T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

BİMATRİS VE ÇOK ADIMLI OYUNLARIN BAZI PROBLEMLERİ

Gönül Selin SAVAŞKAN
Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BİMATRİS VE ÇOK ADIMLI OYUNLARIN BAZI PROBLEMLERİ

Gönül Selin SAVAŞKAN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **07/06/2018**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Yakup HACI

ÇANAKKALE

Gönül Selin SAVAŞKAN tarafından Prof. Dr. Yakup HACI yönetiminde hazırlanan ve **07/06/2018** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Bimatris ve Çok Adımlı Oyunların Bazı Problemleri**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE ……………………
Başkan

Prof. Dr. Yakup HACI ……………………
Üye

Prof. Dr. İhsan YILMAZ ……………………
Üye

Prof. Dr. Ali GÜVEN ……………………
Üye

Dr. Öğr. Üyesi İsmail DEMİR ……………………
Üye

Prof.Dr. Levent GENÇ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:………

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Gönül Selin SAVAŞKAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca tecrübesi ile bana yol gösteren fikir ve bilgi paylaşımında bulunduğum saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Yakup HACI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışma sürecinde tezimle yakından ilgilenen, tüm zorluklar anında benden yardımlarını esirgemeyen ve her konuda bana destek olan çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR'a teşekkürü bir borç bilirim. Hayatımın her evresinde beni koşulsuz destekleyen, bugünlere getiren anne ve babama, süreci benimle birlikte göğüsleyen kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gönül Selin SAVAŞKAN

Çanakkale, Haziran 2018

SİMGELER VE KISALTMALAR

Max	Maksimum
Min	Minimum
Sup	Supremum
İnf	İnfimum
$\prec$	Önce gelir
$\oplus$, $\bigoplus$	Modülo 2'ye göre toplam
$\mathbb{F}_2$	$\{0, 1\}$ kümesi

ÖZET

BİMATRİS VE ÇOK ADIMLI OYUNLARIN BAZI PROBLEMLERİ

Gönül Selin SAVAŞKAN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman : Prof. Dr. Yakup HACI
07/06/2018, 95

Bu tezde, iki kişilik sıfır toplamlı ve sıfır toplamlı olmayan sonlu oyunlar incelenmektedir. Tez, giriş bölümü ile birlikte altı bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, oyun teorisinin geçmişi hakkında temel bilgi verilmiş ve oyunların sınıflandırılması yapılmıştır. İkinci bölümde, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlarda kullanılan tanımlar, temel kavramlar ve oyunlar kuramını anlamada gerekli olan teorinin altyapısı oluşturulmuştur. Bölüm 3'te, getiri matrisin elemanları aralık sayıları olan aralık matris oyunları incelenerek çözüm yöntemleri ele alınmıştır. Aralık matris oyunlarının çözümü için aralık lineer programlama modeli olan Lexicographic metod incelenmiştir. Bölüm 4'te, bimatris oyunları ve çözüm yöntemleri ele alınmıştır. Bimatris oyunlarında bir Nash Dengesi bulmak oyunların analizi için önem taşıdığından söz konusu problemin çözümü için Lemke-Howson algoritması kullanılmış ve bu algoritma aralık bimatris oyunları için uyarlanmıştır. Bölüm 5'te, pozisyonlu oyunlar ele alınarak graflarla bağlantısı incelenmiştir. Ayrıca, aralık pozisyonlu oyunlar oluşturulmuş ve çözümü için Lexicographic metod uygulanmıştır. Daha sonra, diferensiyel oyunlar ele alınmış ve diferensiyel oyun için klasik türev yerine Boolean türev kullanılarak yeni bir yaklaşım önerilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunlar, Sıfır Toplamlı Olmayan Oyunlar, Nash Dengesi, Boolean Türev, Aralık Matrisleri.

ABSTRACT

SOME PROBLEMS OF BIMATRIX AND MULTISTAGE GAMES

Gönül Selin SAVAŞKAN
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Doctoral Dissertation in Mathematics
Advisor : Prof. Dr. Yakup HACI
07/06/2018, 95

This thesis concerns two person zero sum and non-zero sum finite games. The thesis consists of six parts including the introduction. We start with a brief background information about the game theory and classify the games. In chapter 2, we introduce the basic concepts, definitions used in two person zero sum games and some theory necessary of the understanding of game theory. In chapter 3, we study interval valued matrix whose entries are closed intervals and methods of solution. Furthermore, we investigate Lexicographic method which is interval linear programming technique to solve interval matrix games. In chapter 4, we introduce bimatrix games and their methods of solution. In bimatrix games, finding a Nash equilibrium is important for their analysis. The Lemke-Howson algorithm is the classical method for finding one Nash equilibrium of a bimatrix game and we adapt the algorithm to interval bimatrix games. In chapter 5, we investigate positional games relation with graphs. Furthermore, we obtain interval positional games and introduce Lexicographic metod for solving the games. Then, we consider differential games and suggest a new approach for a differential game using by Boolean derivative in place of classical derivative. The last chapter involves conclusion and recommendations.

Keywords: Zero-Sum Finite Games, Non-Zero Sum Games, Nash Equilibrium, Boolean Derivative, Interval Matrices.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU………………………………………………………….....ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI... iii
TEŞEKKÜR...iv
SİMGELER VE KISALTMALAR v
ÖZET vi
ABSTRACT..vii
ŞEKİLLER DİZİNİ x
ÇİZELGELER DİZİNİ xi
BÖLÜM 1
GİRİŞ 1
BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR 5
2.1. Maxmin ve Minmax Kriteri 7
2.2. Karma Stratejiler 12
2.3. Karma Stratejilerde Baskınlık 18
BÖLÜM 3
ARALIK MATRİS OYUNLARI 20
3.1. Aralık Sayıları 20
3.2. Aralık Sayılarının Sıralanması 21
3.3. Aralık Matris Oyunları..23
3.4. 2x2 Boyutlu Aralık Matris Oyunun Çözümü..25
3.5. Aralık Matris Oyunların Çözümü İçin Lexicographic Metod...................................28
BÖLÜM 4 34
BİMATRİS OYUNLARI 34
4.1. Bimatris Oyunlarında Baskınlık..36
4.2. Denge Stratejileri ve Varlığı 39
4.3. mxn Boyutlu Bimatris Oyunların Çözümü İçin Analitik Yöntem 40
4.4. Bimatris Oyunların Çözümü İçin Grafik Yöntem..50
4.5. Aralık Bimatris Oyunları...57
4.6. mxn Boyutlu Aralık Bimatris Oyunlarının Çözümü İçin Analitik Yöntem.............58
BÖLÜM 5
ÇOK ADIMLI OYUNLAR...65
5.1. Pozisyonlu Oyunlar...65
5.1. 1. Tam Bilgili Olma Durumu 68

5.1.2. Tam Bilgili Olmama Durumu 69
5.2. Aralık Pozisyonlu Oyunlar 78
5.3. Diferensiyel Oyunlar 80
5.4. Diferensiyel Oyunlarda Boolean Yaklaşımı 88
BÖLÜM 6
SONUÇ VE ÖNERİLER 92
KAYNAKLAR 93
ÖZGEÇMİŞ I

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Fitness Center örneği bölgeler arası mesafeler ve potansiyel üye sayıları 10
Şekil 4.1. I. oyuncu için oyunun çözümünün grafik ile gösterimi 52
Şekil 4.2. II. oyuncu için oyunun çözümünün grafik ile gösterimi 54
Şekil 4.3. Bimatris oyunun grafik yöntemi ile çözümü 54
Şekil 4.4. Örnek 4.4.1 in grafik yöntem ile çözümü 55
Şekil 4.5. Örnek 4.4.2 nin grafik yöntem ile çözümü 57
Şekil 5.1. Tic-Tac-Toe için oyun ağacının bir kısmı 67
Şekil 5.2. Pozisyonlu bir oyun için oyun ağacı 68
Şekil 5.3. Örnek 5.1.1.2 nin oyun ağacı 69
Şekil 5.4. Örnek 5.1.2.2 nin oyun ağacı 71
Şekil 5.5. Örnek 5.1.2.3 ün oyun ağacı 73
Şekil 5.6. Örnek 5.1.2.5 in oyun ağacı 74
Şekil 5.7. Örnek 5.1.2.6 nın oyun ağacı 76

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 5.1. Boolean değişkenlerinin sıralı n'lilerin kümesi 88

