g(N^1(\xi, Z), \phi_\pi X) - 2d\omega(\phi_\pi Z, X) \tag{5.38}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$N^1(\xi, Z) = \ \phi_\pi^2[\xi, Z] - \phi_\pi[\xi, \phi_\pi Z] \tag{5.39}$$

$$(L_\xi \phi_\pi)Z = [\xi, \phi_\pi Z] - \phi_\pi[\xi, Z] \tag{5.40}$$

dır. (5.38) eşitliğinde (5.39) ve (5.40) numaralı eşitlikler kullanılırsa

$$-\phi_\pi(L_\xi \phi_\pi)Z = \phi_\pi^2[\xi, Z] - \phi_\pi[\xi, \phi_\pi Z] \tag{5.41}$$

elde edilir. Böylece;

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X \phi_\pi)\xi, Z\big) &= g\big(-\phi_\pi(L_\xi \phi_\pi)Z, \phi_\pi X - 2d\omega(\phi_\pi Z, X)\big) \\ &= g\big(-(L_\xi \phi_\pi)Z, X\big) + 2d\omega\left(\big((L_\xi \phi_\pi)Z\big)\,\omega(X)\right) \\ &= -2g(\phi_\pi Z, \phi_\pi X) \end{aligned}$$

sonucundan

$$g\big((\nabla_X \phi_\pi)\xi, Z\big) = g\left(-\tfrac{1}{2}(L_\xi \phi_\pi)X, Z\right) - g(\pi X, Z) + g(\omega(X)\xi, Z) \tag{5.42}$$

olur. Sonuç olarak (5.42) eşitliğinden

$$(\nabla_X \phi_\pi)\xi = -\bar{h}X - \pi X + \omega(X)\xi \tag{5.43}$$

elde edilir. (5.43) eşitliğinde yapılan işlemler sonucunda

$$-\phi_\pi(\nabla_X \xi) = -\bar{h}X - \pi X + \omega(X)\xi = 0 \tag{5.44}$$

ifadesi elde edilir. Böylece M manifoldunda

$$\pi(\nabla_X \xi) = -\phi_\pi X - \phi_\pi \bar{h} X \tag{5.45}$$

olur.

Teorem 3.2.5. $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ altılısı dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold olsun. M manifoldunun dilimlenmiş (sliced) Sasaki manifold olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \chi(M)$ için:

$$\pi(\nabla_X \phi_\pi)Y = g(\pi X, \pi Y)\xi - \omega(Y)\pi(X) \tag{5.46}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $(M, \phi_\pi, \xi, \omega, \pi, g)$ dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifoldunda $N^1 \equiv 0$ olduğundan

$$2g\big((\nabla_X \phi_\pi)Y, \pi Z\big) = 2d\omega(\phi_\pi Y, X)\omega(Z) - 2d\omega(\phi_\pi Z, X)\omega(Y) \tag{5.47}$$

eşitliği yazılır. (5.47) numaralı eşitlikte gerekli işlemler yapıldığında

$$\pi(\nabla_X \phi_\pi)Y = g(\pi X, \pi Y)\xi - \omega(Y)\pi X \tag{5.48}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

$\mathcal{A}$ KÜMESİ ÜZERİNDE SASAKİ MANİFOLDLARIN YENİDEN YAPILANDIRILMASI

TM üzerinde $H_1, H_2, \dots, H_k$ $(i = 1, \dots, k)$ dağılımları ele alınsın. Ayrıca her bir H_i dağılımı üzerinde π_i projeksiyon morfizmleri, (0,1) tipinde ω_i tensör alanları ve (1,1) tipinde ϕ_{π_i} tensör alanları her $i = 1, \dots, k$ için: $\pi_i : TM \to H$ $(X \to \pi(X))$, $\omega_i : TM \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ $(X \to \omega_i(X))$ ve $\phi_{\pi_i} : TM \to H$ $(X \to \phi_{\pi_i}(X))$ şeklinde tanımlansın.

Notasyon olarak, bundan sonra ϕ_{π_i} ifadesini ϕ_i ile göstereceğiz. Kabul edelimki her $i = 1, \dots, k$ için $(M, \phi_i, \omega_i, \pi_i, \xi)$ yapıları dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold olsun. Yeni bir manifold yapısını teğet demeti sonlu sayıda dağılıma parçalayarak tanımlayacağız. Bunun için TM teğey uzayı üzerinde $H_1, H_2, \dots, H_k$ $(i = 1, \dots, k)$ dağılım olsunlar ve

$$\begin{aligned} &i)\ H_1 + H_2 + \cdots + H_k = TM \\ &ii)\ H_i \cap H_j = \begin{cases} H_i & i = j \\ Sp\{\xi\} & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \tag{6.1}$$

koşullarını sağlasınlar. Ayrıca ϕ_i, π_i ve ω_i

$$\phi_i \pi_i = \pi_i \phi_i = \phi_i \tag{6.2}$$

$$\phi_i^2 X = -\pi_i(X) + \omega_i(X)\xi \tag{6.3}$$

koşullarını sağlasınlar. Bu durumda kolaylıkla $dim\, H_i = 2n + 1 < dim\, TM$ görülür. Burada $\overline{D}_i$ ve D_i distribüsyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{gathered} \overline{D}_i = \{X \in TM | \omega_i(X) = 0\} \\ D_i = \{X \in H_i | \overline{\omega}_i(X) = 0\}. \end{gathered}$$

Burada ω_i 1-formu $\omega_i = \overline{\omega}_i + \xi^*$ olacak şekilde tanımlanmıştır. Eğer $X \in H_i = D_i \oplus Sp\{\xi\}$ olursa; bir $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $X = \bar{X}_i + \lambda\xi$ olur ve her iki tarafa ω_i 1-formu uygulanırsa $\omega_i(X) = \lambda$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak; eğer $X \in H_i$ ise $X = \bar{X}_i + \omega_i(X)\xi$ yazılır. Böylelikle oluşturulacak yapı için

$$\eta = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \cdots + \bar{\omega}_k + \xi^* \tag{6.4}$$

biçiminde yazılır. Burada $\eta(X) = \omega_1(X) = \cdots = \omega_k(X)$'dir.

Tanım 4.1. $(M, \phi_i, \omega_i, \pi_i, \xi)$ beşlileri her $i = 1, \ldots, k$ için dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold olsun. Ayrıca TM üzerinde $H_1, H_2, \ldots, H_k$ $(i = 1, \ldots, k)$ dağılım olsunlar ve

$$\begin{aligned}
&i)\ H_1 + H_2 + \cdots + H_k = TM \\
&ii)\ H_i \cap H_j = \begin{cases} H_i & i = j \\ Sp\{\xi\} & i \neq j \end{cases} \\
&iii)\ \phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k \\
&iv)\ \eta = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \cdots + \bar{\omega}_k + \xi^*
\end{aligned} \tag{6.5}$$

koşullarını sağlasınlar. Bu durumda $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\phi_i}, \boldsymbol{\omega_i}, \boldsymbol{\pi_i}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\xi})\}_{i \in \wedge}$ ailesini tanımlayabiliriz. $\mathcal{A}$ ailesi verildiğinde $(i), (ii), (iii)$ ve (iv) koşullarını sağladığı kabul edilecektir.

Teorem 4.1. $boyD_i = 2p,\ p \in \mathbb{N}$ dir.

İspat: Burada $D_i \subset H_i$ dir. Ayrıca $X \in D_i$ için $\pi_i X = X$ dir. Bu durumda

$$\phi_i^2 X = -X$$

eşitliği elde edilir. Bu da bize ϕ_i morfizminin, D_i dağılımı üzerinde hemen hemen kompleks dönüşüm olduğunu gösterir. Lineer Cebir'in iyi bilinen bir teoreminin sonucu olarak $boyD_i = 2p,\ p \in \mathbb{N}$ olur.

Teorem 4.2. Her $i = 1, \ldots, k$ için $(M, \phi_i, \omega_i, \pi_i, \xi)$ beşlisi dilimlenmiş hemen hemen kontak manifold olsun. Eğer ϕ ve η tensör alanları;

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k \tag{6.6}$$

$$\eta = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \cdots + \bar{\omega}_k + \xi^* \tag{6.7}$$

şeklinde tanımlanırsa (M, ϕ, η, ξ), dörtlüsü hemen hemen kontak manifold olur.

İspat: Eğer $X \in H_i$ bir vektör alanı ise $X = \bar{X}_i + \omega_i(X)\xi$ formunda yazılır. Bu eşitlikten

$$\phi_i^2 X = -\bar{X}_i - \omega_i(X)\xi + \omega_i(X)\xi \tag{6.8}$$

$$\phi_i^2 X = -\bar{X}_i \tag{6.9}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi kabul edelim ϕ tensör alanı $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k$ şeklinde tanımlansın. $X \in TM,\ TM = D_1 \oplus D_2 \oplus \ldots \oplus D_k \oplus Sp\{\xi\}$ olduğundan X vektör alanı

$$X = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \cdots + \bar{X}_k + \eta(X)\xi \tag{6.10}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $\phi(\bar{X}_i) = \phi_i(\bar{X}_i)$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \phi(\bar{X}_1) + \phi(\bar{X}_2) + \cdots + \phi(\bar{X}_k) + \eta(X)\phi(\xi) \\ &= \phi_1(\bar{X}_1) + \phi_2(\bar{X}_2) + \cdots + \phi_k(\bar{X}_k) \end{aligned}$$

olur. Böylece gerekli işlemler yapıldığında $\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ eşitliği elde edilir. Ayrıca $\eta(\xi) = \bar{\omega}_1(\xi) + \bar{\omega}_2(\xi) + \cdots + \bar{\omega}_k(\xi) + \xi^*(\xi)$ yazıldığında $\eta(\xi) = 1$ dir. Sonuç olarak (M, ϕ, η, ξ) dörtlüsü hemen hemen kontak manifoldtur.

Tanım 4.2. $\mathcal{A}$ ailesi üzerinde tanımlanan (M, ϕ, η, ξ) dörtlüsüne ***$\mathcal{A}$* kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak manifold** denir.

Teorem 4.3. M bir m-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve her $i = 1, \ldots, k$ için $(M, \phi_i, \omega_i, \pi_i, g, \xi)$ altılısı dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer ϕ ve η tensör alanları

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k$$
$$\eta = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \cdots + \bar{\omega}_k + \xi^*$$

gibi tanımlandığında (M, ϕ, η, g, ξ) beşlisi hemen hemen kontak metrik manifold olur.

İspat: Her bir $(M, \phi_i, \omega_i, \pi_i, g, \xi)$ altılısı dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold olduğundan;

$$g(\phi_i X, \phi_i Y) = g(\pi_i X, \pi_i Y) - \omega_i(X)\omega_i(Y)$$

denklemleri burada sağlanmaktadır. (M, ϕ, η, g, ξ) manifoldunun hemen hemen kontak metrik manifold olduğunu göstermek için $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. TM teğet uzayında $X = X_1 + \cdots + X_k + \lambda_X \xi$ ve $Y = Y_1 + \cdots + Y_k + \lambda_Y \xi$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) &= g\big((\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k)X, (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k)Y\big) \\ &= g(X_1 + X_2 + \cdots + X_k + \lambda_X \xi, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k + \lambda_Y \xi) - \lambda_X \lambda_Y g(\xi, \xi) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak; (M, ϕ, η, g, ξ) beşlisi hemen hemen kontak metrik manifold olur.

Teorem 4.3.'ün sonucu olarak yeni bir manifold olarak $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde aşağıdaki tanım yapılır.

Tanım 4.3. (M, ϕ, η, g, ξ) manifolduna ***$\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold*** denir.

Tanım 4.4. (M, ϕ, η, g, ξ) manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold ve $\forall i = 1, \dots, k$ için $(M, \phi_i, \omega_i, \pi_i, g, \xi)$ manifoldları dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold olsunlar. Eğer;

$$\Phi = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \dots + \alpha_k \Phi_k \tag{6.11}$$

$$d\eta = \beta_1 d\omega_1 + \beta_2 d\omega_2 + \dots + \beta_k d\omega_k \tag{6.12}$$

eşitlikleri $\forall i = 1, \dots, k$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2, \dots, \beta_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için sağlanıyorsa; (M, ϕ, η, g, ξ) manifolduna ***$\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış kontak metrik manifold*** denir.

Tanım 4.5. (M, ϕ, η, g, ξ) manifolduna $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış kontak metrik manifold olsun. Eğer ξ karakteristik yapı vektör alanı Killing vektör alanı ise, (M, ϕ, η, g, ξ) manifolduna ***$\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış K −kontak manifold*** denir.

Örnek 4.1. $\mathbb{R}^5_2$ uzayında $\omega_1 = \frac{1}{2}(dz - y_1 dx_1)$ ve $\omega_2 = \frac{1}{2}(dz - y_2 dx_2)$ $1-$formlarını seçelim. Ayrıca η 1-formunu $\eta = \frac{1}{2}(dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2)$ şeklinde tanımlayalım. Bu seçimler ve tanımlamalardan sonra ϕ_1 ve ϕ_2 tensör alanlarını;

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımladığımızda ϕ tensör alanı;

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Ayrıca H_1 ve H_2 dağılımları

$H_1 = Sp\{\partial x_1, \partial y_1, \partial z\}$ ise $\overline{H}_1 = Sp\{e_1 = 2\partial y_1, e_3 = 2(\partial x_1 + y_1 \partial z)\}$

$H_2 = Sp\{\partial x_2, \partial y_2, \partial z\}$ ise $\overline{H}_2 = Sp\{e_2 = 2\partial y_2, e_3 = 2(\partial x_2 + y_2 \partial z)\}$

biçiminde tanımlandığında

i) $D = \overline{H}_1 \oplus \overline{H}_2$

ii) $\chi(\mathbb{R}_2^5) = H_1 + H_2$ (6.13)

iii) $H_1 \cap H_2 = Sp\{\xi\}$

özellikleri sağlanır. Burada Riemann metriği,

$$g := -\frac{1}{4}(dx_1^2 + dy_1^2) + \frac{1}{4}(dx_2^2 + dy_2^2) + \eta \otimes \eta$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan π_1 ve π_2 projeksiyon morfizmleri

$$\pi_1 : \chi\left(\mathbb{R}_2^5\right) \longrightarrow H_1$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \to \pi_1 X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_3 \\ 0 \\ X_5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 : \chi\left(\mathbb{R}_2^5\right) \longrightarrow H_2$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \to \pi_2 X = \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}.$$

şeklinde tanımlanırsa $\phi_1(X) = \begin{pmatrix} X_3 \\ 0 \\ -X_1 \\ 0 \\ y_1 X_3 \end{pmatrix}$ ve $\phi_2(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ X_4 \\ 0 \\ -X_2 \\ y_2 X_4 \end{pmatrix}$ olur.