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Modern oyunlar kuramı, 1940'lı yıllarda büyük matematikçi John von Neumann tarafından geliştirilmiştir. Amacı, savaştan piyasadaki rekabete kadar her konuda stratejik etkileşimin genel mantığını kavramaktır. Von Neumann, ekonomist Oscar Morgenstern ile birlikte hem oyunları matematiksel olarak temsil etmenin genel bir yöntemini bulmuştur, hem de oyuncuların çıkarlarının birbirine taban tabana zıt olduğu, yani birinin kazandığını diğerinin kaybettiği oyunlar için sistematik bir yaklaşım biçimi sunmuştur. Bu son türden oyunlara sıfır toplamlı oyunlar denir. Çünkü oyuncuların kazanç ve kayıplarının toplamı sıfırdır. Ancak iktisatçıları ilgilendiren oyunların çoğu sıfır toplamlı değildir. Nitekim, eğer iki kişi özgür iradeleriyle birbirleriyle ticari anlaşma yaparsa, ikisi de genel olarak bundan kazançlı çıkacaktır. Bu tür oyunları ele almalarına karşın, Von Neumann ve Morgenstern'ün analizi, sıfır toplamlı oyunların analizi kadar tatmin edici olmamıştır. İşte John Nash, sıfır toplamlı olmayan (bimatris oyunları) oyunları analiz etmenin çok daha iyi bir yolunu bulmuştur. Nash, herhangi bir stratejik etkileşimde, bir oyuncunun en iyi seçiminin (hamlesinin), diğer oyuncuların ne yapacaklarına dair inancına tamamen bağlı olduğunu farketmiştir. Nash, her oyuncunun diğer oyuncuların yapabileceği hamle seçeneklerine bakarak en uygun hamleyi seçtiği duruma bakılmasını önermiştir. Bu da Nash Dengesi olarak tanımlanır. Nash 1951 yılında yayınlanan "Non-Cooperative Games" başlıklı makalesinde "Her sonlu oyunun en az bir denge noktası vardır." teoremini ispatlamıştır. Karma stratejiler sınıfında denge noktası ilk olarak Oskar Morgenstern ve John von Neumann'ın 1944 yılında yayınlanan, "The Theory of Games and Economic Behaviour" adlı kitabında tanımlanmıştır. Aynı çalışmada denge noktasının varlığı da gösterilmiştir. Fakat, denge noktasını her oyun için ilk olarak tanımlayan ve varlığını gösteren John Nash'dir (Nash, 1951).

Teorinin temeli, farklı davranış biçimlerinin ortaya çıkacak sonucu nasıl etkileyeceği sorusuyla atılmıştır. Oyun teorisinin gelişmesi 2. Dünya Savaşı sonrası yıllarına denk gelmektedir. Soğuk savaş döneminde oyun teorisi askeri stratejileri belirlemede ve karar alma noktasında uygulanmıştır. Teorinin şekillenmesi ile birlikte kamuoyu araştırma şirketlerinin başındaki bilim adamları bu teorinin sadece doğa bilimleri ile değil, sosyal olaylar ile de ilgili olduğunu keşfetmişlerdir. Sosyal bilimlerde (en fazla ekonomide olmak üzere), biyolojide, mühendislikte, politik bilimlerde, bilgisayar bilimlerinde (temel olarak yapay zeka çalışmaları üzerinde) ve felsefede uygulama alanı bulmuştur. Günümüzde oyun teorisi 20. Yüzyılın en önemli bilimsel başarılarından biri olarak kabul edilmektedir.

Oyun teorisinde oyunlar şans oyunları ve strateji oyunları olarak ikiye ayrılır. Şans oyunları doğaya karşı oynanan tek kişilik oyunlardır. Bu tür oyunlarda oyuncu sonuçları kontrol edemez. Strateji oyunları ise iki ya da daha fazla oyuncudan oluşur. Strateji oyunları oyuncu sayısına, strateji sayısına, oyunun sonucuna, oyuncuların sahip olduğu bilgiye ve zamana göre guruplandırılmaktadır. Oyuncuların sayısına göre, iki kişilik, üç kişilik vs. biçiminde sınıflandırılabilir. Strateji sayısına göre ise, oyunculardan her ikisinin stratejilerinin kümesi sonlu ise oyuna sonlu oyun, sonsuz ise oyuna sonsuz oyun ve herhangi bir oyuncunun stratejilerinin kümesi sonlu diğer oyuncunun stratejilerinin kümesi sonsuz olduğu durumda oyun yarı sonsuz oyun olarak adlandırılmaktadır.

Strateji oyunları oyunun sonucuna göre, sıfır toplamlı veya sıfır toplamlı olmayan oyunlar olmak üzere ikiye ayrılır. Sıfır toplamlı oyunlarda oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşittir. Sıfır toplamlı olmayan oyunlarda oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşit değildir. Böyle bir oyunda oyunculardan biri kazanırken diğerinin kaybetme zorunluluğu yoktur. Her bir oyuncu oyun sonunda kaybedebilir de kazanabilir de. Oyuncuların sahip oldukları bilgi açısından ise, eğer oyundaki oyuncular oyunun geçmiş her anını biliyor ise bu özellikteki bir oyuna tam bilgiye dayalı oyun denir. Örneğin satranç tam bilgili bir oyundur. Eğer oyun hakkında oyuncuların bir kısmı diğer oyuncuların sahip olmadığı bir bilgiye sahip ise bu özellikteki oyuna tam bilgili olmayan oyun denir. Böyle oyunlar çok adımlı oyunlar başlığı altında pozisyonlu oyunlar sınıfında yer almaktadır. Pozisyonlu oyunlar ve çözümleri ile ilgili detaylı çalışma Kolobaşkina (2011) tarafından yapılmıştır. Oyunlar zaman faktörüne göre statik ve dinamik oyunlar olmak üzere ikiye ayrılır. Statik oyunlar belli bir zaman dilimi içerisinde tüm kararların aynı anda alındığı oyunlardır. Dinamik oyunlar ise kararların belli bir şekilde peşi sıra alındığı oyunlardır.

Matris oyunları ile ilgili incelenen çalışmalarda aralık matrisleri gözönüne alınarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Aralık analizi ile ilgili en kapsamlı çalışma Moore (1979) tarafından yapılmıştır. Burada aralık sayıların sıralanması önem taşımaktadır. İlk olarak Moore (1979) ayrık aralıkların sıralanması üzerine, reel sayıların sıralama bağıntısını genelleştirerek benzer bir sıralama bağıntısı vermiştir. Daha sonra Ishibuchi ve Tanaka (1990) ayrık olmayan aralıklar için farklı iki kısmi sıralama bağıntısı tanımlamışlardır. Ayrıca Sengupta ve ark. (1997), Sengupta ve Pal (2000) uygunluk fonksiyonu adını verdikleri bir fonksiyon yardımıyla aralık sayıların sıralanması üzerine çalışma yapmışlardır. Aralık matris oyunlarına, en genel anlamda getiri matrisi aralık sayıları olduğundan aralık ödemeli oyunlar da denir. Aralık matris oyunların çözümü için Li ve ark. (2010) aralık programlama modelleri, Li (2011) Lexicographic metod üzerine çalışmalar yapmıştır.

Tezin ilk bölümünde oyun kuramının ne olduğundan ve oyun teorisinin matematikteki yerinden bahsettikten sonra ikinci bölümde, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar yani matrsi oyunları için temel kavram, tanım ve teoremler verilmiştir. Oyuncuların mecvut stratejilerini nasıl kullanacağına dair maxmin-minmax kriteri verilerek, bir matris oyunun pür stratejiler sınıfında her zaman oyun değeri olmadığı gözönünde bulundurularak karma stratejiler tanımlanmıştır. Karma stratejiler sınıfında matris oyunun her zaman oyun değerinin var olduğu vurgulanmıştır. Daha sonra optimal stratejiler tanımlanarak oyun değerinin bazı özellikleri incelenmiştir ve pür stratejilerde baskınlık kavramından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, bilinen klasik matris yerine elemanları aralıklar olan matrisler ele alınarak aralık analizi ile ilgili bazı özellikler araştırılmıştır. Daha sonra aralık matris oyunları ele alınmış ve matris oyunlarının bazı çözüm yöntemleri aralık matris oyunlarının çözümleri için uygulanarak sonuçlar elde edilmiştir. Bölümün son kısmında ise, aralık matris oyunların çözümü için kullanılan aralık lineer programlama modeli olan Lexicographic metod incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, iki kişilik sıfır toplamlı olmayan sonlu oyunlar sınıfında yer alan bimatris oyunları ele alınmıştır. Bimatris oyunların çözümleri için analitik ve grafik yöntemler kullanılmıştır. Denge stratejileri kavramından ve varlığından bahsedilerek, bimatris oyunlarında en az bir denge ikilisinin var olduğu vurgulanmıştır. Nash dengesi olarak adlandırılan bu denge ikilisini bulmada etkili analitik bir yöntem olan Lemke-Howson algoritması kullanılarak, örneklerle desteklenmiştir. Bimatris oyunlarında baskınlık kavramından bahsedilmiştir. Bölümün sonunda aralık bimatris oyunu ele alınarak, bu tür oyunların çözümü için Lemke-Howson algoritması uyarlanmıştır.

Beşinci bölümde, çok adımlı oyunlardan pozisyonlu oyunlar ve diferensiyel oyunlar ele alınarak incelenmiştir. Pozisyonlu oyunlarda oyuncuların yaptıkları hamleler sonucunda elde ettikleri getiri matrisinin oyun ağacı yardımıyla elde edildiği ortaya konmuştur. Bu tür oyunların özelliğinin graflarla ifade edilebilmesi olduğu vurgulanmış ve örneklerle desteklenmiştir. Getiri matrisin elemanları aralıklar alınarak aralık pozisyonlu oyun oluşturulmuştur. Bu durumda elde edilen aralık pozisyonlu bir oyunun çözümünde, aralık matris oyunlarının çözümü için kullanılan aralık lineer programlama yöntemi olan

Lexicographic Method uygulanarak bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Bölümün diğer kısmında ise dinamik oyunlar teorisinden, diferensiyel oyunlar teorisinin bazı temel yapıları ve sonuçları verilmiştir. Bölümün sonunda ise, diferensiyel oyunlarda yer alan fonksiyon Boolean fonksiyonu ile değiştirilerek, klasik türev yerine Boolean fonksiyonun türevi uygulanarak yeni bir yaklaşım önerilmiştir.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde (Ahlatçıoğlu ve Tiryaki, 1998; Guseinov ve Ark., 2012; Neumann ve Mongenstern, 1967; Morris, 1994; Owen, 1995) çalışmalarından yararlanılarak, matris oyunların alt yapısını oluşturmada kullanılan gerekli temel tanım, kavram ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. Mücadele içeren herhangi bir olaya oyun denir.