Aynı zamanda bu tanımlamalardan:

$$\phi \circ \pi_1 = \phi_1 \qquad \eta \circ \pi_1 = \omega_1$$
$$\phi \circ \pi_2 = \phi_2 \qquad \eta \circ \pi_2 = \omega_2$$

Eşitliklerinin sağlandığı kolaylıkla görülür. Böylece $\forall\, i = 1{,}2$ için $(\mathbb{R}_2^5, \phi_i, \omega_i, \pi_i, g, \xi)$ manifoldlarının dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifold oldukları kolaylıkla gösterilir. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$d\omega_1 = \frac{1}{4} dx_1 \Lambda dy_1, \qquad d\omega_2 = \frac{1}{4} dx_2 \Lambda dy_2$$
$$d\eta = \frac{1}{4} dx_1 \Lambda dy_1 + \frac{1}{4} dx_2 \Lambda dy_2 = d\omega_1 + d\omega_2$$

eşitlikleri bulunur. Burada $d\omega_1(X, Y)$ değerini hesaplarsak

$$d\omega_1(X, Y) = \frac{1}{4}(dx_1(\mathrm{X}).dy_1(Y) - dy_1(Y).dx_1(\mathrm{X})$$
$$= \frac{1}{4}(X_1 Y_3 - Y_1 X_3)$$

olur. Diğer taraftan $\Phi_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = g(\pi_1 \mathrm{X}, \phi_1 \mathrm{Y}) = -\frac{1}{4}(X_1 Y_3 - Y_1 X_3)$ olduğundan $\Phi_1 = -d\omega_1$ elde edilir. $d\omega_2$ için de benzer işlemler yapıldığında $\Phi_2 = d\omega_2$ bulunur. Sonuç olarak $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ eşitliğinden $\Phi = -d\omega_1 + d\omega_2$ elde edilir. Böylece bütün bu işlemler bize gösteriyor ki; $(\mathbb{R}^5_2, \phi, \eta, g, \xi)$ beşlisi $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış kontak metrik manifoldtur.

Tanım 4.6. (M, ϕ, η, g, ξ) manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak manifold olsun. Bu manifold üzerinde ***h ve h_i operatörleri*** $\forall i = 1,2, \ldots, k$ için $h: \chi(M) \to \chi(M)$ $(h(X) = \frac{1}{2}(L_\xi \phi)X)$ şeklinde tanımlanır, burada $h_i(X) = \frac{1}{2}(L_\xi \phi_i)X$ dir.

Teorem 4.4. (M, ϕ, η, g, ξ) manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak manifold ve h ve h_i operatörleri $\forall i = 1,2, \ldots, k$ için Tanım 4.8. deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda $h = \sum_{i=1}^k h_i$ olur.

İspat: M manifoldunda $\forall X \in \chi(M)$ için $X = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \cdots + \bar{X}_k + \eta(X)\xi$ yazılır. Aynı zamanda $\bar{X}_i \in H_i$ olduğundan $\pi_i X = \bar{X}_i$ ve $\pi_i \bar{X}_j = 0$ $(i \neq j)$ olur. Böylece:

$$
\begin{aligned}
h(X) &= \frac{1}{2}(L_\xi \phi)X \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}(L_\xi \phi)\bar{X}_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}(L_\xi \phi) \circ \pi_i X \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}(L_\xi \phi \circ \pi_i)X \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}(L_\xi \phi_i)X \\
&= \sum_{i=1}^{k} h_i X
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her $X \in \chi(M)$ vektör alanı için bu eşitlik doğru olduğundan $h = \sum_{i=1}^k h_i$ olur.

Teorem 4.5. (M, ϕ, η, g, ξ) manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Bu manifold üzerinde $\pi = \sum_{i=1}^k \beta_i \pi_i$ olmak üzere her $X \in \chi(M)$ için:

$$
\nabla_X \xi = -\phi h X - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, \phi_i X = -\phi h X - \phi(\pi X)
$$

dir.

İspat: ϕ kapalı ve $N^2 \equiv 0$ olduğundan (5.32) denkleminde;

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = g(N^1(Y,Z),\phi X) + 2d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z,X)\eta(Y) \quad (6.14)$$

olur. Eğer (6.14) eşitliğinde Y vektör alanı yerine, ξ vektör alanı yazılırsa;

$$2g\big((\nabla_X\phi)\xi,Z\big) = g(N^1(\xi,Z),\phi X) - 2d\eta(\phi Z,X)$$

elde edilir. Ayrıca $d\eta(\xi,Z) = \sum_{i=1}^{k}\beta_i\, d\omega_i(\xi,Z) = 0$ eşitliğinden $N^1(\xi,Z) = N_\phi(\xi,Z)$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç kullanıldığında;

$$2g\big((\nabla_X\phi)\xi,Z\big) = g(\phi^2[\xi,Z] - \phi[\xi,\phi Z] - \phi X) - \sum_{i=1}^{k}\beta_i\, d\omega_i(\phi Z,X)$$

$$= -g\big(\phi(L_\xi\phi)Z,\phi X\big) - 2\sum_{i=1}^{k}\beta_i\, g(\phi_i Z,\phi_i X)$$

$$= -g((L_\xi\phi)Z,X) + \eta((L_\xi\phi)Z)\eta(X) - 2\sum_{i=1}^{k} g(\pi_i Z,\pi_i X) + 2\sum_{i=1}^{k}\omega_i(Z)\omega_i(X)$$

olur. Son eşitlikten

$$2g\big((\nabla_X\phi)\xi,Z\big) = -g((L_\xi\phi)X,Z) - 2g(\textstyle\sum_{i=1}^{k}\beta_i\pi_i X,Z) + \sum_{i=1}^{k} g(\beta_i\omega_i(X)\xi,Z) \quad (6.15)$$

ifadesine ulaşılır. (6.15) denkleminden

$$-\phi(\nabla_X\xi) = -hX + \textstyle\sum_{i=1}^{k}\beta_i\,{\phi_i}^2X \text{ veya } \nabla_X\xi = -\phi hX - \sum_{i=1}^{k}\beta_i\,\phi_i X$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.6. (M,ϕ,η,g,ξ) manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Bu durumda $\pi_i N^1 = N_i^1$ eşitliği doğrudur.

İspat: Dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifoldlarda (5.13) eşitliği kullanılırsa

$$N_i^1(X,Y) = -\pi_i[X,Y] + [\phi_i X,\phi_i Y] - \phi_i[\phi_i X,Y] - \phi_i[X,\phi_i Y] + \big(X\omega(Y) - Y\omega(X)\big)\xi \quad (6.16)$$

eşitliği elde edilir. (6.16) eşitliğinde π_i izdüşüm morfizminin ve ϕ_i (1,1) tensörünün özellikleri kullanılırsa

$$N_i^1(X,Y) = \pi_i(-[X,Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] + \big(X\omega(Y) - Y\omega(X)\big)\xi)$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$N_i^1(X,Y) = \pi_i N^1(X,Y) \tag{6.17}$$

olur.

Bu teorem göstermektedir ki eğer M manifoldu normal ise her dilimi normaldir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1. Eğer (M, ϕ, η, ξ) dörtlüsü $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak manifold ve (ϕ, η, ξ) üçlüsü normal ise her $i \in \wedge$ için (ϕ_i, η_i, ξ) üçlüsü normaldir.

Teorem 4.7. Kabul edelim her $i \in \wedge$ için (ϕ_i, η_i, ξ) normal ve ayrıca (M, ϕ, η, ξ) manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak manifold olsun. Bu durumda (M, ϕ, η, ξ) manifoldunda $\lambda: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ şeklinde tanımlanan bir diferansiyellenebilir fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$N^1(X,Y) = \lambda(X,Y)\xi \quad \forall X, Y \in \chi(TM). \tag{6.18}$$

İspat: Her $i \in \wedge$ için (ϕ_i, η_i, ξ) normal olduğundan her $i \in \wedge$ için $N_i^1 \equiv 0$ dır. Bu durumda her $i \in \wedge$ için $\pi_i X = X_i + \eta(X)\xi$ denklemleri yazılır. Bu denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\textstyle\sum_{i=1}^k \pi_i X = \sum_{i=1}^k X_i + k\eta(X)\xi. \tag{6.19}$$

elde edilir. (6.19) eşitliğinde gerekli işlemler yapıldığında;

$$\textstyle(\sum_{i=1}^k \pi_i)X = X + (k-1)\eta(X)\xi. \tag{6.20}$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak (6.20) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^1(X,Y) = N^1(X,Y) + (k-1)\eta\big(N^1(X,Y)\big)\xi \tag{6.21}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (6.21) numaralı denklemde yapılan işlemlerle

$$\lambda(X,Y) = (1-k)\eta\big(N^1(X,Y)\big) \text{ için } N^1(X,Y) = (1-k)\eta\big(N^1(X,Y)\big) \tag{6.22}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.8. (M,ϕ,η,g,ξ) beşlisi $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Bu durumda (ϕ,η,ξ) yapısının normal olması için gerek yeter koşul $\forall i \in \wedge$ için (ϕ_i,η_i,ξ) yapısının normal olmasıdır.

İspat: Kabul edelim (M,ϕ,η,g,ξ) beşlisi $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold ve (ϕ,η,ξ) yapısı normal olsun. Biliniyor ki N^1 özdeşlik olarak sıfırdır. Teorem 4.6. dan $\pi_i N^1 = N_i^1$ eşitliğini kullanıldığında $\forall i \in \wedge$ için $N_i^1 \equiv 0$ bulunur. Böylece $\forall i \in \wedge$ için (ϕ_i,η_i,ξ) yapısı normaldir.

Tersine kabul edelim $\forall i \in \wedge$ için (ϕ_i,η_i,ξ) yapısı normal olsun. $\forall i \in \wedge$ için (ϕ_i,η_i,ξ) normal olduğundan $N_i^1 \equiv 0$ dır. Bu durumda $\pi_i X = X_i + \eta(X)\xi$ eşitliklerini $\forall i \in \wedge$ için yazılır ve taraf tarafa toplanırsa:

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i X = \sum_{i=1}^{k} X_i + k\eta(X)\xi \tag{6.23}$$

sonucu elde edilir. (6.23) numaralı eşitlikte gerekli işlemler yapıldığında:

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} \pi_i\Big)X = X + (k-1)\eta(X)\xi \tag{6.24}$$

elde edilir. (6.24) sonucunda X vektör alanı yerine $N^1(X,Y)$ vektör alanı yazıldığında;

$$\sum_{i=1}^{k} N_i^1(X,Y) = N^1(X,Y) + (k-1)\eta\big(N^1(X,Y)\big)\xi \tag{6.25}$$

elde edilir. Buradan $N^1(X,Y) = \lambda(X,Y)\xi$ ve $\lambda(X,Y) = (1-k)\eta\big(N^1(X,Y)\big)$ eşitlikleri yazılır. η 1-formu $N^1(X,Y) = \lambda(X,Y)\xi$ eşitliğinin her iki tarafına da uygulandığında $\eta\big(N^1(X,Y)\big) = \lambda(X,Y)$ olur. Fakat biliyoruz ki $\lambda(X,Y) = (1-k)\eta\big(N^1(X,Y)\big)$ eşitliği vardır. Böylece $\eta\big(N^1(X,Y)\big) = (1-k)\eta\big(N^1(X,Y)\big)$ ifadesinden $-k\eta\big(N^1(X,Y)\big) = 0$ elde edilir. $k \geq 1$ olduğundan $N^1(X,Y) \equiv 0$ bulunur. Sonuç olarak (ϕ,η,ξ) yapısı normaldir.

Sonuç 4.2. Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

i) Eğer λ özdeşlik olarak sıfıra eşit ise (ϕ,η,ξ) normal yapıdır.

ii) Eğer λ özdeşlik olarak sıfıra eşit değil ise (ϕ,η,ξ) yapısına semi-normal yapı ve (M,ϕ,η,ξ) manifolduna da semi-normal manifold denir.

Tanım 4.7. (M,ϕ,η,g,ξ) beşlisi $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold ve (ϕ,η,ξ) yapısı M üzerinde semi-normal olsun. Bu durumda (M,ϕ,η,g,ξ) manifolduna ***$\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold*** denir.

Teorem 4.9. (M,ϕ,η,g,ξ) manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifold olsun. (M,ϕ,η,g,ξ) manifoldunun $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X\phi)Y = g(\pi X,Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) \tag{6.26}$$

eşitliğinin $\forall X,Y \in \chi(M)$ için sağlanmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki (M,ϕ,η,g,ξ) $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifoldu $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2,\dots,\beta_k)$ $-$Sasaki manifoldu olsun. Bu durumda:

$$\Phi = \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 + \ \dots + \alpha_k\Phi_k$$
$$d\eta = \beta_1 d\omega_1 + \beta_2 d\omega_2 + \ \dots + \beta_k d\omega_k$$
$$\pi = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\pi_i$$

eşitlikleri yazılır. ϕ'nin kovaryant türevinin formülü

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 3d\Phi(X,\phi Y,\phi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) + g(N^1(Y,Z),\phi X) \tag{6.27}$$
$$+N^2(Y,Z)\eta(X) + 2d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z,X)\eta(Y)$$

şeklinde yazılır. (6.27) ifadesinde $d\Phi = 0$ olduğundan;

$$g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - d\eta(\phi Z,X)\eta(Y) \tag{6.28}$$

eşitliği elde edilir. (6.28) numaralı denklemde $d\eta = \beta_1 d\omega_1 + \beta_2 d\omega_2 + \ ... + \beta_k d\omega_k$ eşitliği kullanıldığında;

$$g\big((\nabla_X \phi)Y, Z\big) = (\beta_1 d\omega_1 + \beta_2 d\omega_2 + \ ... + \beta_k d\omega_k)(\phi Y, X)\eta(Z) - (\beta_1 d\omega_1 + \beta_2 d\omega_2 + \cdots + \beta_k d\omega_k)(\phi Z, X)\eta(Y) \quad (6.29)$$

ifadesi elde edilir. (6.29) ifadesinde lineer olma özellikleri kullanıldığında;

$$g\big((\nabla_X \phi)Y, Z\big) = \big(\beta_1 d\omega_1(\phi Y, X) + \beta_2 d\omega_2(\phi Y, X) + \ ... + \beta_k d\omega_k(\phi Y, X)\big)\eta(Z) - (\beta_1 d\omega_1(\phi Z, X) + \beta_2 d\omega_2(\phi Z, X) + \ ... + \beta_k d\omega_k(\phi Z, X))\eta(Y) \quad (6.30)$$

eşitliği bulunur. Dilimlenmiş kontak metrik manifoldlarda $d\omega_1 = g(\phi_1 Y, X)$ özelliğini (6.30) denkleminde kullanırsak;

$$g\big((\nabla_X \phi)Y, Z\big) = (\beta_1 g(\phi_1 Y, X) + \beta_2 g(\phi_2 Y, X) + \ ... + \beta_k g(\phi_k Y, X))\eta(Z) - (\beta_1 g(\phi_1 Z, X) + \beta_2 g(\phi_2 Z, X) + \ ... + \beta_k g(\phi_k Z, X))\eta(Y) \quad (6.31)$$

elde edilir. (6.31) ifadesinde gerekli işlemler yapıldığında;

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_X \phi)Y, Z\big) = {} & (\beta_1(g(\pi_1 Y, \pi_1 X) - \omega_1(X)\omega_1(Y)) + \beta_2(g(\pi_2 Y, \pi_2 X) - \omega_2(X)\omega_2(Y)) \\ & + \ ... + \beta_k(g(\pi_k Y, \pi_k X) - \omega_k(X)\omega_k(Y)))\eta(Z) - (\beta_1(g(\pi_1 Z, \pi_1 X) \\ & - \omega_1(X)\omega_1(Z)) + \beta_2(g(\pi_2 Z, \pi_2 X) - \omega_2(X)\omega_2(Z)) + \ ... \\ & + \beta_k(g(\pi_k Z, \pi_k X) - \omega_k(X)\omega_k(Z)))\eta(Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi toplam sembolüyle yazarsak;

$$g\big((\nabla_X \phi)Y, Z\big) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, g(Y, \pi_i X)\eta(Z) - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, g(Z, \pi_i X)\eta(Y) \quad (6.32)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\pi = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \pi_i$$

eşitliğini (6.32) numaralı ifadede kullanılırsak;

$$g\big((\nabla_X \phi)Y, Z\big) = g(g((\sum_{i=1}^{k} \beta_i \pi_i)\, X, Y)\xi, Z) - g(\eta(Y)(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \pi_i)X, Z)$$
$$= g(g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X), Z)$$

elde edilir. g, metriği Riemann metriği olduğundan;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) \tag{6.33}$$

sonucuna ulaşırız.

BÖLÜM 5
$\mathcal{A}$ KÜMESİ ÜZERİNDE YAPILANDIRILMIŞ SASAKİ MANİFOLDLARIN RIEMANN EĞRİLİĞİ

(M,ϕ,η,g,ξ) beşlisi $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış kontak metrik manifold olmak üzere; bu bölümde M manifoldunun Riemann eğrilikleri ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bunlarla ilgili sonuçlar elde edildi.

Tanım 5.1. [Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996] Kabul edelim ki (M,ϕ,η,g,ξ) beşlisi $(2n+1)$ boyutlu, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış kontak metrik manifold ve $X\in\chi(M)$ birim vektör alanı ξ karakteristik vektör alanına dik olsun. Eğer $\{X,\phi X\}$ kümesi bir düzlem kesitinin tabanı ise $\kappa(X,\phi X)=g(R(X,\phi X)\phi X,X)$ eşitliği ile verilen κ değerine ***ϕ-kesitsel eğrilik*** denir.

Aşağıdaki tanım (Camcı, 2007) doktora tezinde yer alan Tanım 3.4.2’den yola çıkılarak benzer şekilde oluşturuldu.

Tanım 5.2. Kabul edelim ki $(M,\phi_\pi,\omega_\pi,\pi,g,\xi)$ altılısı dilimlenmiş kontak metrik manifold ve $X\in\chi(M)$ birim vektör alanı ξ karakteristik vektör alanına dik olsun. Eğer $\{\pi X,\phi_\pi X\}$ kümesi bir düzlem kesitinin tabanı ise

$$\kappa_\pi(\pi X,\phi_\pi X)=g(R(\pi X,\phi_\pi X)\phi_\pi X,\pi X) \tag{7.1}$$

eşitliği ile verilen κ_π değerine ***ϕ_π-kesitsel eğrilik*** denir.

Tanım 5.3. $(M,\phi_\pi,\omega_\pi,\pi,g,\xi)$ altılısı $(2n+1)$ −boyutlu dilimlenmiş kontak metrik manifold olsun. (0,4) tipinde

$$B:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$$
$$(X,Y,Z,W)\to B(W,Z,X,Y)$$

tensörü $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ ve $\forall\bar{X},\bar{Y},\bar{Z},\bar{W}\in D$ için

1) $B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=-B(\pi Z,\pi W,\pi X,\pi Y)=-B(\pi W,\pi Z,\pi Y,\pi X)$
2) $B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=B(\pi X,\pi Y,\pi W,\pi Z)$
3) $B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)+B(\pi W,\pi X,\pi Y,\pi Z)+B(\pi W,\pi Y,\pi Z,\pi X)=0$
4) $B(\pi\bar{W},\pi\bar{Z},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=B(\phi_\pi\bar{W},\phi_\pi\bar{Z},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=B(\pi\bar{W},\pi\bar{Z},\phi_\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y})$

5) $B(\xi,\pi\bar{Z},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=B(\pi\bar{W},\xi,\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=B(\pi\bar{W},\pi\bar{Z},\xi,\pi\bar{Y})=$
$B(\pi\bar{W},\pi\bar{Z},\pi\bar{X},\xi)=B(\pi\bar{X},\xi,\pi\bar{Y},\xi)=0$

6)

özelliklerini sağlasın.

Teorem 5.1. B ve T tensörleri (0,4) tipinde tensörler olup ve Tanım 5.3 de verilen bütün koşulları sağlasınlar. Bu durumda $B(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y)=T(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y)$ eşitliği $\forall X,Y\in\chi(M)$ vektör alanları için sağlanıyorsa, $\chi(M)$ uzayında her $X,Y,Z,W\in\chi(M)$ vektör alanları için $B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=T(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)$ eşitliği de geçerlidir.

İspat: B ve T tensörleri Tanım 5.2 deki 1-5 koşullarını sağlıyorsa; $B-T$ tensörünün de bu koşulları sağladığı açıktır. Kabulden $\forall X,Y\in\chi(M)$ için aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y)=0 \tag{7.2}$$

ve (7.2) eşitliğinde Y vektör alanı yerine $Y+W$ vektör alanı yazıldığında,

$$(B-T)(\pi X,\pi Y+\pi W,\pi X,\pi Y+\pi W)=0 \tag{7.3}$$

sonucu elde edilir. (7.3) ifadesinde gerekli işlemler yapıldığında $\forall X,Y,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
&(B-T)(\pi X,\pi Y+\pi W,\pi X,\pi Y+\pi W)=(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y)\\
&\quad+(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi W)+(B-T)(\pi X,\pi W,\pi X,\pi Y)+(B-T)(\pi X,\pi W,\pi X,\pi W)\\
&=(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi W)+(B-T)(\pi X,\pi W,\pi X,\pi Y)\\
&=2(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi W)
\end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç olarak $(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi W)=0$ olur. (7.2) eşitliğinde X vektör alanı yerine $X+Z$ vektör alanını yazıldığında;

$$(B-T)(\pi X+\pi Z,\pi Y,\pi X+\pi Z,\pi W)=0 \tag{7.4}$$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler (7.4) ifadesinde de yapıldığında

$$\begin{aligned}
&(B-T)(\pi X+\pi Z,\pi Y,\pi X+\pi Z,\pi W)=\\
&(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi W)+(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)
\end{aligned}$$

$$+(B-T)(\pi Z,\pi Y,\pi X,\pi W)+(B-T)(\pi Z,\pi Y,\pi Z,\pi W)$$
$$=(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)+(B-T)(\pi Z,\pi Y,\pi X,\pi W)$$
$$=(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)-(B-T)(\pi X,\pi W,\pi Y,\pi Z)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)=(B-T)(\pi X,\pi W,\pi Y,\pi Z) \tag{7.5}$$

eşitliğine ulaşılır. Diğer taraftan

$$3(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)=(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)+(B-T)(\pi X,\pi Z,\pi W,\pi Y)$$
$$+(B-T)(\pi X,\pi W,\pi Y,\pi Z)$$

eşitliği ve Tanım 5.3'teki üçüncü koşul kullanıldığında $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)=0 \tag{7.6}$$

elde edilir. (7.6) numaralı eşitlik kullanıldığında

$$(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi Z,\pi W)=(B-T)(\pi Z,\pi W,\pi X,\pi Y)$$
$$=-(B-T)(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y) \tag{7.7}$$

elde edilir. (7.6) ve (7.7) bir araya getirildiğinde

$$(B-T)(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=0$$
$$B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=T(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)\quad \forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$$

eşitlikleri elde edilir ve ispat biter.

Teorem 5.2. B ve T (0,4) tipinde tensörler olup ve Tanım 5.3 deki koşulları sağlasınlar. Bu durumda $B(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=T(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})$ eşitliği her $\bar{X},\bar{Y}\in D$ vektör alanları için sağlanıyorsa; $B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=T(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)$ tensörlerinin eşitliği de her $X,Y,Z,W\in\chi(M)$ vektör alanları için doğrudur.

İspat: Kabul edelim $B(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y}) = T(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})$ eşitliği $\forall \bar{X},\bar{Y} \in D$ vektör alanları için doğru olsun. Ayrıca biliyoruz ki $\forall X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları $\bar{X},\bar{Y} \in D$ olmak üzere

$$X = \bar{X} + \eta(X)\xi$$
$$Y = \bar{Y} + \eta(Y)\xi$$

şekilde yazılırlar. B ve T tensörleri tanımdaki koşulları sağladığı için $B - T$ tensörü de tanımdaki koşulların hepsini sağlar. Böylece aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned}
(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y) &= (B-T)(\pi\bar{X}+\omega_\pi(X)\xi,\pi\bar{Y}+\omega_\pi(Y)\xi,\pi\bar{X} \\
&\quad +\omega_\pi(X)\xi,\pi\bar{Y}+\omega_\pi(Y)\xi) \\
&= (B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y}) + \omega_\pi(Y)(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\xi) \\
&+\omega_\pi(X)(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\xi,\pi\bar{Y}) + \omega_\pi(X)\omega_\pi(Y)(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\xi,\xi) \\
&+\omega_\pi(Y)(B-T)(\pi\bar{X},\xi,\pi\bar{X},\pi\bar{Y}) + {\omega_\pi}^2(Y)(B-T)(\pi\bar{X},\xi,\pi\bar{X},\xi) \\
&+\omega_\pi(X)\omega_\pi(Y)(B-T)(\pi\bar{X},\xi,\xi,\pi\bar{Y}) + \omega_\pi(X){\omega_\pi}^2(Y)(B-T)(\pi\bar{X},\xi,\xi,\xi) \\
&+\omega_\pi(X)(B-T)(\xi,\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y}) + \omega_\pi(X)\omega_\pi(Y)(B-T)(\xi,\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\xi) \\
&+{\omega_\pi}^2(X)(B-T)(\xi,\pi\bar{Y},\xi,\pi\bar{Y}) + {\omega_\pi}^2(X)\omega_\pi(Y)(B-T)(\xi,\pi\bar{Y},\xi,\xi) \\
&+\omega_\pi(X)\omega_\pi(Y)(B-T)(\xi,\xi,\pi\bar{X},Y) + \omega_\pi(X){\omega_\pi}^2(Y)(B-T)(\xi,\xi,\pi\bar{X},\xi) \\
&+{\omega_\pi}^2(X)\omega_\pi(Y)(B-T)(\xi,\xi,\xi,\pi\bar{Y}) + {\omega_\pi}^2(X){\omega_\pi}^2(Y)(B-T)(\xi,\xi,\xi,\xi).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

(7.8) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında beşinci koşuldan;

$$(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y) = (B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y}) \tag{7.9}$$

sonucu elde edilir. Aynı zamanda kabulden $(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y}) = 0$ olur. Böylece (7.9) ifadesinden $\forall X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $(B-T)(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y) = 0$ elde edilir. Bu da bize $B(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y) = T(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y)$ eşitliğini verir. Sonuç olarak Teorem 5.1 den $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ vektör alanları için ulaşmak istediğimiz

$$B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y) = T(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.3. B ve T (0,4) tipinde tensörler olup ve Tanım 5.3 deki koşulları sağlasınlar. Bu durumda $B(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = T(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X})$ eşitliği $\forall\bar{X} \in D$ vektör alanı için sağlanıyorsa; $B(\pi\bar{X}, \pi\bar{Y}, \pi\bar{X}, \pi\bar{Y}) = T(\pi\bar{X}, \pi\bar{Y}, \pi\bar{X}, \pi\bar{Y})$ eşitliği $\bar{X}, \bar{Y} \in D$ vektör alanları için doğrudur.