Tanım 2.2. Oyunu kazanmak için çalışan birey ya da gruplara oyuncu denir. Oyuncular sırasıyla I, II, III, IV, V,… vs biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3. Oyunun herhangi bir aşamasında oluşan duruma pozisyon denir.

Tanım 2.4. Oyuncuların oyun esnasındaki oluşabilecek tüm pozisyonlar için alabileceği kararlara strateji denir.

Oyun sürecinde her oyuncu kendi stratejisini uygulayarak oyunu bitirmek zorundadır ve oyun bittiğinde, her oyuncu kendi kullandığı ve diğer oyuncuların kullandığı stratejilerin karşılığı olarak belli bir kazanç elde eder. Bu kazanç matris oyunlarında gerçel bir sayıdır ve bu sayıya oyuncunun getirisi (kazancı) denir.

Bir i oyuncusunun stratejiler kümesi S_i ile gösterilsin. Oyunun her aşamasında i oyuncusu $s_i \in S_i$ stratejisi ile oynasın. Her bir oyuncu birer stratejisini oynadığında $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ biçiminde bir durum ortaya çıkar. Bu şekilde tanımlanmış tüm durumlar

$$\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{S}$ kümesi ile gösterilir. O halde, i oyuncusunun kazançlarını belirleyen ödeme fonksiyonu

$$\varphi_i : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$
$$(S_1, \dots, S_n) \to \varphi_i(s)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5. Her bir katılımcının maksimum kazanca ulaşma hedefi içinde olduğu oyunlara ortaksız oyun denir.

Her $i \in I$ için S_i, I. oyuncu için strateji kümesi ve φ_i ödeme fonksiyonu olmak üzere ortaksız bir oyun

$$\Gamma = (I, \{S_i\}_{i \in I}, \{\varphi_i(.)\}_{i \in I})$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.6. Her $s \in \mathcal{S}$ için $\sum_{i \in I} \varphi_i(s) = 0$ eşitliğini sağlayan Γ ortaksız oyununa sıfır toplamlı oyun denir.

Tanım 2.7. İki kişilik sıfır toplamlı ortaksız oyununa muhalif (antogonastic) oyun denir.

Tanım 2.8. İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda oyuncuların getirileri matris ile veriliyorsa böyle oyunlara matris oyunu denir.

Tanım 2.9. $I.$ oyuncunun n tane $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ stratejisi, $II.$ oyuncunun m tane $(II_1, II_2, \dots, II_m)$ stratejisi olsun. Matrisin satırlarına $I.$ oyuncunun stratejileri, sütunlarına da $II.$ oyuncunun stratejileri yazılırsa, elde edilen nxm lik matrise getiri matrisi denir.

$I.$ oyuncunun n tane, $II.$ oyuncunun m tane pür stratejisi olması halinde getiri matrisi

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

biçiminde ifade edilir.

Oyunda $I.$ oyuncu $i.$ satırı seçerek I_i stratejisiyle, $II.$ oyuncu $j.$ sutunu seçerek II_j stratejisiyle oynarsa $i.$ satır ve $j.$ sutunun kesişimindeki a_{ij} elemanı $I.$ oyuncunun getirisini gösterir. Buna karşılık, $II.$ oyuncunun getirisi, oyun sıfır toplamlı olduğundan $-a_{ij}$ olarak ifade edilir. $I.$ oyuncunun getiri matrisi A olmak üzere, $II.$ oyuncunun getiri matrisi $-A$ ile ifade edilmektedir. Bundan dolayı, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlarda oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşit olduğu için tez boyunca $I.$ oyuncunun getirilerine göre düzenlenmiş matris kullanılacaktır.

Tanım 2.10. Bir matris oyununda $I.$ oyuncunun I_i pür stratejisi ve $II.$ oyuncunun II_j pür stratejisi ile oynadığında ortaya çıkan a_{ij} elemanı, matriste bulunduğu satırın en küçük, sütunun en büyük elemanı ise bu durumda a_{ij} elemanına denge noktası denir.

Tanıma gore $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ için $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ eşitsizliğini sağlayan (I_{i^*}, II_{j^*}) durumuna uygun matris elemanı bir denge noktasıdır. Denge noktasını veren stratejiler, en iyi sonucu belirlediğinden oyuncuların kendileri için seçtikleri en iyi stratejiler olacaktır. Denge durumunda ortaya çıkan bu değer $I.$ oyuncunun ulaşabileceği en yüksek getiriyi, $II.$ oyuncunun ulaşabileceği en düşük kaybı gösterir.

2.1. Maxmin ve Minmax Kriteri

A matrisinin $i.$ satırı A_i, j. sütunu A_j ile gösterilsin. i satır, j sütun numarası olmak üzere (i,j) ikilisi ile $I.$ oyuncunun I_i, $II.$ oyuncunun II_j stratejisi ile oynadığında elde edilen (I_i, II_j) ikilisi aynı ifadelerdir ve bu ifadeler matris oyununda bir durum belirtmektedir.

Her oyunda olduğu gibi matris oyunlarında da oyuncular sahip oldukları stratejileri kullanarak kazançlarını yani getirilerini maksimalleştirmeye çalışmaktadır. Bu durumda, $I.$ oyuncu $i.$ satırdaki I_i pür stratejisini seçmiş olsun. Buna karşılık $II.$ oyuncu, $I.$ oyuncunun kazançlarını azaltmak amacıyla $i.$ satırdaki

$$a_{ij^*} = \min_{j=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

olacak biçimde II_{j^*} pür stratejisini seçer. Bu da $II.$ oyuncunun seçebileceği en iyi strateji olur. $I.$ oyuncunun amacı getirisini maksimalleştirmek olduğundan j^* sütunundaki en büyük elemanın bulunduğu satırı seçecektir. Dolayısıyla,

$$\max_{i=1,2,\dots,n} \min_{j=1,2,\dots,m} a_{ij} = \min_{j=1,2,\dots,m} a_{i^*j} \ \ (i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,m)$$

olacak biçimde I_{i^*} stratejisi $I.$ oyuncunun seçebileceği en iyi strateji olur.

Benzer olarak, $II.$ oyuncu $j.$ sütundaki II_j pür stratejisini seçmiş olsun. Buna karşılık $I.$ oyuncu $II.$ oyuncunun kaybını arttırmak amacıyla $j.$ sütundaki

$$a_{i^*j} = \max_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$$

olacak biçimde I_{i^*} pür stratejisini seçer. Bu da $I.$ oyuncunun seçebileceği en iyi strateji olur. $II.$ oyuncunun amacı getirileri minimalleştirmek olduğundan, $II.$ oyuncunun en iyi stratejisi

$$\min_{j=1,2,\dots,m} \max_{i=1,2,\dots,n} a_{ij} = \max_{i=1,2,\dots,n} a_{ij^*} \ \ (i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,m)$$

eşitliğini sağlayacak II_{j^*} pür stratejisidir. Bu ifadeler aşağıdaki şematik yapı ile gösterilebilir.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \longrightarrow min_j\, a_{1j} \\ \longrightarrow min_j\, a_{2j} \\ \vdots \\ \longrightarrow min_j\, a_{nj} \end{matrix} \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad \searrow & \\ max_i\, a_{i1}\ \ max_i\, a_{i2} \cdots\ max_i\, a_{im} & \end{array}$$

Teorem 2.1.1. $X \times Y$ üzerinde tanımlı herhangi bir $f(x,y)$ fonksiyonu için

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

dir.

İspat. $\forall\, x \in X$ ve $\forall\, y \in Y$ için $f(x,y) \le sup_{x\in X} f(x,y)$ dir. Eşitsizliğin her iki tarafına infimum uygularsak

$$\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

elde ederiz. Dolayısıyla buradan da

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 2.1.2. Eğer f fonksiyonu supremum (üst sınırlarının en küçüğü) ve infimum (alt sınırlarının en büyüğü) değerlerine tanım kümesi üzerinde ulaşırsa bu taktirde

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.1.3. Getiri matrisi nxm boyutlu bir oyunda

$$V_L = \max_{i=1,2,\dots,n}\ \min_{j=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

sayısına oyunun alt değeri,

$$V_U = \min_{j=1,2,\dots,m}\ \max_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}$$

sayısına oyunun üst değeri denir.

Eğer

$$V_L = V_U = V$$

ise V sayısına oyun değeri denir.

Teorem 2.1.4. I. oyuncunun kazançlarının alt sınırı, II. oyuncunun kayıplarının üst sınırından büyük değildir. Yani $V_L \le V_U$ dur.