İspat: Kabul edelim $B(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = T(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X})$ eşitliği $\forall\bar{X} \in D$ vektör alanı için doğru olsun. Bu durumda

$$(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = 0 \tag{7.10}$$

olur. (7.10) eşitliğinde $\bar{X}$ vektör alanı yerine $\bar{Y} \in D$ olmak üzere $\bar{X} + \bar{Y}$ vektör alanı yazıldığında; kabulden (7.10) ifadesi $\forall\bar{X}, \bar{Y} \in D$ için

$$I \coloneqq (B - T)\big(\pi\bar{X} + \pi\bar{Y}, \phi_\pi(\bar{X} + \bar{Y}), \pi\bar{X} + \pi\bar{Y}, \phi_\pi(\bar{X} + \bar{Y})\big) = 0 \tag{7.11}$$

olur. (7.11) numaralı ifade de yapılan işlemler sonucunda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} I = {} & 4(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}) + 2(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{Y}, \phi_\pi\bar{Y}) \\ & +4(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}) + 4(B - T)(\pi\bar{Y}, \phi_\pi\bar{Y}, \pi\bar{Y}, \phi_\pi\bar{X}) = 0. \end{aligned}$$

Eğer $\bar{X}$ vektör alanı yerine $\bar{Y} \in D$ olmak üzere $\bar{X} - \bar{Y}$ vektör alanı yazılır ve benzer işlemler yapılırsa

$$I \coloneqq (B - T)\big(\pi\bar{X} - \pi\bar{Y}, \phi_\pi(\bar{X} - \bar{Y}), \pi\bar{X} - \pi\bar{Y}, \phi_\pi(\bar{X} - \bar{Y})\big) = 0 \tag{7.12}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 = I = {} & 4(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}) + 2(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{Y}, \phi_\pi\bar{Y}) \\ & -4(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}) - 4(B - T)(\pi\bar{Y}, \phi_\pi\bar{Y}, \pi\bar{Y}, \phi_\pi\bar{X}) \end{aligned} \tag{7.13}$$

sonuçları elde edilir. (7.12) ve (7.13) denklemlerinden

$$2(B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{Y}) + (B - T)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{Y}, \phi_\pi\bar{Y}) = 0 \tag{7.14}$$

eşitliği elde edilir. Tanım 5.3'teki 1, 3 ve 4. koşulları kullanıldığında

$$(B-T)(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\phi_\pi\bar{Y})-(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})$$
$$-(B-T)(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y})=0 \qquad (7.15)$$

ifadesi kolaylıkla elde edilir. (7.14) ve (7.15) denklemleri taraf tarafa çıkarıldığında

$$3(B-T)(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y})+(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=0 \qquad (7.16)$$

eşitliği elde edilir. (7.16) eşitlikte $\bar{Y}$ vektör alanı $\phi_\pi\bar{Y}$ vektör alanı yerine yazıldığında

$$3(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})+(B-T)(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y})=0 \qquad (7.17)$$

sonucu elde edilir. (7.16) ve (7.17) eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})+(B-T)(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{Y})=0 \qquad (7.18)$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak; $(B-T)(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=0$ olur. Böylece; $\forall\bar{X},\bar{Y}\in D$ vektör alanları için $B(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})=T(\pi\bar{X},\pi\bar{Y},\pi\bar{X},\pi\bar{Y})$ ifadesi doğrudur.

Örnek 5.1. $(M,\phi_\pi,\omega_\pi,\pi,g,\xi)$ altılısı $(2n+1)$ −boyutlu dilimlenmiş kontak metrik manifold olsun. Ayrıca burada birim vektör alanı $X\in\chi(M)$ karakteristik vektör alanı ξ'ye dik olsun. Eğer B ve B_0 (0,4) tensörleri,

$$B(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=\frac{3}{4}R(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)-\frac{3}{4}(g(\pi Y,\pi Z)g(\pi X,\pi W)$$
$$-g(\pi X,\pi Z)g(\pi Y,\pi W))+\frac{1}{4}(\omega_\pi(X)\omega_\pi(Z)g(\pi Y,\pi W)-\omega_\pi(Y)\omega_\pi(Z)g(\pi X,\pi W)$$
$$+\omega_\pi(Y)\omega_\pi(W)g(\pi X,\pi Z)-\omega_\pi(X)\omega_\pi(W)g(\pi Y,\pi Z)+g(\phi_\pi Y,\pi Z)g(\phi_\pi X,\pi W)$$
$$-g(\phi_\pi X,\pi Z)g(\phi_\pi Y,\pi W)+2g(\pi X,\phi_\pi Y)g(\phi_\pi Z,\pi W))$$

ve

$$B_0(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=\frac{1}{4}(g(\pi Y,\pi Z)g(\pi X,\pi W)-g(\pi X,\pi Z)g(\pi Y,\pi W)$$
$$+\omega_\pi(X)\omega_\pi(Z)g(\pi Y,\pi W)-\omega_\pi(Y)\omega_\pi(Z)g(\pi X,\pi W)+\omega_\pi(Y)\omega_\pi(W)g(\pi X,\pi Z)$$
$$-\omega_\pi(X)\omega_\pi(W)g(\pi Y,\pi Z)+g(\phi_\pi Y,\pi Z)g(\phi_\pi X,\pi W)-g(\phi_\pi X,\pi Z)g(\phi_\pi Y,\pi W)+$$
$$2g(\pi X,\phi_\pi Y)g(\phi_\pi Z,\pi W))$$

şeklinde tanımlandığında 4-lineer oldukları açıktır. Burada $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için $B(X,Y,\pi W,\pi Z)$ ifadesini hesaplandığında

$$B(\pi X,\pi Y,\pi W,\pi Z)=\tfrac{3}{4}R(\pi X,\pi Y,\pi W,\pi Z)-\tfrac{3}{4}(g(\pi Z,\pi Y)g(\pi W,\pi X)$$
$$-g(\pi W,\pi Y)g(\pi Z,\pi X))+\tfrac{1}{4}(\omega_\pi(W)\omega_\pi(Y)g(\pi Z,\pi X)-\omega_\pi(Z)\omega_\pi(Y)g(\pi W,\pi X)$$
$$+\omega_\pi(Z)\omega_\pi(X)g(\pi W,\pi Y)-\omega_\pi(W)\omega_\pi(X)g(\pi Z,\pi Y)+g(\phi_\pi Z,\pi Y)g(\phi_\pi W,\pi X)$$
$$-g(\phi_\pi W,\pi Y)g(\phi_\pi Z,\pi X)+2g(\pi W,\phi_\pi Z)g(\phi_\pi Y,\pi X))$$

olur. Burada $B_0(\pi W,\pi Z,\pi X,\pi Y)=B(\pi X,\pi Y,\pi W,\pi Z)$ eşitliği kolayca görülür. Benzer işlemler ile diğer özelliklerin de sağlandığı gösterilir. Ortanormal taban $\{\pi X,\pi Y\}$ için κ^*_π ifadesini $\kappa^*_\pi(\pi X,\pi Y)=B(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y)$ şeklinde tanımlansın. Burada X ve Y vektör alanları lineer bağımsız ise bu eşitlik

$$\kappa^*_\pi(\pi X,\pi Y)=\frac{B(\pi X,\pi Y,\pi X,\pi Y)}{g(\pi X,\pi X)g(\pi Y,\pi Y)-g(\pi X,\pi Y)^2}$$

şeklinde yazılır. Eğer bu ifade $\pi=sp\{\pi X,\phi_\pi X\}$ yüzeyi için düzenlenirse

$$\kappa^*_\pi(\pi X,\phi_\pi X)=\frac{B(\pi X,\phi_\pi X,\pi X,\phi_\pi X)}{g(\pi X,\pi X)g(\phi_\pi X,\phi_\pi X)-g^2(\pi X,\phi_\pi X)}$$
$$=\frac{B(\pi X,\phi_\pi X,\pi X,\phi_\pi X)}{g(\pi X,\pi X)g(\phi_\pi X,\phi_\pi X)}$$

elde edilir. Eğer $\bar{X}\in D$ ise

$$\kappa^*_\pi(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X})=\frac{B(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X})}{g(\pi\bar{X},\pi\bar{X})g(\phi_\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X})-g^2(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X})}$$

$$=\frac{B(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X})}{g^2(\pi\bar{X},\pi\bar{X})}$$

elde edilir. B ve B_0 tensörlerinin tanımından

$$B\ (\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = R(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) \tag{7.19}$$

$$B_0(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = g^2(\pi\bar{X}, \pi\bar{X}) \tag{7.20}$$

eşitliklerine ulaşılır. (7.19) ve (7.20) ifadelerinde $\|\pi\bar{X}\| = \|\phi_\pi\bar{X}\|$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\kappa_\pi^*(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) &= \frac{R(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X})}{g^2(\pi\bar{X}, \pi\bar{X})} \\
&= \frac{R(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X})}{\|\pi\bar{X}\|} \\
&= R\left(\frac{\pi\bar{X}}{\|\overline{\pi X}\|}, \frac{\phi_\pi\bar{X}}{\|\phi_\pi\bar{X}\|}, \frac{\pi\bar{X}}{\|\pi\bar{X}\|}, \frac{\phi_\pi\bar{X}}{\|\phi_\pi\bar{X}\|}\right) \\
&= \kappa_\pi\left(\frac{\pi\bar{X}}{\|\pi\bar{X}\|}, \frac{\phi_\pi\bar{X}}{\|\overline{\phi_\pi X}\|}\right).
\end{aligned}$$

elde edilir. Biliyoruz ki $\{\frac{\pi\bar{X}}{\|\pi\bar{X}\|}, \frac{\phi_\pi\bar{X}}{\|\phi_\pi\bar{X}\|}\}$ kümesi ortonormaldir. Uzayın ϕ_π −kesitsel eğriliği c_π (sabit) ye eşitse

$$\kappa_\pi^*\ (\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = \kappa_\pi\left(\frac{\pi\bar{X}}{\|\pi\bar{X}\|}, \frac{\phi_\pi\bar{X}}{\|\phi_\pi\bar{X}\|}\right) = c_\pi$$

olur. Burada

$$\frac{B(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X})}{B_0(\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X},\pi\bar{X},\phi_\pi\bar{X})} = \kappa_\pi^*\ (\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = c_\pi$$

yazılır. Sonuç olarak

$$B(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = c_\pi B_0(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X})$$

eşitliği elde edilir. Eğer $T(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}) = (c_\pi B_0)(\pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X}, \pi\bar{X}, \phi_\pi\bar{X})$ eşitliği ile birlikte $T \equiv c_\pi B_0$ tensörü tanımlanırsa bu tensörün 4-lineer olduğu ve bütün koşulları sağladığı kolaylıkla görülür. Böylece teoremlerden kolaylıkla görülür ki $\forall \bar{X}, \bar{Y} \in D$ vektör alanları için

$$B(\pi\bar{X}, \pi\bar{Y}, \pi\bar{X}, \pi\bar{Y}) = (c_\pi B_0)(\pi\bar{X}, \pi\bar{Y}, \pi\bar{X}, \pi\bar{Y}) \tag{7.21}$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$B(\pi W, \pi Z, \pi X, \pi Y) = (c_\pi B_0)(\pi W, \pi Z, \pi X, \pi Y) \tag{7.22}$$

eşitliği de elde edilir. (7.21) ve (7.22) bir araya getirildiğinde

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}R(\pi W, \pi Z, \pi X, \pi Y) - \frac{3}{4}(g(\pi Y, \pi Z)g(\pi X, \pi W) - g(\pi X, \pi Z)g(\pi Y, \pi W)) \\
&+\frac{1}{4}(\omega_\pi(X)\omega_\pi(Z)g(\pi Y, \pi W) - \omega_\pi(Y)\omega_\pi(Z)g(\pi X, \pi W) + \omega_\pi(Y)\omega_\pi(W)g(\pi X, \pi Z) \\
&-\omega_\pi(X)\omega_\pi(W)g(\pi Y, \pi Z) + g(\phi_\pi Y, \pi Z)g(\phi_\pi X, \pi W) - g(\phi_\pi X, \pi Z)g(\phi_\pi Y, \pi W) \\
&+2g(\pi X, \phi_\pi Y)g(\phi_\pi Z, \pi W)) = \frac{1}{4}\,(g(\pi Y, \pi Z)g(\pi X, \pi W) - g(\pi X, \pi Z)g(\pi Y, \pi W) \\
&+\omega_\pi(X)\omega_\pi(Z)g(\pi Y, \pi W) - \omega_\pi(Y)\omega_\pi(Z)g(\pi X, \pi W) + \omega_\pi(Y)\omega_\pi(W)g(\pi X, \pi Z) \\
&-\omega_\pi(X)\omega_\pi(W)g(\pi Y, \pi Z) + g(\phi_\pi Y, \pi Z)g(\phi_\pi X, \pi W) - g(\phi_\pi X, \pi Z)g(\phi_\pi Y, \pi W) \\
&+2g(\pi X, \phi_\pi Y)g(\phi_\pi Z, \pi W))
\end{aligned}$$

Eşitliği ve Buradan da:

$$\begin{aligned}
&R(\pi X, \pi Y)\pi Z = \frac{c_\pi + 3}{4}(g(\pi Y, \pi Z)\pi X - g(\pi X, \pi Z)\pi Y) + \frac{c_\pi - 1}{4}(\omega_\pi(X)\omega_\pi(Z)\pi Y \\
&-\omega_\pi(Y)\omega_\pi(Z)\pi X + g(\pi X, \pi Z)\omega_\pi(Y)\xi - g(\pi Y, \pi Z)\omega_\pi(X)\xi + g(\phi_\pi Y, \pi Z)\phi_\pi X \\
&-g(\phi_\pi X, \pi Z)\phi_\pi Y + 2g(\pi X, \phi_\pi Y)\phi_\pi Z).
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

BÖLÜM 6

$\mathcal{A}$ KÜMESİ ÜZERİNDE YAPILANDIRILMIŞ SASAKİ MANİFOLDLARIN TRANSVERSAL IŞIĞIMSI ALTMANİFOLDLARI

6.1.Radikal Transversal Işığımsı Altmanifoldlar:

Bu bölümde (Şahin, Yıldırım, 2010)'ın birlikte tanımladıkları radikal tansversal ışığımsı altmanifoldları $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılan Sasaki manifoldlar üzerinde yeniden yapılandırıldı.

Tanım 6.1.1. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun ışığımsı altmanifoldu ve ξ karakteristik vektör alanına teğet olsun. Eğer aşağıdaki şartlar M altmanifoldu tarafından sağlanıyorsa lightlike altmanifolduna ***radikal transversal ışığımsı altmanifold*** denir.

$$\phi(Rad\,TM) = ltr(TM)$$
$$\phi(S(\,TM)) \subset S(TM)$$

Aşağıdaki önerme (Yıldırım, 2009) çalışmasında Önerme 3.1.1. in $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldlardaki karşılığıdır.

Önerme 6.1.1. $\bar{M}$, manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ nin 1-lightlike radikal transversal ışığımsı altmanifoldu yoktur.

İspat: Kabul edelim M, $\bar{M}$ nin 1-lightlike radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda $Rad\,TM = Sp\{V\}$ ve $ltr(TM) = Sp\{N\}$ olur. Hemen hemen kontak metrik manifoldlarda

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{8.1}$$

eşitliği biliniyor. Bu eşitlikten $g(\phi V, V) = 0$ elde edilir. Ayrıca $\phi V = N$ olduğundan

$$g(\phi V, V) = g(N, V) = 1$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak; $\bar{M}$ nin 1- ışığımsı radikal transversal ışığımsı altmanifoldu yoktur.