İspat. I. ve II. oyuncuların sırasıyla keyfi stratejileri I_i ve II_j olsun. Bu durumda

$$\min_{j=1,2,\dots,m} a_{ij} \le a_{ij}\ (j = 1,\dots,m, i = 1,\dots,n)$$

olur. Bu ifade keyfi i için sağlandığından her iki tarafı i ye göre maksimize edersek

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \max_i a_{ij}$$

elde edilir. Son eşitsizlik de keyfi j için yazıldığından her j için

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

olur. Sonuç olarak $V_L \le V_U$ elde edilmiş olur.

Not 2.1.5. Matris oyununda V_L değeri I. oyuncunun kazançlarının alt değerini, V_U değeri ise II. oyuncunun kayıplarının üst değerini ifade etmektedir. Yani, V_L alt değeri kötülerin en iyisi, V_U üst değeri de iyilerin en kötüsü olarak adlandırılır. Her zaman iyilerin en kötüsü daha iyidir.

Tanım 2.1.6.

$$\min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij} = V_L$$

koşulunu sağlayan I_{i^*} stratejisine I. oyuncunun optimal pür stratejisi denir.

$$\max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i a_{ij} = V_U$$

koşulunu sağlayan II_{j^*} stratejisine II. oyuncunun optimal pür stratejisi denir.

Örnek 2.1.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi ile verilen oyunda oyuncuların optimal stratejilerini ve oyun değerini bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{array}{rcl} & & \min_j a_{ij} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} & \left.\begin{array}{r} \longrightarrow -1 \\ \longrightarrow -2 \\ \longrightarrow 2 \\ \longrightarrow -3 \end{array}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = 2 \\ & \begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \max_i a_{ij} & \underbrace{\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 2 & 4 & 5 \end{array}} & \end{array}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = 2$$

$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 2$ dir. Satırdaki en küçük eleman aynı zamanda sütundaki en büyük eleman olduğundan $a_{33} = 2$ elemanı denge noktasıdır. (I_3, II_3) optimal strateji çiftidir. Bu durumda pür stratejilerde oyun değeri $V = 2$ dir.

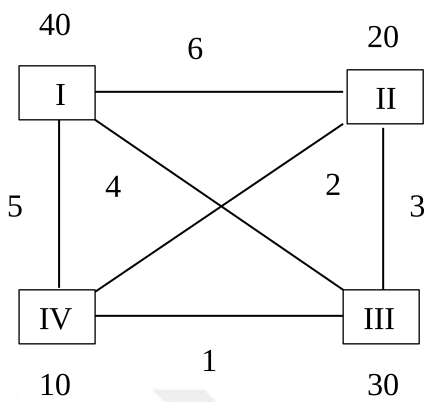
Örnek 2.1.8. Çanakkale'de dört ayrı bölgede, A ve B gibi iki kişi fitness center açmak için girişimde bulunmuşlardır. Aşağıdaki diagram I, II, III ve IV bölgelerindeki potansiyel üye sayısını ve bölgeler arası mesafeleri (1 km, 2 km,…,6 km) göstermektedir. A kişisi, B kişisine göre daha iyi isim yapmış bir trainer dır ve bundan dolayı A kişisinin açacağı salon rakip salona göre,

yakın mesafedeki üyelerin % 80 ini

eşit uzaklıktaki üyelerin % 60 ını

uzakta olan üyelerin ise % 40 ını

almaktadır ve geri kalan üyeler B kişisinin açacağı salona kayıt yaptırmaktadır. Her iki trainer ın da amacı daha fazla üye almak olduğundan, A ve B kişileri fitness center larını hangi bölgeye açmalıdırlar?



Şekil 2.1. Fitness Center örneği bölgeler arası mesafeler ve potansiyel üye sayıları

Çözüm. A trainer ın fitness center ını i bölgesine kurma stratejisi A_i, $i = 1,2,3,4$ ve B trainer ın da j bölgesine kurma stratejisi B_j, $j = 1,2,3,4$ olsun. (A_i, B_j) durumunda A nın kazanacağı müşteri sayıları cinsinden getiri matrisi şöyle oluşturulur:

(A_1, B_1) durumunda A kişisi 1. bölgeye, B kişisi de 1. bölgeye fitness center larını açmış olsunlar. Bu durumda,

$$(A_1, B_1) = 40\frac{60}{100} + 20\frac{60}{100} + 30\frac{60}{100} + 10\frac{60}{100} = 60$$

$$(A_1, B_2) = 40\frac{80}{100} + 20\frac{40}{100} + 30\frac{40}{100} + 10\frac{40}{100} = 56$$

$$(A_2, B_1) = 40\frac{30}{100} + 20\frac{80}{100} + 30\frac{80}{100} + 10\frac{80}{100} = 64$$

$$\vdots$$

olur ve benzer biçimde diğer bileşenler de bulunarak getiri matrisi aşağıdaki biçimde oluşturulur.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 60 & 56 & 56 & 62 \\ 64 & 60 & 52 & 60 \\ 64 & 68 & \mathbf{60} & 68 \\ 58 & 60 & 52 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elde edilen matriste satırca en küçük, sütunca en büyük eleman 3. satır 3. sütun elemanıdır. A ve B kişileri için en iyi strateji ikilisi (A_3, B_3) dir. Bu durumda oyun değeri $V = 60$ olarak elde edilir. Yani her iki trainer da fitness center larını 3. bölgeye açmalıdırlar.

Matris oyunlarında her iki oyuncunun da kendi stratejileri ve rakibin stratejileri doğrultusunda kazancını maksimize edecek şekilde rasyonel olarak hareket ettikleri kabul edilmektedir.

Örnek 2.1.9.

I. oyuncunun stratejileri $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

II. oyuncunun stratejileri $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

olmak üzere sıralı ikililerin ilki açılan parmak sayısını, ikincisi söylenen sayıyı göstermektedir. Karşılıklı iki kişilik oynanan bu oyunda her iki oyuncu da açılan parmak sayısını bilemezse sıfır puan, her iki oyuncu da açılan parmak sayısını bilirse yine sıfır puan almaktadır. Ancak oyunculardan yalnız biri bilirse, bilen oyuncu her iki oyuncunun açtığı parmak sayısı toplamı kadar puan alacaktır. Bu durumda parmak oyunun getiri matrisini oluşturunuz.

Çözüm. I. oyuncu ilk $I_1 = (1,1)$ stratejisini uygulasın, buna karşı II. oyuncu ilk $II_1 = (1,1)$ stratejisini uygulasın. Bu durumda her iki oyuncu için de açılan parmak sayısı bir ve söylenen sayı da birdir, yani her ikisi de bildiği için getiri sıfırdır. Yani, $a_{11} = 0$ dır.

I. oyuncu $I_1 = (1,1)$ ile II. oyuncu $II_2 = (1,2)$ stratejisi ile oynasın. Bu durumda I. oyuncu açılan parmak sayısına doğru cevap verirken, II. oyuncu yanlış cevap vermiştir. Bu durumda I. oyuncu açılan parmak sayısı kadar kazanç elde eder. Dolayısıyla toplam puanı 2 olur. Yani, $a_{12} = 1 + 1 = 2$ dir. Benzer biçimde devam edilerek getiri matrisi aşağıdaki biçimde oluşturulur.

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & II_3 & II_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Getiri matrisi elde edilen matris oyunu için minmaxları oluşturalım.

$$\max_{i=1,2,3,4} \min_{j=1,2,3,4} a_{ij} = \max\left\{\min_{j=1,2,3,4} a_{1j}, \min_{j=1,2,3,4} a_{2j}, \min_{j=1,2,3,4} a_{3j}, \min_{j=1,2,3,4} a_{4j}\right\}$$

$$= \max\{-3,-2,-4,-3\} = -2$$

$$\min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2,3,4} a_{ij} = \min\left\{\max_{i=1,2,3,4} a_{i1}, \min_{i=1,2,3,4} a_{i2}, \min_{i=1,2,3,4} a_{i3}, \min_{i=1,2,3,4} a_{i4}\right\}$$

$$= \min\{3,2,4,4\} = 2$$

olarak bulunur. Yani, $max_{i=1,2,3,4}\, min_{j=1,2,3,4}\, a_{ij} \neq min_{j=1,2,3,4}\, max_{i=1,2,3,4}\, a_{ij}$ dir. Bu ise matris oyunun pür stratejiler sınıfında bir denge noktası yani oyun değeri olmadığını gösterir. Oyun değerinin olmaması matris oyununun pür stratejilerde bir çözümünün olmadığı anlamına gelir.

2.2. Karma Stratejiler

Değerleri bir oyuncunun stratejilerini oynama olasılıklarını gösteren rassal değişkene oyuncunun bir karma stratejisi denir. Buna göre oyuncunun karma stratejisi, onun orjinal stratejilerini seçme olasılıkları olarak tanımlanabilir. Eğer oyuncu bir stratejisini 1 olasılıkla seçerse, gerçekte sadece bir stratejisini seçmiş demektir. Böylece her bir strateji aynı zamanda bir karma strateji olarak da değerlendirilebilir. Karma stratejiler sınıfında tek olarak oynanabilen bu tip stratejilere pür stratejiler denir.

Tanım 2.2.1. İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunu ele alalım. I. oyuncunun $I_1, I_2, \dots, I_n$ biçiminde n tane pür stratejisi ve II. oyuncunun $II_1, II_2, \dots, II_m$ biçiminde m tane pür stratejisi olsun. Keyfi $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ olacak biçimde n boyutlu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörüne I. oyuncunun karma stratejisi ve keyfi $j = 1,2,\dots,m$ için $y_j \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$ olacak biçimde m boyutlu $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ vektörüne II. oyuncunun karma stratejisi denir.

I. oyuncunun karma stratejileri kümesi

$$X_n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \; x_i \geq 0 \right\}$$

ile II. oyuncunun karma stratejileri kümesi

$$Y_m = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) : \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \; y_j \geq 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Getiri matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

olan bir oyunda I. oyuncu x karma stratejisi ve II. oyuncu keyfi II_j pür stratejisini seçtiğinde I. oyuncunun beklenen getirisi

$$H(x, II_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \, , j = 1,2,\dots,m$$

olur. Benzer biçimde I. oyuncu keyfi I_i pür stratejisi ve II. oyuncu y karma stratejisini seçtiğinde I. oyuncunun beklenen getirisi

$$H(I_i, y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \, , i = 1,2,\dots,n$$

olur. Dolayısıyla, $I.$ oyuncu X, $II.$ oyuncu y karma stratejisini seçtiğinde $I.$ oyuncunun beklenen getirisi

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

olarak bulunur. Söz konusu ifadenin matris formu

$$H(x,y) = xAy^T = (x_1\ x_2 \dots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilir ve sonucu bir reel değerdir.

Burada y^T vektörü, $y^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y_m$ vektörünün transpozesidir.

Tanım 2.2.2. $\forall\, x \in X_n$ ve $\forall\, y \in Y_m$ için

$$xAy^{*^T} \le x^*Ay^{*^T} \le x^*Ay^T$$

olacak biçimde (x^*, y^*) ikilisine karma stratejiler sınıfında eyer noktası veya denge durumu denir.

Denge durumuna ulaşılmasını sağlayan x^* ve y^* stratejilerine denge stratejileri denir.

Teorem 2.2.3. $I.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesi X_n, $II.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümesi Y_m olsun. Bu durumda X_n ve Y_m kümeleri kompakt ve konvekstir.

İspat. X_n ve Y_m kümelerinin kompakt olması için kapalı ve sınırlı olması gerekmektedir. $X_n \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompkat olduğunu gösterelim. Önce X_n kümesinin sınırlı olmasını inceleyelim.

$\mathbb{R}^n$ uzayında $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bir $\mu > 0$ sayısı $\|x\| \le \mu$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, X sınırlı bir kümedir. Bu durumda keyfi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ alalım. Bu durumda, $i = 1,2, \dots, n$ için $x_i \ge 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ olduğundan

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \le x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

olur. Dolayısıyla, keyfi $x \in X_n$ için $\|x\| \le 1$ elde edilir. O halde, X_n kümesi sınırlıdır. Şimdi X_n kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için X_n kümesinden bir dizi alalım. Yani, keyfi $k = 1,2, \dots$ için

$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \in X_n$$

olacak biçimde $\left(x^{(k)}\right)$ dizisini alalım.

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(*)}$$

olsun. Bu durumda $x^{(*)} = \left(x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)}\right) \in X_n$ olduğu gösterelim.

$lim_{k\to\infty}\ x^{(k)} = x^{(*)}$ olduğundan keyfi $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olur. $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan $x_i^{(*)} \geq 0$ olur.

Benzer biçimde $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in X_n$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} = 1$ dir. Her $k = 1,2,\dots$ için $k \to \infty$ iken $x_i^{(k)} \to x_i^{(*)}$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(*)} = 1$$

olur. Yani, $x^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)}) \in X_n$ olur. Bu durumda X_n kümesi kapalıdır. X_n kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

Şimdi ise X_n kümesinin konveks küme olduğunu gösterelim.

Keyfi $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right) \in X_n$ alalım. $\lambda \in [0,1]$ olsun. $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in X_n$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned}\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} &= \lambda\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right) + (1-\lambda)\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right)\\ &= \left(\lambda x_1^{(1)}, \lambda x_2^{(1)}, \dots, \lambda x_n^{(1)}\right) + \left((1-\lambda)x_1^{(2)}, (1-\lambda)x_2^{(2)}, \dots, (1-\lambda)x_n^{(2)}\right)\\ &= \left(\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}, \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}, \dots, \lambda x_n^{(1)} + (1-\lambda)x_n^{(2)}\right)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $x^{(1)}, x^{(2)} \in X_n$ $(i = 1,2,\dots,n)$ olduğu için

(i) $x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \geq 0$ dır. Dolayısıyla keyfi $i = 1,2,\dots,n$ için

$$\lambda x_i^{(1)} + (1-\lambda)x_i^{(2)} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^{(2)} = 1$ dir. O halde,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda x_i^{(1)} + (1-\lambda)x_i^{(2)}\right] = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i^{(2)} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

olur. (i) ve (ii) den $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in X_n$ olur. Dolayısıyla, X_n kümesi konvekstir. Benzer biçimde Y_m kümesinin de kompakt ve konveks küme olduğu söylenebilir (Guseinov ve ark., 2012).

Tanım 2.2.4. x ve y sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri olsun.

$$V_L^M = \max_{x\in X_n} \min_{y\in Y_m} H(x,y)$$

sayısına karma stratejiler sınıfında oyunun alt değeri,

$$V_U^M = \min_{y\in Y_m} \max_{x\in X_n} H(x,y)$$

sayısına ise karma stratejiler sınıfında oyunun üst değeri denir. Eğer

$$V_L^M = V_U^M = v$$

ise oyunun değeri vardır ve v sayısına oyun değeri denir.

Teorem 2.2.5. (J. von Neumann) İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun karma stratejiler sınıfında her zaman değeri vardır. Yani

$$V_L^M = V_U^M = v$$

dir.

Tanım 2.2.6. v oyun değeri olmak üzere

$$\min_{y\in Y_m} H(x^*,y) = \max_{x\in X_n} \min_{y\in Y_m} H(x,y) = v$$

olacak biçimde $x^* \in X_n$ stratejisine I. oyuncunun optimal stratejisi,

$$\max_{x\in X_n} H(x,y^*) = \min_{y\in Y_m} \max_{x\in X_n} H(x,y) = v$$

olacak biçimde $y^* \in Y_m$ stratejisine ise II. oyuncunun optimal stratejisi denir.

$x^* \in X_n$ I. oyuncunun optimal stratejisi, $y^* \in Y_m$ II. oyuncunun optimal stratejisi ve v oyun değeri olmak üzere (x^*, y^*, v) üçlüsüne oyunun çözümü denir.

Teorem 2.2.7. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun her zaman çözümü vardır.

İspat. Teorem 2.2.5 gereği iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun karma stratejiler sınıfında her zaman oyun değeri var olduğundan

$$\max_{x\in X_n} \min_{y\in Y_m} H(x,y) = \min_{y\in Y_m} \max_{x\in X_n} H(x,y) = v$$

olur. $X_n \subset \mathbb{R}^n, Y_m \subset \mathbb{R}^m$ kompakt ve $H: X_n \times Y_m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (x,y) ye göre sürekli olduğundan

$$f(x) = min_{y\in Y_m} H(x,y) \text{ ve } g(y) = max_{x\in X_n} H(x,y)$$

olacak biçimde $f: X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g: Y_m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. O halde $X_n \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $f(x) = min_{y\in Y_m} H(x,y)$ olacak biçimde $f: X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\min_{y\in Y_m} H(x^*,y) = \max_{x\in X_n} \min_{y\in Y_m} H(x,y)$$

olacak biçimde $x^* \in X_n$ vardır. Dolayısıyla optimal strateji tanımı gereği $x^* \in X_n$ stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Benzer biçimde, $Y_m \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme ve $g(y) = max_{x\in X_n} H(x,y)$ olacak biçimde $g: Y_m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\max_{x\in X_n} H(x,y^*) = \min_{y\in Y_m} \max_{x\in X_n} H(x,y)$$

olacak biçimde bir $y^* \in Y_m$ vardır. Dolayısıyla optimal strateji tanımı gereği $y^* \in Y_m$ stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi olur ve ν oyun değeri olduğundan (x^*, y^*, ν) üçlüsü oyunun çözümü olur.

Teorem 2.2.8. (x^*, y^*, ν) üçlüsünün oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$\text{keyfi } y \in Y_m \text{ için } H(x^*, y) \geq \nu,$$
$$\text{keyfi } x \in X_n \text{ için } H(x, y^*) \leq \nu$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.9. I. oyuncunun optimal karma stratejisi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, II. oyuncunun optimal karma stratejisi $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere keyfi i için $x_i > 0$ ve keyfi j için $y_j > 0$ olan I_i ve II_j pür stratejilerine sırasıyla I. ve II. oyuncunun aktif stratejisi denir.