Önerme 6.1.2. $\bar{M}$ manifoldu, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold olsun. $\bar{M}$ manifoldunun izotropik ya da tamamen ışığımsı radikal transeversal ışığımsı altmanifoldu yoktur.

İspat: Tanımdan açıkça görülür.

M manifoldu, $\bar{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. $S(TM) \neq 0$ ise M altmanifolduna öz(proper) radikal transversal ışığımsı altmanifold denir. Ayrıca Tanım 6.1.1. ve Önerme 6.1.1. den aşağıdaki özellikler elde edilir:

1) $boy\ Rad(TM) \geq 2$
2) $boy\ S(TM) = 2s - 1, \quad s \geq 1$
3) 5-boyutlu radikal transversal ışığımsı altmanifold 2-lightlike dır.

Aşağıdaki teorem (Yıldırım, 2009)'da ispatlanan Teorem 3.1.1. in $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldlardaki uygulamasıdır.

Teorem 6.1.1. $\bar{M}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M manifoldu, $\bar{M}$ nin radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu invaryanttır.

İspat: $X \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ ve $V \in \Gamma(Rad\ TM)$ olsun. (8.1) eşitliğinden

$$g(\phi X, V) = -g(X, \phi V) \tag{8.2}$$

elde edilir. Ayrıca $\phi V \in ltr(TM)$ olduğundan $g(X, \phi V) = 0$ olur ve (8.2) eşitliğinden $g(\phi X, V) = 0$ bulunur. Böylece ϕX vektör alanının $Rad\ TM$ uzayında bileşeni yoktur. Şimdi $N \in \Gamma(ltr(TM))$ olsun. Benzer şekilde;

$$g(\phi X, N) = -g(X, \phi N) = 0 \tag{8.3}$$

sonucu elde edilir. Böylece, $g(\phi X, N) = 0$ eşitliğinden ϕX vektör alanının $ltr(TM)$ uzayında bileşeninin olmadığı görülür. Son olarak, $W \in \Gamma(S(TM))$ olsun. Bu durumda yine benzer işlemlerle;

$$g(\phi X, W) = -g(X, \phi W) = 0 \tag{8.4}$$

elde edilir. Sonuç olarak; ϕX vektör alanının $S(TM)$ uzayında bileşeni yoktur. Sonuç olarak $S(TM^{\perp})$ distribüsyonunun invaryant olduğu görülür.

(Yıldırım, 2009)'da verilen yöntemleri takip edersek teğet uzay üzerinde benzer sonuçlar elde ederiz. $\bar{M}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M manifoldu, $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. $Rad(TM)$ ve $S(TM)$ uzayları üzerindeki projeksiyon morfizmler sırasıyla Q ve T olmak üzere $\forall X \in TM$ vektör alanı için:

$$X = QX + TX \tag{8.5}$$

olur. (8.5) eşitliğinde her iki tarafa ϕ morfizmi uygulanırsa;

$$\phi X = \phi QX + \phi TX \tag{8.6}$$

elde edilir. (8.6) ifadesinde $\phi TX = SX$ ve $\phi QX = LX$ yazılırsa

$$\phi X = SX + LX \qquad SX \in \Gamma\big(S(TM)\big), \qquad LX \in \Gamma(ltr(TM))$$

olur.

$\bar{M}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M manifoldu, $\bar{M}$ nin radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için (6.32) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) = {} & \nabla_X SY + h^l(X, SY) + h^s(X, SY) - A_{LY}X + \nabla_X^l LY + D^s(X, LY) \\ & -S\nabla_X Y - L\nabla_X Y - \phi h^l(X, Y) - \phi h^s(X, Y). \end{aligned} \tag{8.7}$$

eşitliği elde edilir. (8.7) denkleminde teğet, ekran transversal ve ışığımsı transversal bileşenler ayrı ayrı yazılırsa;

$$\nabla_X SY = A_{LY}X + \phi h^l(X, Y) + g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X)$$
$$h^s(X, SY) + D^s(X, LY) - \phi h^s(X, Y) = 0$$
$$h^l(X, SY) + \nabla_X^l LY - L\nabla_X Y = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Lightlike altmanifoldlar teorisinde indirgenmiş bağlantı metrik bağlantı değildir. Bu sebeple indirgenmiş bağlantının metrik bağlantı olması için gerek ve yeter koşulları elde edelim.

Yine (Yıldırım 2009)'da yer alan Teorem 3.1.2 $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldlara uyarlanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.1.2. $\bar{M}$ manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M manifoldu $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda ∇ indirgenmiş bağlantının metrik bağlantı olması için gerek ve yeter şart $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(Rad\, TM)$ için $A_{\phi Y}\pi X$ vektör alanının $S(TM)$ de bileşeninin olmamasıdır.

İspat: Kabul edelim ki ∇ bağlantısı metrik bağlantı olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(Rad\, TM)$ için $\nabla_{\pi X}Y \in \Gamma(Rad\, TM)$ dir. Diğer taraftan $Z \in \Gamma(S(TM))$ için (3.10) ifadesi kullanılırsa;

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y - h^l(\pi X, Y) - h^s(\pi X, Y), Z) \tag{8.8}$$

olur. Böylece $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y, Z) = 0$ elde edilir. (8.8) eşitliğinde (5.1) denklemi kullanılırsa

$$\bar{g}(\phi\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \phi Z) = \bar{g}(\pi\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) - \eta(\bar{\nabla}_{\pi X}Y)\eta(Z) \tag{8.9}$$

ifadesine ulaşılır. π projeksiyon morfizminin tanımından, $Z \in \Gamma(S(TM))$ için $Z \in \Gamma(TM)$ olduğu görülür. Böylece $\pi Z \in \Gamma(TM)$ dir. π projeksiyon morfizmi ve $\bar{g}$ metriğinin tanımını kullanırsak

$$\bar{g}(\pi\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \pi^2 Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) = 0$$

olur. Böylece

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) = 0 \tag{8.10}$$

İfadesi elde edilir. Böylece, (8.9) ifadesinden $\bar{g}(\phi\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \phi Z) + \eta(\bar{\nabla}_{\pi X}Y)\eta(Z) = 0$ eşitliği elde edilir. Ayrıca (5.1) denkleminden $\eta(X) = g(X, \xi)$ olduğundan

$$\eta(\bar{\nabla}_{\pi X}Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y, \xi) = g(\nabla_{\pi X}Y + h^l(\pi X, Y) + h^s(\pi X, Y), \xi) \tag{8.11}$$

eşitliği yazılır. (8.11) ifadesinde $\nabla_{\pi X} Y \in \Gamma(Rad\, TM)$, $h^l(\pi X, Y) \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $h^s(\pi X, Y) \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ olduğundan

$$\eta(\overline{\nabla}_{\pi X} Y) = 0 \tag{8.12}$$

elde edilir. (8.12) ifadesi ve $\phi \overline{\nabla}_{\pi X} Y = -(\overline{\nabla}_{\pi X} \phi) Y + \overline{\nabla}_{\pi X} \phi Y$ eşitliği kullanılırsa

$$\bar{g}(-(\overline{\nabla}_{\pi X} \phi) Y + \overline{\nabla}_{\pi X} \phi Y, \phi Z) + \eta(\overline{\nabla}_{\pi X} Y)\eta(Z) = 0 \tag{8.13}$$

elde edilir. (8.13) denkleminde $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldların karakterizasyon denklemi kullanıldığında;

$$\bar{g}(-g(\pi X, Y)\xi + \eta(Y)\pi(\pi X) + \overline{\nabla}_{\pi X} \phi Y, \phi Z) = 0 \tag{8.14}$$

elde edilir. (8.14) eşitliğinde yapılan sadeleştirmeler sonucunda:

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X} \phi Y, \phi Z) = 0 \tag{8.15}$$

olur. (8.15) denkleminde Gauss-Weingarten denklemleri kullanıldığında:

$$g(-A_{\phi Y} \pi X + \nabla^l_{\pi X} \phi Y + D^s(\pi X, \phi Y), \phi Z\,) = 0 \tag{8.16}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda (8.16) numaralı eşitlikte $\nabla^l_{\pi X} \phi Y \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $D^s(\pi X, \phi Y) \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ olduğundan $g\big(A_{\phi Y} \pi X, \phi Z\big) = 0$ elde edilir. Böylece $A_{\phi Y} \pi X$ vektör alanının $S(TM)$ uzayında bileşeninin olmadığı görülür.

Tersine, $A_{\phi Y} \pi X$ vektör alanının $S(TM)$ distribüsyonunda da bileşeninin olmadığını kabul edelim. Böylece

$$g\big(A_{\phi Y} \pi X, Z\big) = 0 \tag{8.17}$$

olur. (8.17) numaralı eşitlik ve Gauss-Weingarten denklemlerinden;

$$g(-\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y + \nabla^l_{\pi X}\phi Y + D^s(\pi X, \phi Y), Z\ ) = 0 \tag{8.18}$$

elde edilir. Ayrıca (8.18) eşitliğinde $\nabla^l_{\pi X}\phi Y \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $D^s(\pi X, \phi Y) \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ olduğundan, $\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y, Z) = 0$ dir. (8.18) denkleminden

$$\bar{g}\big((\overline{\nabla}_{\pi X}\phi)Y + \phi\overline{\nabla}_{\pi X}Y, Z\big) = 0 \tag{8.19}$$

elde edilir. $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldların karakterizasyon denklemi (8.19) ifadesinde kullanılırsa;

$$g(g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(\pi X) + \phi\nabla_{\pi X}Y + \phi h^l(\pi X, Y) + \phi h^s(\pi X, Y), Z) = 0 \tag{8.20}$$

ifadesine ulaşılır. Aynı zamanda (8.19) numaralı eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $g(\phi\nabla_{\pi X}Y, Z) = 0$ sonucu elde edilir. Bu sonuçta $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifoldların genel denklemi kullanılırsa;

$$g(\phi^2\nabla_{\pi X}Y, \phi Z) + \eta(\phi\nabla_{\pi X}Y)\eta(Z) = 0 \tag{8.21}$$

elde edilir. Yine gerekli işlemler (8.21) ifadesinde yapıldığında

$$g(-\pi\nabla_{\pi X}Y + \eta(\nabla_{\pi X}Y)\xi, \phi Z) = 0$$
$$g(\pi\nabla_{\pi X}Y, Z) = 0$$
$$g(\nabla_{\pi X}Y, \pi Z) = 0$$
$$\nabla_{\pi X}Y \in \Gamma(Rad\, TM)$$

eşitlikleri elde edilir.

(Yıldırım, 2009) tezindeki Teorem 3.1.4 $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldlara uyarlanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.1.3. M manifoldu, $\overline{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda $S(TM)$ distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$h^l(X, SY) = h^l(Y, SX) \tag{8.22}$$

olmasıdır.

İspat: Her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ vektör alanları için:

$$h^l(X, SY) + \nabla_X^l LY - L\nabla_X Y = 0 \tag{8.23}$$

eşitliğinde X ve Y vektör alanlarının yerleri değiştirilirse;

$$h^l(Y, SX) + \nabla_Y^l LX - L\nabla_Y X = 0 \tag{8.24}$$

elde edilir. (8.23) ve (8.24) numaralı eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$h^l(X, SY) - h^l(Y, SX) = \nabla_X^l LY - \nabla_Y^l LX + L\nabla_Y X - L\nabla_X Y$$
$$h^l(X, SY) - h^l(Y, SX) = L[X, Y]$$
$$h^l(X, SY) = h^l(Y, SX).$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 6.1.4. M, $\bar{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \Gamma(Rad\, TM)$ için

$$A_{LX}Y = A_{LY}X \tag{8.25}$$

dir.

İspat: $\forall X, Y \in \Gamma(Rad\, TM)$ vektör alanları için:

$$(\nabla_X SY) = A_{LY}X + \phi h^l(X, Y) + g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) \tag{8.26}$$

eşitliği yazılır. (8.26) eşitliğinde gerekli işlemler yapıldığında;

$$(\nabla_X SY) = A_{LY}X + \phi h^l(X, Y) \tag{8.27}$$

olur. (8.27) eşitliğinde yapılan işlemler sonucunda,

$$-S\nabla_X Y = A_{LY}X + \phi h^l(X,Y) \quad (8.28)$$

elde edilir. (8.28) numaralı ifade de X ve Y vektör alanlarının yerleri değiştirilirse;

$$-S\nabla_Y X = A_{LX}Y + \phi h^l(Y,X) \quad (8.29)$$

dir. (8.28) ve (8.29) eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa;

$$S\nabla_X Y - S\nabla_Y X = A_{LX}Y - A_{LY}X + \phi h^l(Y,X) - \phi h^l(X,Y)$$

elde edilir. h^l simetrik olduğundan dolayı $S[X,Y] = A_{LX}Y - A_{LY}X$ olur. Sonuç olarak; $A_{LX}Y = A_{LY}X$ dır.

Teorem 6.1.5. M manifoldu, $\bar{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonun M altmanifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(Rad\, TM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\bar{g}(\phi Y, \pi X)\eta(Z) = -g(A_{\phi Y}\pi X, \phi Z) \quad (8.30)$$

olmasıdır.

İspat: $Rad\, TM$ nin tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(Rad\, TM),\ Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$g(\nabla_{\pi X} Y, Z) = 0 \quad (8.31)$$

olmasıdır. (8.31) eşitliğinde, (3.10) denklemi kullanılırsa;

$$g(\nabla_{\pi X} Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X} Y, Z) \quad (8.32)$$

elde edilir. $\bar{\nabla}$ metrik bağlantı olduğu için (8.32) denkleminden

$$g(\nabla_{\pi X} Y, Z) = \pi X \bar{g}(Y, Z) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_{\pi X} Z) \quad (8.33)$$

dir. Böylece

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\bar{g}(Y, \overline{\nabla}_{\pi X}Z) \tag{8.34}$$

olur. (8.34) eşitliğinde, (5.1) denklemi kullanıldığında,

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, \phi\overline{\nabla}_{\pi X}\pi Z) - \eta(Y)\eta(\overline{\nabla}_{\pi X}Z) \tag{8.35}$$

denklemi ve (8.35) ifadesinden

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, \phi\overline{\nabla}_{\pi X}\pi Z) \tag{8.36}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (8.36) denkleminde

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, -(\overline{\nabla}_{\pi X}\phi)\pi Z + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi\pi Z \tag{8.37}$$

olur. (8.37) denkleminde (6.33) eşitliği kullanılırsa

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, -g(\pi X, \pi Z)\xi + \eta(\pi Z)\pi X + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi\pi Z) \tag{8.38}$$

denklemine ulaşılır. (8.38) denkleminde temel özellikler kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\eta(\pi Z)\bar{g}(\phi Y, \pi X) - \bar{g}(\phi Y, \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Z) \tag{8.39}$$

eşitliği elde edilir. (8.39) eşitliğinde $\bar{g}$ metriği yerine g metriğini yazabiliriz. Böylece

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\eta(\pi Z)\bar{g}(\phi Y, \pi X) - g(\phi Y, \nabla_{\pi X}\phi Z) \tag{8.40}$$

eşitliği elde edilir. (8.40) ifadesinde gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapıldığında

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\eta(\pi Z)\bar{g}(\phi Y, \pi X) - g(A_{\phi Y}\pi X, \phi Z)$$

sonucuna ulaşırız. Böylece:

$$\bar{g}(\phi Y,\pi X)\eta(Z) = -g(A_{\phi Y}\pi X,\phi Z)$$

dir.