Teorem 2.2.10. Getiri matrisi $(A)_{nxm}$ olan bir matris oyunun çözümü (x, y, ν) olsun. Eğer mevcut pür stratejilerin hepsi aktif ise

(i) $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = \nu$

(ii) $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = \nu$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $x_k > 0$ olacak biçimde bir k sayısı var olsun ve $\sum_{j=1}^{m} a_{kj} y_j \neq \nu$ olsun. Oyunun çözümü (x, y, ν) olduğundan $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ II. oyuncunun optimal karma stratejisidir. Dolayısıyla $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq \nu$ dir. Kabulümüzden

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j < \nu$$

olur. Oyunun çözümü (x, y, ν) olduğundan $\nu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$ dir. O halde

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right) < \sum_{i=1}^{n} x_i (\nu) = \nu$$

dir. Yani $\nu < \nu$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla, varsayımımız $\sum_{j=1}^{m} a_{kj} y_j \neq \nu$ doğru değildir.

Diğer taraftan $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{kj} \neq \nu$ olsun. Oyunun çözümü (x, y, ν) olduğundan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ I. oyuncunun optimal karma stratejisidir. Dolayısıyla, $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq \nu$ dir. Kabulümüzden, $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} > \nu$ olur. O halde

$$\nu = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right) < \sum_{j=1}^{m} y_j (\nu) = \nu$$

dir yani $\nu < \nu$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır.

Teorem 2.2.11. Getiri matrisi $(A)_{nxm}$ ve oyun değeri ν olan bir Γ matris oyunu verilmiş olsun. Bu durumda $B = (b_{ij}) = ba_{ij} + c, b > 0\ i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,m$ getiri matrisli Γ_B oyununda oyuncuların optimal karma stratejileri ile Γ matrisinin optimal karma stratejileri aynıdır.

İspat. $(A)_{nxm}$ matrisli Γ matris oyunu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ile ve $B = ba_{ij} + c$ getiri matrisli Γ_B matris oyunu

$$\begin{pmatrix} ba_{11} + c & ba_{12} + c & \dots & ba_{1m} + c \\ ba_{21} + c & ba_{22} + c & \cdots & ba_{2m} + c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_{n1} + c & ba_{n2} + c & \dots & ba_{nm} + c \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir. Her iki matris oyunu için optimal karma stratejiler aynı, oyun değerleri farklıdır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ Γ oyununda $I.\ ve\ II.$ oyuncunun karma stratejileri olsun. Benzer şekilde $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ Γ_B matris oyununda oyuncuların karma stratejileri olsun. O halde,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq \nu \ \ j = 1,2,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq \nu \ \ i = 1,2,\dots,n$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} p_i \geq \nu_B\ , j = 1,2,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} q_j \leq \nu_B\ , i = 1,2,\dots,n$$

son iki eşitsizlikte $b_{ij} = ba_{ij} + c$ yazalım. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n} (ba_{ij} + c\ ) p_i \geq \nu_B \Rightarrow b \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + c \sum_{i=1}^{n} p_i \geq \nu_B$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq \frac{\nu_B - c}{b}$$
$$\sum_{j=1}^{m} (ba_{ij} + c\ ) q_j \leq \nu_B \Rightarrow b \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j + c \sum_{j=1}^{m} q_j \leq \nu_B$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq \frac{\nu_B - c}{b}$$

olur. Bu ifadelerde

$$\frac{v_B - c}{b} = v$$

olarak alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq v, \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq v$$

olur. Dolayısıyla,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) = p$$
$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = (q_1, q_2, \dots, q_m) = q$$
$$v_B = bv + c$$

ifadeleri elde edilir.

2.3. Karma Stratejilerde Baskınlık

Oyuncular karma stratejilerin olduğu bir oyunda elde edecekleri getirileri dikkate alarak baskın stratejilerini bulabilirler. İki kişilik sıfır toplamlı sonlu bir oyunda baskınlık I. oyuncu için satırlar, II. oyuncu için sütunlar dikkate alınarak yapılır. Baskınlık uygulanırken, I. oyuncu için kazancını maksimizi edecek olan satırı belirlenir, II. oyuncu için ise kaybını minimize edecek olan sütun belirlenir. Aynı zamanda baskınlık işlemleri sonunda ele alınan matrisin boyutu küçülmüş olur. Bu durumda bastırılan stratejiler silindikten sonra oyun sadeleşmiş olur. Sadeleştirilmiş oyunun çözümü verilen oyunun da çözümüdür.

Tanım 2.3.1. Keyfi $j = 1,2, \dots, m$ için $a_{lj} \geq a_{sj}$ ise I. oyuncunun I_l stratejisi I_s stratejisine baskındır denir. Bu durumda, I_s stratejisine bastırılan strateji denir. Benzer şekilde, keyfi $i = 1,2, \dots, n$ için $a_{ir} \geq a_{ik}$ ise II. oyuncunun II_r stratejisi II_k stratejisine baskındır denir. II_k stratejisine ise bastırılan strateji denir.

I. oyuncunun I_l stratejisinin I_s stratejisine baskın olduğu $I_l \geq I_s$ ile II. oyuncunun II_r stratejisinin II_k stratejisine baskın olduğu ise $II_r \geq II_k$ ile gösterilir.

Eğer I. oyuncunun I_l stratejisi I_s stratejisine baskın ise I. oyuncu I_l stratejisi ile oynadığında, II. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin, I. oyuncu I_s stratejisi ile oynadığı anda elde ettiği kazançtan daha fazla kazanç elde eder. Yani, oyunculardan herhangi biri baskın stratejileri ile oynarsa bu taktirde diğer oyuncunun strateji seçimine bağlı olmadan baskın strateji ile elde ettiği kazanç daha fazla olacaktır.

Benzer olarak, II. oyuncunun II_r stratejisi II_k stratejisine baskın ise II. oyuncu II_r stratejisi ile oynadığında, I. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin, II. oyuncu II_k stratejisi ile vereceği kayıptan daha az kayıp verir. Bu nedenle II. oyuncunun II_k stratejisini kullanmasına gerek yoktur.

Verilen oyunda bastırılan strateji atıldıktan sonra oluşan oyuna sadeleştirilmiş oyun denir.

Örnek 2.3.2. Getiri matrisi

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & II_3 & II_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

olan bir matris oyununda stratejilerin baskınlığını inceleyelim.

Her $j = 1,2,3,4$ için $a_{3j} \geq a_{1j}$ olduğundan I. oyuncunun I_3 stratejisi I_1 stratejisine baskındır. Yani $I_3 \geq I_1$ dir. Bu durumda I_1 stratejisi elenir ve sadeleştirilmiş oyunun matrisi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

olur. Benzer biçimde devam edilecek olursa,

Her $i = 1,2$ için $a_{i4} \geq a_{i2}$ ve $a_{i4} \geq a_{i3}$ olduğundan II. oyuncunun II_2 ve II_3 stratejileri II_4 stratejisine baskındır. Yani, $II_2 \geq II_4$ ve $II_3 \geq II_4$ tür. Bu durumda II_4 stratejisi elenir ve sadeleştirilmiş oyunun matrisi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Devam edersek ikinci aşamada I oyuncu için bir eleme mümkün değildir ancak II. oyuncu için her $i = 1,2$ için $a_{i1} \geq a_{i2}$ olduğundan II. oyuncunun II_2 stratejisi II_1 stratejisine baskındır. Yani, $II_2 \geq II_1$ dir. Bu durumda II_1 stratejisi elenir ve sadeleştirilmiş oyunun matrisi

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Elde edilen son matris incelendiğinde stratejilerin baskınlığı görülmemektedir. Bu durumda süreç sona erer. Sadeleştirilmiş oyunun çözümü verilen oyunun da çözümü olduğundan A matris oyunun yerine A' matrisin çözümünün bulunması oyunun çözümünün bulunması için yeterli olacaktır.

BÖLÜM 3
ARALIK MATRİS OYUNLARI

Bu bölümde klasik matris oyunlarındaki getiri matrisi yerine elemanları aralıklar olan matrisler ele alınmıştır. Matrisin her bir elemanına karşılık gelen oyuncuların getirileri yani ödemeleri aralık sayıları olduğundan aralık matris oyunları olarak adlandırılır. Aralık matrisleri ile ilgili tanım, teorem ve kavramlar için (Moore, 1979; Sengupta ve Pal, 1997, 2000, 2001) çalışmalarından ve aralık matris oyunları ile ilgili tanım, teorem ve kavramlar için (Collins ve Hu, 2008; Nayak ve Pal, 2009; Hu ve ark., 2008) çalışmalarından yararlanılmıştır.

3.1. Aralık Sayıları

Aralık sayıları reel sayıların bir alt kümesidir ve

$$A = [a_L, a_R] = \{x \in \mathbb{R}: a_L \leq x \leq a_R\}$$

biçiminde gösterilir. Burada $a_L, a_R \in \mathbb{R}$ ve $a_L \leq a_R$ dir. Eğer $a_L = a_R$ ise bu taktirde $A = [a, a]$ bir reel sayıdır. Aralık sayıları için orta nokta ve genişlik kavramları sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$$m(A) = \frac{a_L +, a_R}{2}, w(A) = \frac{a_R - a_L}{2}$$

Aralık sayılarında temel aritmetik işlemleri tanımlayalım. $\circ \in \{+, -, *, \div\}$ reel sayılar üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu durumda

$$A \circ B = \{a \circ b: a \in A, b \in B\}$$

kapalı aralıkların kümesi üzerinde bir ikili işlem tanımlar.

$A = [a_L,\ a_R]$ ve $B = [b_L,\ b_R]$ iki aralık sayısı ve $a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}$ olsun. Bu taktirde iki aralık sayısı arasındaki temel aritmetik işlemler aşağıdaki biçimde verilir.

$$A + B = [a_L + b_L,\ a_R + b_R]$$

$$A - B = [a_L - b_R,\ a_R - b_L]$$

$$AB = [minS, maxS], S = \{a_L b_L, a_L b_R, a_R b_L, a_R b_R\}$$

$\frac{A}{B} = A.(1/B),\ (B \neq 0)$ biçiminde tanımlanır. $\frac{1}{B} = \left\{b: (\frac{1}{b}) \in B\right\} = \left[\frac{1}{b_R},\ \frac{1}{b_L}\right]$ olmak üzere $\frac{A}{B} = A.\left(\frac{1}{B}\right) = [a_L, a_R]\left[\frac{1}{b_R}, \frac{1}{b_L}\right] = \left[\min\left\{\frac{a_L}{b_R}, \frac{a_L}{b_L}, \frac{a_R}{b_R}, \frac{a_R}{b_L}\right\}, \max\left\{\frac{a_L}{b_R}, \frac{a_L}{b_L}, \frac{a_R}{b_R}, \frac{a_R}{b_L}\right\}\right]$ dir.

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha A = \alpha[a_L, a_R] = \begin{cases} \alpha[a_L, a_R], & \alpha \geq 0 \\ \alpha[a_R, a_L], & \alpha < 0 \end{cases}$$

3.2. Aralık Sayılarının Sıralanması

Aralık matris oyunlarında aralıkların hangisinin daha büyük olduğu, daha net bir ifadeyle iki aralığın sıralanması önemli bir kavramdır. Moore (1979) da iki sıralama bağıntısından bahsetmiştir. Bunlardan ilki reel sayılardaki $" < "$ bağıntısının genelleştirilmesi olan

$$A \prec B \Leftrightarrow a_R < b_L$$

bağıntısıdır. Diğeri de kümelerdeki kapsama bağıntısının genelleştirilmesi olan

$$A \subseteq B \Leftrightarrow a_L \geq b_L \text{ ve } a_R \leq b_R$$

bağıntısıdır. Verilen her iki bağıntı da aralık sayılarını tam olarak sıralamaz. Ancak verilen aralık sayıları ayrık ise o zaman ilk yazılan bağıntıya göre sıralama yapılabilir, ayrık değil ise bu durumda verilen bağıntılardan ikincisi aralıkları değer anlamında sıralamaz. Ayrık olmayan keyfi iki aralık sayısının sıralanması Fuzzy mantığı ile karşımıza çıkmaktadır. Bu tip bir problemde matris oyunları, Fuzzy matris oyunları olarak yeniden incelenmiştir. Daha önce bununla ilgili Ishibuchi ve Tanaka (1990) farklı iki kısmi sıralama bağıntısı tanımlamışlardır. Bunlardan ilki,

$$A <_{LR} B \Leftrightarrow A \leq_{LR} B \text{ ve } A \neq B$$

$$A \leq_{LR} B \Leftrightarrow a_L \leq b_L \text{ ve } a_R \leq b_R$$

diğeri

$$A \leq_{mw} B \Leftrightarrow m(A) \leq m(B) \text{ ve } w(A) \geq w(B)$$

$$A <_{mw} B \Leftrightarrow A \leq_{mw} B \text{ ve } A \neq B$$

Bağıntısıdır. Her iki bağıntı da kısmi sıralama bağıntısıdır. Bunun yanısıra Sengupta ve arkadaşları (2001), Sengupta ve Pal (2009) da aralık sayılarının büyüklük küçüklük açısından karşılaştırılmasıyla ilgili olarak uygunluk fonksiyonu kavramını ortaya çıkardılar. Yapılan çalışmaya gore uygunluk fonksiyonu

$$\phi: I \times I \to [0, \infty) \text{ ve } \phi(A \prec B) = \frac{m(B) - m(A)}{w(A) + w(B)}, w(A) + w(B) \neq 0$$

biçiminde tanımlanır.

$m(B) \geq m(A)$ için $\phi(A \prec B)$ sayısı, B nin A dan büyüklüğünün derecesi olarak tanımlanır. ϕ nin tanımından

$$\phi(A \prec B) = \begin{cases} 0 & m(A) = m(A) \\ > 0, < 1 & m(A) < m(B) \text{ ve } a_R > b_L \\ \geq 1 & m(A) < m(B) \text{ ve } a_R \leq b_L \end{cases}$$

yazılır. Eğer,

1. $\phi(A \prec B) = 0$ ise kesinlikle A nin B den küçük olduğu söylenemez.

2. $0 < \phi(A \prec B) < 1$ ise A, B den 0 ve 1 arasında bir derece ile küçüktür.

3. $\phi(A \prec B) \geq 1$ ise A, B den küçüktür.

Örnek 3.2.1. $A = [-5, -3]$ ve $B = [2, 6]$ aralıklarını sıralayalım.

$$m(A) = \frac{a_L + a_R}{2} = \frac{-5 + (-3)}{2} = -4,\ w(A) = \frac{a_R - a_L}{2} = \frac{-3 - (-5)}{2} = 1$$

$$m(B) = \frac{b_L + b_R}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4,\ w(B) = \frac{b_R - b_L}{2} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\phi(A \prec B) = \frac{m(B) - m(A)}{w(A) + w(B)} = \frac{4 - (-4)}{1 + 2} = \frac{8}{3} > 1$$

olur. Dolayısıyla A, B den küçüktür.

Örnek 3.2.2. $A = [2, 8]$ ve $B = [1, 15]$ aralıklarını sıralayalım.

$$\phi(A \prec B) = \frac{m(B) - m(A)}{w(A) + w(B)} = \frac{3}{10} \in (0,1)$$

olur. Dolayısıyla, A, B den 0,3 derecesiyle küçüktür.

Şimdi ise klasik matriste elemanların yerine aralıkların alınmasıyla elde edilen özel bir matris türü olan aralık matrisini oluşturalım.

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix} = \left(G_{ij}\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

burada G_{ij} ler birer aralıktır. Aralık sayılarında olduğu gibi aralık matrislerinde de genişlik ve orta nokta kavramlarından bahsedilir.

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1}, b_{m1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$$

biçiminde verilen bir aralık matrisi için $m(G)$ ve $w(G)$ kavramları

$$m(G) = \begin{bmatrix} m(G_{11}) & \cdots & m(G_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m(G_{m1}) & \cdots & m(G_{mn}) \end{bmatrix}, w(G) = \begin{bmatrix} w(G_{11}) & \cdots & w(G_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w(G_{m1}) & \cdots & w(G_{mn}) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır.

$G, P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun. $m(G) = m(P)$ ise G ve P matrisleri denktir ve $G \approx P$ biçiminde gösterilir. Eğer özel olarak $m(G) = m(P)$ ve $w(G) = w(P)$ şartları sağlanıyorsa bu taktirde G matrisi P matrisine eşittir ve $G = P$ ile gösterilir.

Not 3.2.3. $m(G) = 0$ ise G matrisine sıfır aralık matrisi denir ve $\tilde{0}$ ile gösterilir. Özel olarak $m(G) = 0$ ve $w(G) = 0$ ise bu durumda sıfır aralık matrisi

$$\begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Not 3.2.4. Eğer $m(G) = I$ ise G matrisine birim aralık matrisi denir ve $\tilde{I}$ ile gösterilir. Özel olarak $m(G) = I$ ve $w(G) = 0$ ise bu durumda birim aralık matrisi

$$\begin{bmatrix} [1,1] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [1,1] \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

3.3. Aralık Matris Oyunları

Aralık matris oyunları elemanları aralıklar olan getiri matrisi ile ifade edilmektedir. Girdileri aralık sayıları olan aralık matris oyunu

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1}, b_{m1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$$

matrisi ile verilir. $I.$ oyuncu kazancını maksimalleştirmeye, $II.$ oyuncu kaybını minimalleştrimeye çalışmaktadır. $I.$ oyuncu $i.$ $II.$ oyuncu $j.$ pür stratejisini seçtiklerinde, $I.$ oyuncu $[a_{ij}, b_{ij}]$ miktar getiri (kazanç) elde eder.

X, $I.$ oyuncunun karma stratejisi ve Y, $II.$ oyuncunun karma stratejisi olmak üzere eğer oyuncular söz konusu karma stratejileri ile oynadığında yada bu karma stratejilerini seçtiklerinde $I.$ oyuncu için beklenen değer

$$H(X,Y) = XGY^T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, [a_{ij}, b_{ij}] y_j$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 3.3.1. $\underbrace{\vee}_{i} \left\{ \underbrace{\wedge}_{j} \{[a_{ij}, b_{ij}]\} \right\}$, $\underbrace{\wedge}_{j} \left\{ \underbrace{\vee}_{i} \{[a_{ij}, b_{ij}]\} \right\}$ minimaksları var ve eşit ise yani

$$\underbrace{\vee}_{i} \left\{ \underbrace{\wedge}_{j} \{[a_{ij}, b_{ij}]\} \right\} = \underbrace{\wedge}_{j} \left\{ \underbrace{\vee}_{i} \{[a_{ij}, b_{ij}]\} \right\} = [a_{i_* j_*}, b_{i_* j_*}]$$

ise bu taktirde $(i_*,\ j_*)$ durumunda aralık matris oyununun pür stratejiler sınıfında bir denge noktası vardır üstelik $[a_{i_* j_*}, b_{i_* j_*}]$ ifadesine de oyun değeri denir.