Teorem 6.1.6. $\bar{M}$ manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M manifoldu $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda $S(TM)$ ekran distribüsyonunun M altmanifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(S(TM))$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için $A^*_{\phi N}\pi X$ vektör alanının $S(TM)$ dağılımında bileşeninin olmamasıdır.

İspat: $S(TM)$ ekran dağılımı tamamen jeodezik foliasyon olması için gerek yeter koşul her $X,Y \in \Gamma(S(TM))$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için $\mathrm{g}(\nabla_{\pi X}Y,N) = 0$ olmasıdır. (3.10) eşitliğinden;

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y,N) = g(\nabla_{\pi X}Y + h^l(\pi X,Y) + h^s(\pi X,Y),N) \tag{8.41}$$

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y,N) = g(\nabla_{\pi X}Y,N) \tag{8.42}$$

denklemleri elde edilir. Diğer taraftan (8.41) ve (8.42) eşitliklerinde direk hesaplamalar ve sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\bar{g}(\pi\bar{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(-g(\pi X,Y)\xi - \eta(Y)\pi X + \bar{\nabla}_{\pi X}\phi Y,\phi N)$$
$$\bar{g}(\pi\bar{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(\bar{\nabla}_{\pi X}\phi Y,\phi N)$$
$$\bar{g}(\pi\bar{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(\nabla_{\pi X}\phi Y + h^l(\pi X,\phi Y) + h^s(\pi X,\phi Y),\phi N)$$
$$\bar{g}(\pi\bar{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(h^l(\pi X,\phi Y),\phi N)$$

olur. Ayrıca bu altmanifoldda $\bar{g}(h^l(X,PY),\xi) = g(A^*_{\xi}X,PY)$ olduğundan $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(A^*_{\phi N}\pi X,\phi Y)$ elde edilir. Böylece $A^*_{\phi N}\pi X$ vektör alanının $S(TM)$ ekran distribüsyonunda bileşeni yoktur.

Sonuç 6.1.1. $\bar{M}$ manifoldu $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M manifoldu $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldunun $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$, $Z \in \Gamma(S(TM))$ için:

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N)=g(A^*_{\phi N}\pi X,\phi Y) \text{ ve } \bar{g}(\phi Y,\pi X)\eta(Z)=-g(A_{\phi Y}\pi X,\phi Z)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. M_1 radikal distribüsyonun ve M_2 ekran distribüsyonun integral altmanifoldlarıdır.

6.2.Modifiye Transversal Işığımsı Altmanifoldlar

Bu bölümde $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldlar üzerinde yeni bir altmanifold tanımladık. Bu altmanifold tranversal ışığımsı altmanifoldların genellemesidir.

Tanım 6.2.1. $(M,g,S(TM),S(TM^{\perp}))$ manifoldu, $(\bar{M},\bar{g})$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifolduna immersed ve yapı vektör alanı ξ'ye teğet olan ışığımsı altmanifold olsun. M altmanifoldu

$$i)\ \phi(S(TM))\subset S(TM)$$

$$ii)\ \begin{cases} Rad(TM)=D_1\oplus D_2 \\ \phi(D_1)\subset ltr(TM) \\ \phi(D_2)\subset S(TM^{\perp}) \end{cases}$$

koşulları sağlıyorsa; M altmanifolduna ***modifiye transversal ışığımsı altmanifold*** denir.

Örnek 6.2.1. $\mathbb{R}^9_4$ semi-Öklidyen uzayında noktaların koordinat fonksiyonları $(x^1,x^2,x^3,x^4,y^1,y^2,y^3,y^4,z)$ olsun. $\mathbb{R}^9_4$ uzayında

$$x^1=y^4,x^2=y^3,x^3=y^2,x^4=y^1=0$$

denklemleri ile verilen bir M altmanifoldunu göz önüne alalım. Bu durumda M altmanifoldundaki bir nokta $P=(x_1,x_2,x_3,0,0,x_3,x_2,x_1,z)$ ile ifade edilir. Yapılan direk işlemler sonucunda teğet demetin tabanı aşağıdaki vektör alanlarından oluşur.

$$Z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_1+\partial y_4+y^1\partial z)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0,0,0,0,1,y^1)$$

$$Z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_2+\partial y_3+y^2\partial z)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,0,0,0,1,0,y^2)$$

$$Z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_3+\partial y_2+y^3\partial z)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,0,0,1,0,0,y^3)$$

$$Z_4=2\partial z=(0,0,0,0,0,0,0,0,2)$$

$\mathbb{R}^9_4$ semi-Öklidyen uzayı üzerinde η 1-formu, ϕ (1,1) tensörü ve $\bar{g}$ metriği

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - y^1 dx_1 - y^2 dx_2 - y^3 dx_3 - y^4 dx_4)$$
$$\bar{g} = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}(-dx^1 \otimes dx^1 - dy^1 \otimes dy^1 - dx^2 \otimes dx^2 - dy^2 \otimes dy^2 + dx^3 \otimes dx^3 + dy^3 \otimes dy^3 + dx^4 \otimes dx^4 + dy^4 \otimes dy^4)$$
$$\phi(X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z) = Y_1 \partial x_1 - X_1 \partial y_1 + Y_2 \partial x_2 - X_2 \partial y_2 + Y_3 \partial x_3 - X_3 \partial y_3 + Y_4 \partial x_4 - X_4 \partial y_4 + (Y_1 y^1 + Y_2 y^2 + Y_3 y^3 + Y_4 y^4) \partial z$$

şeklinde tanımlansın. Yapılan direk işlemler sonucunda teğet uzayın taban elemanları için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\bar{g}(Z_1, Z_1) = \bar{g}(Z_2, Z_2) = \bar{g}(Z_3, Z_3) = 0$$
$$\bar{g}(Z_1, Z_2) = \bar{g}(Z_1, Z_3) = \bar{g}(Z_1, Z_4) = 0$$
$$\bar{g}(Z_2, Z_3) = \bar{g}(Z_2, Z_4) = \bar{g}(Z_3, Z_4) = 0$$

Diğer taraftan teğet uzayın taban elemanlarının ϕ tensöründe değerleri hesaplanırsa,

$$\phi(Z_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_4 - \partial y_1 + y^4 \partial z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,0,1,-1,0,0,0,y^4)$$
$$\phi(Z_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_3 - \partial y_2 + y^3 \partial z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,0,0,-1,0,0,y^3)$$
$$\phi(Z_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_2 - \partial y_3 + y^2 \partial z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,0,0,0,-1,0,y^2)$$

eşitlikleri elde edilir. $\phi Z_i, i \in \{1,2,3\}$ için vektör alanlarının $\bar{g}$ metriğinde hesaplamaları yapılırsa

$$\bar{g}(\phi Z_1, Z_1) = \bar{g}(\phi Z_1, Z_2) = \bar{g}(\phi Z_1, Z_3) = 0$$
$$\bar{g}(\phi Z_1, Z_4) = \bar{g}(\phi Z_1, \phi Z_1) = 0$$

ifadeleri ϕZ_1 vektör alanı için elde edilir. Sonuç olarak; $\phi Z_1 \in S(TM^{\perp})$ dir. Benzer işlemler ϕZ_2 vektör alanı için yapıldığında:

$\bar{g}(\phi Z_2, Z_1) = \bar{g}(\phi Z_2, Z_2) = 0$
$\bar{g}(\phi Z_2, Z_3) = 1$
$\bar{g}(\phi Z_2, Z_4) = \bar{g}(\phi Z_2, \phi Z_2) = 0$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\phi Z_2 \in ltr(TM)$ olduğu görülür. Benzer olarak ϕZ_3 vektör alanı için işlemler yapıldığında

$\bar{g}(\phi Z_3, Z_2) = 1$
$\bar{g}(\phi Z_3, Z_3) = \bar{g}(\phi Z_3, \phi Z_3) = 0$

sonuçları elde edilir. Bu da bize gösteriyor ki $\phi Z_3 \in ltr(TM)$ dir. Bütün bu hesaplamalar sonucunda, $Rad(TM) = D_1 \oplus D_2$, $D_1 = Sp\{Z_2, Z_3\}$ ve $D_2 = Sp\{Z_1\}$ için $\phi(D_1) \subset ltr(TM)$ ve $\phi(D_2) \subset S(TM^{\perp})$ olduğu görülür. Böylece $N_2 = \phi Z_3$, $N_3 = \phi Z_2$ olmak üzere N_1 vektör alanı

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, y^1)$$

gibi alınırsa; $\bar{g}(N_1, Z_1) = 1$ ve $\bar{g}(N_1, Z_2) = \bar{g}(N_1, Z_3) = 0$veşitliklerini elde ederiz. Sonuç olarak $N_1 \in ltr(TM)$ dir. Ayrıca:

$\phi(N_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial x_4 + \partial y_1 + y^4 \partial z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, y^4)$
$\bar{g}(\phi N_1, \phi N_1) = \bar{g}(\phi N_1, Z_1) = \bar{g}(\phi N_1, Z_3) = 0$
$\bar{g}(\phi N_1, Z_2) = 1$

olduğundan $\phi N_1 \in S(TM^{\perp})$ olur.

Sonuç 6.2.1. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda:

$$\phi(S(TM)) \subset S(TM)$$
$$Rad(TM) = D_1 \oplus D_2$$
$$\phi(D_1) \subset ltr(TM)$$
$$\phi(D_2) \subset S(TM^{\perp})$$

olur. Burada;

$i)$ $D_1 = \{0\}$ ise M ekran transversal ışığımsı altmanifoldtur.

$ii)$ $D_2 = \{0\}$ ise M transversal ışığımsı altmanifoldtur.

Teorem 6.2.1. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı bir altmanifoldu olsun. Bu altmanifold için $boyD_1 = 1$ ve $boy\ ltr(TM) = 1$ olamaz.

İspat: Kabul edelim ki $D_1 = Sp\{V\}$ ve $ltr(TM) = Sp\{N\}$ olsun. Böylece $\phi(V) = \lambda N$ olur. Lightlike altmanifoldlar teorisinden $g(V, N) = 1$ ve $g\big(V, \phi(V)\big) = 0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca;

$$\phi(V) = \lambda N \Longrightarrow \frac{1}{\lambda}\phi(V) = N$$

elde edilir. Bu durumda:

$$1 = g(V, N) = g\left(V, \frac{1}{\lambda}\phi(V)\right) = \frac{1}{\lambda}g\big(V, \phi(V)\big) = \frac{1}{\lambda}.0 = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu bir çelişkidir.

Sonuç 6.2.2. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı bir altmanifoldu olsun. Bu altmanifoldun boyutu en az dokuzdur.

İspat: Kabul edelim ki M, altmanifoldu modifiye transversal ışığımsı bir altmanifold ve $dimM = 7$ olsun. Tanım 6.2.1. den $Rad(TM) = D_1 \oplus D_2$ dir. Böylece, $dimD_1 = 1$ ve $dimD_2 = 1$ olması gerektiği aşikardır. Bu durumda $D_1 = Sp\{X\}$ ve $D_2 = Sp\{Y\}$ olsun. Ayrıca $\phi(D_1) \subset ltr(TM)$ ve $g(\phi(X), X) = 0$ olduğundan $g(\phi(X), Y) = 1$ olmak zorundadır. Kontak geometrinin temel sonuçlarından $g(\phi(X), Y) + g\big(X, \phi(Y)\big) = 0$ eşitliği ve $g(\phi(X), Y) = 1$ kullanılırsa $g\big(X, \phi(Y)\big) = -1$ olmalıdır. Bu durum ise $g\big(X, \phi(Y)\big) = 0$ ifadesi ile çelişir. Çünkü $\phi(Y) \in S(TM^{\perp})$ ve $X \in Rad\ TM$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 6.2.3. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı bir altmanifoldu olsun. M altmanifoldunda $boy\ D_1$ çift olmak zorundadır.

İspat. Kabul edelim $D_1 = Sp\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ olsun. $\phi(D_1) \subset ltr(TM)$ olduğundan $X_1 \in D_1$ vektör alanı için $\phi(X_1) \in ltr(TM)$ olacaktır. Diğer taraftan $\phi(X_1) \in ltr(TM)$ olduğundan $X_k \in D_1$ için $g(\phi(X_1), X_k) = 1$ olacaktır. Ayrıca kontak geometride:

$$g(\phi(X), Y) + g\big(X, \phi(Y)\big) = 0$$

eşitliğinin geçerlidir. Ayrıca bu sonuçtan $g(X_1, \phi(X_k)) = -1$ ve $g(X_i, \phi(X_k)) = 0$ $i \neq 1$ için eşitlikleri doğru olacaktır. Böylece $X_1 \in D_1$ için $X_k \in D_1$ vektör alanının varlığı ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak $boy\ D_1$ çift olmak zorundadır.

Önerme 6.2.1. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı bir altmanifoldu olsun. $\forall W \in S(TM^{\perp})$ vektör alanı için $\phi(W) = X + Y + \phi(Z)$ dir. Burada $X \in S(TM^{\perp}), Y \in D_2$ ve $Z \in D_1$ dir.

İspat. Kabul edelim $W \in S(TM^{\perp})$ olsun. Aşağıdaki durumları inceleyelim:

i) $U \in S(TM)$ vektör alanı için $g(\phi(W), U) = -g\big(W, \phi(U)\big) = 0$ dır. Çünkü $\phi(U) \in S(TM)$ dir. Böylece $\phi(W)$ vektör alanının $S(TM)$ uzayında bileşeni olmadığı görülür.

ii) $V \in D_1$ vektör alanı için $g(\phi(W), V) = -g\big(W, \phi(V)\big) = 0$ dır. Çünkü tanımdan $\phi(V) \in ltr(TM)$ dir. Böylece $\phi(W)$ vektör alanının D_1 altuzayında bileşeni yoktur.

iii) Kabul edelim $Y \in \phi(D_1)$ olsun. $g(\phi(W), Y) = -g\big(W, \phi(Y)\big) = 0$ dır. Çünkü $\phi(Y) \in Rad(TM)$ dir. Sonuç olarak $\phi(W)$ vektör alanının $\phi(D_1)$ uzayında bileşeni olmadığı görülür.

iv) Kabul edelim $T \in D_2$ olsun. $g(\phi(W), T) = -g\big(W, \phi(T)\big) \neq 0$ olabilir. Çünkü $\phi(T) \in S(TM^{\perp})$ dir.

v) Kabul edelim $K \in L \subset ltr(TM)$ olsun. $g(\phi(W), L) = -g\big(W, \phi(L)\big) \neq 0$ olabilir. Çünkü $\phi(L) \in S(TM^{\perp})$ dir.

Sonuç olarak; $X \in S(TM^{\perp}), Y \in D_2$ ve $Z \in D_1$ için $\phi(W) = X + Y + \phi(Z)$ olur.

Sonuç 6.2.4. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ altmanifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $(\bar{M}, \bar{g})$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun 1-lightlike ve 2-lightlike modifiye transversal ışığımsı bir altmanifoldu yoktur.

İspat. Tanım 6.2.1, Önerme 6.2.1 ve Sonuç 6.2.3'ten aşikardır. M en az 3-lightlike olmak zorundadır.

Sonuç 6.2.5. $(\bar{M},\bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ manifoldunun ko-izotropik ve tamamen lightlike radikal transversal ışığımsı altmanifoldu yoktur.

Sonuç 6.2.6. $(M,g,S(TM),S(TM^{\perp}))$ manifoldu $(\bar{M},\bar{g})$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal lightlike altmanifoldu 9 boyutlu ise 3-lightlikedır.

(Yıldırım 2009)'da kullanılan metodları burada kullanırsak teğet uzay üzerinde benzer sonuçlar elde ederiz. $\bar{M}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M, $\bar{M}$ nin modifiye transversal lightlike altmanifoldu olsun. $Rad(TM)$ ve $S(TM)$ üzerindeki projeksiyon morfizmler sırasıyla Q ve T olmak üzere $\forall X \in TM$ için

$$X = QX + TX$$

olur. Fakat modifiye transversal lightlike altmanifoldlarda

$$Rad(TM) = D_1 \oplus D_2$$
$$\phi(D_1) \subset ltr(TM)$$
$$\phi(D_2) \subset S(TM^{\perp})$$

olduğundan $Q_1X \in D_1$, $Q_2X \in D_2$ için $QX = Q_1X + Q_2X$ şeklinde yazılır ve her iki tarafa ϕ dönüşümü uygulanırsa

$$\phi X = \phi Q_1 X + \phi Q_2 X \ + \phi TX \tag{9.1}$$

elde edilir. (9.1) ifadesinde $\phi TX = SX$, $\phi Q_1 X = L_1 X$ ve $\phi Q_2 X = W_1 X$ eşitlikleri yazılırsa (9.1) eşitliği

$$\phi X = SX + W_1 X + L_1 X$$
$$SX \in \ \Gamma\big(S(TM)\big), W_1 X \in \Gamma(S(TM^{\perp}))\ \ L_1 X \in \Gamma(ltr(TM))$$

olur. $\bar{M}$, $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifold ve M, $\bar{M}$ nin modifiye transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için (6.32) eşitliği kullanılırsa

$$g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) = \overline{\nabla}_X \phi Y - \phi(\overline{\nabla}_X Y)$$

$$\begin{aligned} g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) &= \overline{\nabla}_X SY + \overline{\nabla}_X W_1 Y + \overline{\nabla}_X L_1 Y - \phi(\nabla_X Y + h^l(X,Y) \\ &\quad + h^s(X,Y)) \\ &= \nabla_X SY + h^l(X,SY) + h^s(X,SY) - A_{W_1}X + \nabla^s_X W_1 + \end{aligned}$$

$$D^l(X,W_1Y) - A_{L_1Y}X + \nabla^l_X L_1 Y \;\; + D^s(X,L_1Y) - \phi(\nabla_X Y) - \;\phi h^l(X,Y) - \phi h^s(X,Y)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_X SY + h^l(X,SY) + +h^s(X,SY) - A_{W_1Y}X + \nabla^s_X W_1 Y + D^l(X,W_1Y) - A_{L_1Y}X \\ &\quad + \nabla^l_X L_1 Y + D^s(X,L_1Y) - S\nabla_X Y - W_1\nabla_X Y \;\; - L_1\nabla_X Y - \phi h^l(X,Y) \\ &\quad - \phi h^s(X,Y) - g(\pi X,Y)\xi + \eta(Y)\pi(X) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikte teğet, ekran transversal ve lightlike transversal bileşenler ayrı ayrı yazılırsa

$$\nabla_X SY = A_{W_1Y}X + A_{L_1Y}X + S\nabla_X Y + \phi h^l(X,Y) + g(\pi X,Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) \tag{9.2}$$

$$h^s(X,SY) + \nabla^s_X W_1 Y + D^s(X,L_1Y) - W_1\nabla_X Y - \phi h^s(X,Y) = 0 \tag{9.3}$$

$$h^l(X,SY) + D^l(X,W_1Y) + \nabla^l_X L_1 Y - L_1\nabla_X Y = 0 \tag{9.4}$$

olur.

Lightlike altmanifoldlar teorisinde indirgenmiş konneksiyon metrik konneksiyon değildir. Bu sebeple indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter koşulları elde edelim.

Teorem 6.2.2. M manifoldu, $\overline{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda ∇ indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(Rad\,TM)$ vektör alanları için $A_{\phi Y}\pi X$ vektör alanının $S(TM)$ uzayında bileşeninin olmamasıdır.

İspat: Kabul edelim ki ∇ metrik konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(Rad\,TM), Y = Y_1 + Y_2,\ Y_1 \in\ D_1,\ Y_2 \in\ D_2$ için:

$$\nabla_{\pi X} Y = \nabla_{\pi X}(Y_1 + Y_2) = \nabla_{\pi X} Y_1 + \nabla_{\pi X} Y_2 \in \Gamma(Rad\,TM) \tag{9.5}$$

elde edilir. (9.5) ifadesinde $Z \in \Gamma(S(TM))$ için (3.10) denklemi kullanılırsa,

$$g(\nabla_{\pi X}Y, Z) = \bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y - h^l(\pi X, Y) - h^s(\pi X, Y), Z) \tag{9.6}$$

olur. Böylece $\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y, Z) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan,

$$\bar{g}(\phi\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \phi Z) = \bar{g}(\pi\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) - \eta(\overline{\nabla}_{\pi X}Y)\eta(Z)$$

eşitliğinden,

$$\bar{g}(\pi\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) = \bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \pi^2 Z) = \bar{g}(\,\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) = 0$$

ifadesi elde edilir çünkü $Z \in \Gamma(S(TM))$ ise $Z \in \Gamma(TM)$ dir. Burada $\pi Z \in \Gamma(TM)$ olduğundan

$$\bar{g}(\,\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \pi Z) = 0 \tag{9.7}$$

elde edilir. Böylece,

$$\bar{g}(\phi\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \phi Z) + \eta(\overline{\nabla}_{\pi X}Y)\eta(Z) = 0 \tag{9.8}$$

eşitliği elde edilir. (9.8) eşitliğinde, $\eta(X) = g(X, \xi)$ kullanılırsa

$$\eta(\overline{\nabla}_{\pi X}Y) = \bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y, \xi) = g(\nabla_{\pi X}Y + h^l(\pi X, Y) + h^s(\pi X, Y), \xi) \tag{9.9}$$

ifadesi yazılır. Aynı zamanda, $\nabla_{\pi X}Y \in \Gamma(Rad\,TM)$, $h^l(\pi X, Y) \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $h^s(\pi X, Y) \in \Gamma(S(TM^\perp))$ olduğundan $\eta(\overline{\nabla}_{\pi X}Y) = 0$ elde edilir. Ayrıca;

$$\phi\overline{\nabla}_{\pi X}Y = -(\overline{\nabla}_{\pi X}\phi)Y + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_1 + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_2 \tag{9.10}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\bar{g}(-(\overline{\nabla}_{\pi X}\phi)Y + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_1 + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_2, \phi Z) + \eta(\overline{\nabla}_{\pi X}Y)\eta(Z) = 0 \tag{911}$$

elde edilir. (9.11) ifadesinde $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldların karakterizasyon denklemi kullanılırsa;

$$\bar{g}(-g(\pi X, Y)\xi + \eta(Y)\pi(\pi X) + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_1 + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_2, \phi Z) = 0 \quad (9.12)$$

olur. (9.12) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında (9.12) ifadesi:

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_1 + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_2, \phi Z) = 0 \quad (9.13)$$

biçiminde olur. (9.13)'te Gauss-Weingarten denklemleri kullanılırsa:

$$g(-A_{\phi Y_1}\pi X + \nabla^l_{\pi X}\phi Y_1 + D^s(\pi X, \phi Y_1) - A_{\phi Y_2}\pi X + \nabla^s_{\pi X}\phi Y_2 + D^l(\pi X, \phi Y_2), \phi Z\,) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu elde edilen eşitlikte gerekli işlemler yapıldığında;

$$-g\big(A_{\phi Y_1}\pi X, \phi Z\big) + g\big(\nabla^l_{\pi X}\phi Y_1, \phi Z\,\big) + g(D^s(\pi X, \phi Y_1), \phi Z) - g\big(A_{\phi Y_2}\pi X, \phi Z\big) +$$
$$g(\nabla^s_{\pi X}\phi Y_2, \phi Z) + g(D^l(\pi X, \phi Y_2), \phi Z\,) = 0 \quad (9.14)$$

olur. (9.14) numaralı eşitlikte $\nabla^l_{\pi X}\phi Y_1 \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $D^s(\pi X, \phi Y_2) \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ olduğundan

$$g\big(A_{\phi Y_1}\pi X, \phi Z\big) + g\big(A_{\phi Y_2}\pi X, \phi Z\big) = 0$$
$$g\big(A_{\phi Y_1}\pi X + A_{\phi Y_2}\pi X, \phi Z\big) = 0$$
$$g\big(A_{\phi Y_1 + \phi Y_2}\pi X, \phi Z\big) = 0$$
$$g\big(A_{\phi Y}\pi X, \phi Z\big) = 0$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece $A_{\phi Y}\pi X$ vektör alanının $S(TM)$ uzayında bileşeninin olmadığı görülür.

Tersine, $A_{\phi Y}\pi X$ in $S(TM)$ distribüsyonunda da bileşeninin olmadığını kabul edelim. $g\big(A_{\phi Y_2}\pi X, Z\big) = 0$ olsun. Gauss-Weingarten denklemlerinden:

$$g(-\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y + \nabla^l_{\pi X}\phi Y + D^s(\pi X, \phi Y), Z\,) = 0 \quad (9.15)$$

eşitliği elde edilir. $Y \in \Gamma(Rad\,TM)$ vektör alanı için $Y = Y_1 + Y_2$, $Y_1 \in D_1$, $Y_2 \in D_2$ yazılır. Böylece (9.15) numaralı denklem düzenlendiğinde;

$$g\big(-\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_1 - \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_2 + \nabla^l_{\pi X}\phi Y_1 + \nabla^l_{\pi X}\phi Y_2 + D^s(\pi X, \phi Y) + D^s(\pi X, \phi Y), Z\big) = 0$$

eşitliği elde edilir. $\nabla^l_{\pi X}\phi Y \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $D^s(\pi X, \phi Y) \in \Gamma(S(TM^\perp))$ olduğundan,

$$\bar{g}(-\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_1 - \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y_2, Z) = 0 \tag{9.16}$$

sonucuna ulaşılır. (9.16) numaralı eşitlikten

$$\bar{g}(-\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y, Z) = 0 \tag{9.17}$$
$$\bar{g}\big((\overline{\nabla}_{\pi X}\phi)Y + \phi\overline{\nabla}_{\pi X}Y, Z\big) = 0 \tag{9.18}$$

eşitlikleri elde edilir. (9.17) ve (9.18) eşitliklerinde $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldların karakterizasyon denklemi kullanılırsa;

$$g(g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(\pi X) + \phi\nabla_{\pi X}Y + \phi h^l(\pi X, Y) + \phi h^s(\pi X, Y), Z) = 0 \tag{9.19}$$

olur. (9.19) numaralı eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $g(\phi\nabla_{\pi X}Y, Z) = 0$ eşitliği elde edilir ve bu eşitlikte $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış hemen hemen kontak metrik manifoldların genel denklemi kullanılırsa;

$$g(\phi^2\nabla_{\pi X}Y, \phi Z) + \eta(\phi\nabla_{\pi X}Y)\eta(Z) = 0 \tag{9.20}$$

olur. (9.20) ifadesinde gerekli işlemler yapıldığında;

$$g(-\pi\nabla_{\pi X}Y + \eta(\nabla_{\pi X}Y)\xi, \phi Z) = 0$$
$$g(\pi\nabla_{\pi X}Y, \phi Z) = 0$$
$$g(\nabla_{\pi X}Y, \pi\phi Z) = 0$$
$$g(\nabla_{\pi X}Y, \phi Z) = 0$$
$$\nabla_{\pi X}Y \in \Gamma(Rad\,TM).$$

eşitlikleri elde edilir:

Teorem 6.2.3. M, $\overline{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda, $S(TM)$ distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(S(TM))$ vektör alanları için

$$h^l(X,SY) = h^l(Y,SX) \tag{9.21}$$

olmasıdır.

İspat: $\forall X,Y \in \Gamma(S(TM))$ vektör alanları için:

$$h^l(X,SY) + D^l(X,W_1Y) + \nabla_X^l L_1Y - L_1\nabla_X Y = 0 \tag{9.22}$$

olur. (9.22) denkleminde X vektör alanı yerine Y; Y vektör alanı yerine X vektör alanı yazılırsa

$$h^l(Y,SX) + D^l(Y,W_1X) + \nabla_Y^l L_1X - L_1\nabla_Y X = 0 \tag{9.23}$$

elde edilir. (9.22) ve (9.23) numaralı iki eşitlik taraf tarafa çıkarıldığında;

$$\begin{aligned} h^l(X,SY) - h^l(Y,SX) &= L_1\nabla_X Y - L_1\nabla_Y X + D^l(Y,W_1X) - D^l(X,W_1Y) \\ &\quad + \nabla_Y^l L_1X - \nabla_X^l L_1Y \\ h^l(X,SY) - h^l(Y,SX) &= L[X,Y] \\ h^l(X,SY) &= h^l(Y,SX) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 6.2.4. M manifoldu, $\overline{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ olmak üzere, $Rad\ TM$ radikal distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$A_{W_1X}Y + A_{L_1X}Y = A_{W_1Y}X + A_{L_1Y}X \tag{9.24}$$

olmasıdır.

İspat: M, modifiye transversal ışığımsı altmanifoldunda $\forall X, Y \in \Gamma(Rad\, TM)$ vektör alanları için:

$$\nabla_X SY = A_{W_1 Y}X + A_{L_1 Y}X + S\nabla_X Y + \phi h^l(X,Y) + g(\pi X, Y)\xi - \eta(Y)\pi(X) \tag{9.25}$$

eşitliği yazılır. (9.25) numaralı ifadesinde gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\nabla_X SY = A_{W_1 Y}X + A_{L_1 Y}X + \phi h^l(X,Y) \tag{9.26}$$

elde edilir. (9.26) denkleminden:

$$-S\nabla_X Y = A_{W_1 Y}X + A_{L_1 Y}X + \phi h^l(X,Y) \tag{9.27}$$

sonucuna ulaşılır. (9.27) eşitliğinde, X vektör alanı yerine Y vektör alanı ve Y vektör alanı yerine X vektör alanı yazılırsa

$$-S\nabla_Y X = A_{W_1 X}Y + A_{L_1 X}Y + \phi h^l(Y,X) \tag{9.28}$$

olur. (9.27) ve (9.28) numaralı iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa;

$$S\nabla_X Y - S\nabla_Y X = A_{W_1 X}Y - A_{W_1 Y}X + A_{L_1 X}Y - A_{L_1 Y}X + \phi h^l(Y,X) - \phi h^l(X,Y) \tag{9.29}$$

elde edilir. h^l simetrik olduğundan dolayı (9.29)

$$S[X,Y] = A_{W_1 X}Y - A_{W_1 Y}X + A_{L_1 X}Y - A_{L_1 Y}X \tag{9.30}$$

biçiminde yazılır. Sonuç olarak; $A_{W_1 X}Y + A_{L_1 X}Y = A_{W_1 Y}X + A_{L_1 Y}X$ dır.

Teorem 6.2.5. M, $\bar{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonun M altmanifoldu üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon (foliation) tanımlaması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(Rad\, TM)$, $Z \in \Gamma(S(TM))$ için:

$$\bar{g}(W_1 Y + L_1 Y, \pi X)\eta(Z) = -g(A_{W_1 Y + L_1 Y}\pi X, \phi Z) \tag{9.31}$$

olmasıdır.

İspat: $Rad\,TM$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(Rad\,TM),\ Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X} Y, Z) = 0 \tag{9.32}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Aynı zamanda, M modifiye transversal ışığımsı altmanifoldunda $W_1 Y \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ $L_1 Y \in \Gamma(ltr(TM))$ için $\phi Y = W_1 Y + L_1 Y$ yazılır. (3.10) numaralı denklem kullanılırsa:

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X} Y, Z) = \bar{\mathrm{g}}(\bar{\nabla}_{\pi X} Y, Z) \tag{9.33}$$

elde edilir. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğu için (9.33) denkleminden:

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X} Y, Z) = \pi X \bar{g}(Y, Z) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_{\pi X} Z) \tag{9.34}$$

ifadesi bulunur. Böylece

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X} Y, Z) = -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_{\pi X} Z) \tag{9.35}$$

sonucu elde edilir. (9.35) ifadesinde M modifiye transversal ışığımsı altmanifoldunun tanımı ve $g(W_1 X + L_1 X, W_1 Y + L_1 Y) = g(\pi X, \pi Y) - \eta(Y)\eta(X)$ denklemi kullanılırsa (9.35) eşitliğinden

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X} Y, Z) = -\bar{g}(W_1 Y + L_1 Y, \phi \bar{\nabla}_{\pi X} \pi Z) - \eta(Y)\eta(\bar{\nabla}_{\pi X} Z) \tag{9.36}$$

denklemi elde edilir. (9.36) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X} Y, Z) = -\bar{g}(W_1 Y + L_1 Y, \phi \bar{\nabla}_{\pi X} \pi Z) \tag{9.37}$$

olur. (9.37) numaralı ifadede yapılan işlemler sonucu

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\bar{g}(W_1Y + L_1Y, -(\overline{\nabla}_{\pi X}\phi)\pi Z + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi\pi Z) \tag{9.38}$$

ifadesine ulaşılır. (9.38) denkleminde yine yapılan temel işlemler yardımı ile

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\bar{g}(W_1Y + L_1Y, -g(\pi X, \pi Z)\xi + \eta(\pi Z)\pi X + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi\pi Z) \tag{9.39}$$

elde edilir. (9.39) da gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\eta(\pi Z)\bar{g}(W_1Y + L_1Y, \pi X) - \bar{g}(W_1Y + L_1Y, \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Z) \tag{9.40}$$

denklemi elde edilir. (9.40) eşitliğinde son işlemler yapıldığında

$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\eta(\pi Z)\bar{g}(W_1Y + L_1Y, \pi X) - g(W_1Y + L_1Y, h^*(\pi X, \phi Z))$$
$$\mathrm{g}(\nabla_{\pi X}Y, Z) = -\eta(\pi Z)\bar{g}(W_1Y + L_1Y, \pi X) - g(A_{W_1Y+L_1Y}\pi X, \phi Z)$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece $\bar{g}(W_1Y + L_1Y, \pi X)\eta(Z) = -g(A_{W_1Y+L_1Y}\pi X, \phi Z)$ olur.

Teorem 6.2.6. M, $\bar{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal ışığımsı altmanifoldu olsun. Bu durumda $S(TM)$ ekran distribüsyonunun M altmanifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için $A^*_{\phi N}\pi X$ vektör alanının $S(TM)$ distribüsyonunda bileşeninin olmamasıdır.

İspat: $S(TM)$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon olması için gerek yeter koşul;

$$\forall X, Y \in \Gamma(S(TM)),\ N \in \Gamma(ltr(TM)) \text{ için } \mathrm{g}(\nabla_{\pi X}Y, N) = 0 \tag{9.41}$$

olmasıdır. (3.10) numaralı denklem (9.41) koşulunda kullanılırsa;

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y, N) = g(\nabla_{\pi X}Y + h^l(\pi X, Y) + h^s(\pi X, Y), N) \tag{9.42}$$

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y, N) = g(\nabla_{\pi X}Y, N) \tag{9.43}$$

eşitlikleri elde edilir. (9.43) ifadesinde (3.10) ve (5.1) denklemleri kullanılırsa;

$$\bar{g}(\pi\overline{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(-g(\pi X,Y)\xi - \eta(Y)\pi X + \overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y,\phi N)$$
$$\bar{g}(\pi\overline{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(\overline{\nabla}_{\pi X}\phi Y,\phi N)$$
$$\bar{g}(\pi\overline{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(\nabla_{\pi X}\phi Y + h^l(\pi X,\phi Y) + h^s(\pi X,\phi Y),\phi N)$$
$$\bar{g}(\pi\overline{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(h^l(\pi X,\phi Y),\phi N)$$

olur. Ayrıca $\bar{g}(h^l(X,PY),\xi) = g(A^*_\xi X,PY)$ olduğundan $\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(A^*_{\phi N}\pi X,\phi Y)$ ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak $A^*_{\phi N}\pi X$ vektör alanının $S(TM)$ distribüsyonunda bileşeni yoktur.

Sonuç 6.2.7. M, $\bar{M}$ $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldunun modifiye transversal lightlike altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$, $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\bar{g}(\overline{\nabla}_{\pi X}Y,\pi N) = g(A^*_{\phi N}\pi X,\phi Y) \tag{9.44}$$

$$\bar{g}(\phi Y,\pi X)\eta(Z) = -g(A_{\phi Y}\pi X,\phi Z) \tag{9.45}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. M_1 radikal distribüsyonun ve M_2 ekran distribüsyonun integral altmanifoldlarıdır.

BÖLÜM 7
SONUÇ ve ÖNERİLER

Literatürde kontak geometride tek boyutlu kontak manifoldlar teorisinde hemen hemen kontak metrik manifoldlardan kontak metrik manifoldlara geçişte sağlanması gereken $d\eta = \Phi$ denkleminin verilen örnekler tarafından sağlanmadığı görülmüştür. Bu tespit üzerine yapılan bu çalışmada hemen hemen kontak manifoldların daha geniş bir sınıfı olarak dilimlenmiş hemen hemen kontak manifoldlar tanımlanmıştır. Bu manifoldların geometrisi incelenmiş olup sırası ile dilimlenmiş hemen hemen kontak metrik manifoldlar, dilimlenmiş kontak metrik manifoldlar, dilimlenmiş normal kontak metrik manifoldlar, dilimlenmiş normal kontak metrik manifoldlar tanımlanmıştır.Ayrıca $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldlar tanımlanmış ve temel teoremleri ispatlanmıştır. Böylece (Sasaki ve Hatakeyama, 1962)'nın tanımladıkları Sasaki manifoldların daha geniş bir karakterizasyonu elde edilmiştir.

Tezin özgün bölümlerinden Bölüm 5'te $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldların Riemann eğrilik tensörü çalışılmıştır. Bu bölümde Riemann eğrilik tensörü bir dilim üzerinde elde edilmiş olup örneği verilmiştir. $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldlar için sonlu dilim üzerinde Riemann eğrilik tensörü şimdilik açık problem olup çalışılacaktır.

6. Bölümde $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldların radikal transversal ışığımsı ve modifiye transversal lightlike altmanifoldları çalışılmıştır. Bu altmanifoldların temel teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca bu altmanifoldların üzerinde indirgenmiş konneksiyonların metrik konneksiyon olma koşulları ispatlanmıştır. Böylelikle $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde yapılandırılmış Sasaki manifoldların lightlike altmanifoldları genelleştirilmiştir.

Bu çalışmada ortaya konulan yöntem ve yaklaşım Keahler, Hermitian gibi manifoldlarda da uygulanabilir. Böylece bu manifoldlar üzerindeki geometrik yapılar ve bu manifoldların altmanifoldlarında genelleştirilmeler yapılabilir. Bu tezde kullanılan yöntem manifoldlar teorisine dolayısıyla geometriye katkı sağlayacağı açıktır.

KAYNAKLAR

Artin E., 1957. Geometric Algebra. Interscience.

O'Neill B., 1971. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press.

Blair D. E., 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry (Lecture Notes in Math. 509). Springer-Verlag.

Blair D. E., 2002. Riemaniann Geometry of Contact and Simplectic Manifolds. Birkhauser. Boston.

Bejancu A. ve Duggal K.L., 1995. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds. Acta Appl. Math. (38): 197-215.

Belkelfa M., Hırıca I.E., Rosca R., ve Verstraelen L., 2002. On Legendre Curves in Riemaniann and Lorentzian Sasaki Spaces. Soochow J.Math. (28): 81-91.

Bootby W. M., 1986. An Introduction to Diferentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press Inc.

Camcı Ç., 2007. Kontak Geometride Eğriler Teorisi. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Türkiye.

Chen B.Y., 1973. Geometry of Submanifolds. Pure and Apllied Mathematics. No.22. Marcel Dekker Inc., New York.

Duggal K.L. ve Bejancu A., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publishers. 364.

Duggal K.L. ve Şahin B., 2006. Generalized CR-Lightlike Submanifolds of Indefinite Kaehler Manifolds. Acta Math. Hungar. 112. No(1-2). 107-130.

Duggal K.L. ve Şahin B., 2017 Lightlike Submanifolds of Indefinite Sasakian Manifolds. Int. Jour. Math. And Math.Sci. DOI=10.1155/2007/57585.

Duggal K.L. ve Şahin B., 2010. Differential Geometry of Lightlike Submanifolds, Springer-Birkhauser.

Hacisalihoglu H.H.,1993. Diferensiyel Geometri cilt I. II. III. Ankara.

Hungerford T. W., 1974. Algebra. Springer.

Kupeli D. N., 1996 Singular Semi-Riemannian Geometry. Kluwer Academic Publishers. 366.

Şahin B., 1996. CR-Altmanifoldların Geometrisi. Yüksek Lisans Tezi. İnönü Üniversitesi, Türkiye.

Şahin B., 2000. Lightlike Manifoldların Altmanifoldları Üzerine. Doktora Tezi. İnönü Üniversitesi, Türkiye.

Şahin B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Yayınevi. 2012.

Yano K. ve Kon M., 1984. Structures on Manifolds. Series in Pure Mathematic. Vol:3. Singapore.

Yıldırım C. ve Şahin B., 2010. Transversal Lightlike Submanifolds of Indefinite Sasakian Manifolds. Turk J. Math. (34): 561-583.

Yıldırım C. ve Şahin B., 2010a. Screen Transversal Lightlike Submanifolds of Indefinite Sasakian Manifolds. An. Stiint Univ Ovidius Constanta Ser. Mat. 18(2). 315336.

Yıldırım C., 2009. Belirsiz Sasakiyan Manifoldların Lightlike Altmanifoldları Üzerine. Doktora Tezi. İnönü Üniversitesi, Türkiye.

Sasaki S. ve Hatakeyama Y., 1962. On Differentiable Manifolds With Contact Metric Structures. J. Math. Soc. Japan. (14): 249-271.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Mehmet GÜMÜŞ

Doğum Yeri: Söke / AYDIN

Doğum Tarihi: 25 Haziran 1975

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar: ---

b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal :---

c) Katıldığı Projeler:---

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: Söke Sınav Dershanesi 2003-2007
Söke Konaklı Dershaneleri 2007-2009
Söke Kavram Dershaneleri 2009-2010
ÇOMÜ Lapseki Meslek Yüksekokulu 2010-

İLETİŞİM

E-posta Adresi: mehmetgumus@comu.edu.tr