A ve B iki aralık sayısı olsun. A ve B aralık sayılarının maksimumu $A \vee B$ ile minimumu $A \wedge B$ ile ifade edilmiştir.

Örnek 3.3.2. Getiri matrisi

$$G = \begin{bmatrix} [1,3] & [5,7] \\ [-3,-1] & [0,2] \end{bmatrix}$$

olan aralık matris oyununun denge noktasının varlığını araştıralım.

$$\underbrace{\vee}_{i}\left\{\underbrace{\wedge}_{j}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\} = [1,3] = \underbrace{\wedge}_{j}\left\{\underbrace{\vee}_{i}\{[a_{ij}, b_{ij}]\}\right\}$$

olduğundan (I_1, II_1) durumunda ortaya çıkan $[1,3]$ bir denge noktasıdır. Bu durumda G aralık matris oyununun oyun değeri $v = [1,3]$ dir.

Getiri matrisi

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] & \cdots & [a_{1n}, b_{1n}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] & \cdots & [a_{2n}, b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1}, b_{m1}] & [a_{m2}, b_{m2}] & \cdots & [a_{mn}, b_{mn}] \end{bmatrix}$$

ile verilen aralık matris oyununda $I.$ ve $II.$ oyuncunun karma strateji kümeleri sırasıyla

$$S_I = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m : x_i \geq 0, i = 1,2, \dots, m \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$$

$$S_{II} = \left\{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n : y_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n \sum_{j=1}^{n} y_i = 1\right\}$$

biçiminde gösterilmektedir.

$X, I.$ oyuncunun karma stratejisi ve $Y, II.$ oyuncunun karma stratejisi olmak üzere eğer oyuncular bu karma stratejileriyle oynadıklarında $I.$ oyuncu için beklenen değer

$$H(X,Y) = XGY^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i[a_{ij},\ b_{ij}]y_j$$

biçiminde ifade edilir.

$m \times n$ lik aralık matris oyununun alt ve üst değerleri sırasıyla

$V_L^M = \vee_{X \in S_I} \wedge_{Y \in S_{II}} H(X,Y)$ ve $V_U^M = \wedge_{Y \in S_{II}} \vee_{X \in S_I} H(X,Y)$

biçiminde ifade edilir.

$V_L^M = V_U^M = v$ ise v ye oyun değeri denir.

Teorem 3.3.3. Getiri matrisi

$$G=\begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [a_{11},b_{11}] & [a_{12},b_{12}] & \cdots & [a_{1n},b_{1n}] \\ [a_{21},b_{21}] & [a_{22},b_{22}] & \cdots & [a_{2n},b_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1},b_{m1}] & [a_{m2},b_{m2}] & \cdots & [a_{mn},b_{mn}] \end{bmatrix}$$

ile verilen aralık matris oyununda

$$\underbrace{\bigvee}_{X\in S_I}\left\{\underbrace{\bigwedge}_{Y\in S_{II}}\{H(X,Y)\}\right\} \text{ ve } \underbrace{\bigwedge}_{Y\in S_{II}}\left\{\underbrace{\bigvee}_{X\in S_I}\{H(X,Y)\}\right\}$$

ifadeleri vardır ve birbirine eşittir.

Tanım 3.3.4.

$$\underbrace{\bigwedge}_{Y\in S_{II}} H(X^*,Y)=\underbrace{\bigvee}_{X\in S_I}\left\{\underbrace{\bigwedge}_{Y\in S_{II}}\{H(X,Y)\}\right\}=v$$

olacak biçimde $X^*\in S_I$ stratejisine I. oyuncunun optimal stratejisi

$$\underbrace{\bigvee}_{X\in S_I} H(X,Y^*)=\underbrace{\bigwedge}_{Y\in S_{II}}\left\{\underbrace{\bigvee}_{X\in S_I}\{H(X,Y)\}\right\}=v$$

olacak biçimdeki $Y^*\in S_{II}$ stratejisine ise II. oyuncunun optimal stratejisi denir.

Tanım 3.3.5. $X^*\in S_I$, I. oyuncunun optimal stratejisi $Y^*\in S_{II}$, II. oyuncunun optimal stratejisi ve v oyunun değeri olmak üzere (X^*,Y^*,v) üçlüsüne aralık matris oyununun çözümü denir.

3.4. 2x2 Boyutlu Aralık Matris Oyunun Çözümü

Aralık matris oyunları için denge noktası tanım 3.3.1 ile verilmişti. Şimdi ise denge noktası olmayan bir aralık matris oyunu ele alalım.

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} [\alpha_{11},\beta_{11}] & [\alpha_{12},\beta_{12}] \\ [\alpha_{21},\beta_{21}] & [\alpha_{22},\beta_{22}] \end{pmatrix}} \end{array}$$

burada $\underbrace{\bigvee}_{i}\left\{\underbrace{\bigwedge}_{j}[\alpha_{ij},\beta_{ij}]\right\}\neq\underbrace{\bigwedge}_{j}\left\{\underbrace{\bigvee}_{i}[\alpha_{ij},\beta_{ij}]\right\}$ dir. Kabul edelim ki $\lambda_{ij}=\beta_{ij}-\alpha_{ij}>0,\ (i,j=1,2)$ olsun. İlk olarak matrisi normalize edelim, yani aralığın sınır değerlerini aralığın uzunluğuna bölelim. Bu durumda normalize edilmiş matris

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \left[\frac{\alpha_{11}}{\lambda_{11}}, \frac{\beta_{11}}{\lambda_{11}}\right] & \left[\frac{\alpha_{12}}{\lambda_{12}}, \frac{\beta_{12}}{\lambda_{12}}\right] \\ \left[\frac{\alpha_{21}}{\lambda_{21}}, \frac{\beta_{21}}{\lambda_{21}}\right] & \left[\frac{\alpha_{22}}{\lambda_{22}}, \frac{\beta_{22}}{\lambda_{22}}\right] \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{pmatrix} [a_{11}, b_{11}] & [a_{12}, b_{12}] \\ [a_{21}, b_{21}] & [a_{22}, b_{22}] \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\underbrace{\vee}_{i}\left\{\underbrace{\wedge}_{j}[a_{ij}, b_{ij}]\right\} \neq \underbrace{\wedge}_{j}\left\{\underbrace{\vee}_{i}[a_{ij}, b_{ij}]\right\}$ dir.

Şimdi ise I. ve II. oyuncunun optimal stratejilerini belirleyelim. x_i ve y_j sırasıyla I. oyuncusunun i. stratejisi, II. oyuncusunun j. stratejisi olsun. O halde, oyuncuların karma stratejileri sırasıyla $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $x_1 + x_2 = 1,\ x_1, x_2 \geq 0$ ve $y_1 + y_2 = 1,\ y_1, y_2 \geq 0$ dir.

II. oyuncu II_1 ve II_2 stratejilerini oynadığında I. oyuncunun beklenen kazançları (ödemeleri) sırasıyla

$[a_{11}, b_{11}]x_1 + [a_{21}, b_{21}]x_2$ ve $[a_{12}, b_{12}]x_1 + [a_{22}, b_{22}]x_2$

olarak elde edilir. X in değerleri, II. oyuncunun seçtiği stratejiye bağlı olmaksızın I. oyuncunun kazancı aynı kalacak şekilde seçilmelidir. Yani

$$[a_{11}, b_{11}]x_1 + [a_{21}, b_{21}]x_2 = [a_{12}, b_{12}]x_1 + [a_{22}, b_{22}]x_2$$

ya da

$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2$ ve $b_{11}x_1 + b_{21}x_2 = b_{12}x_1 + b_{22}x_2$

biçiminde ifade edilir. Her iki ifadede x_2 yerine

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$$

yazılırsa

$$a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1)$$

$$b_{11}x_1 + b_{21}(1 - x_1) = b_{12}x_1 + b_{22}(1 - x_1)$$

elde edilir. Her iki eşitlikte x_1 yalnız bırakılırsa

$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$ ve $x_1 = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}$

biçiminde elde edilir.

Genel olarak a_{ij}, b_{ij} ler

$$\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} \tag{3.1}$$

(3.1) eşitliğini sağlar ve çözüm yalnızca x_1 değerleri birbirine eşit olduğunda mevcuttur. $b_{ij} = a_{ij} + 1$ $(i, j = 1,2)$ bağıntısına gore (5.1) eşitliği tüm aralıkların uzunlukları aynı olduğunda (yani $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \mu$)sağlanır. O halde

$$x_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \text{ ve } x_2 = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

dir. Benzer şekilde

$$y_1 = \frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}+b_{22}-b_{12}-b_{21}} \text{ ve } y_2 = \frac{b_{11}-b_{12}}{b_{11}+b_{22}-b_{12}-b_{21}}$$

biçiminde elde edilir. Oyun değeri

$$v = \left[\frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}.\alpha_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - \alpha_{21}}, \frac{b_{11}.b_{22} - b_{12}.b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}\right]$$

olacak biçiminde kolaylıkla hesaplanabilir.

Örnek 3.4.1. Denge noktasına sahip olmayan bir aralık matris oyunu ele alalım.

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} [-3,-1] & [4,6] \\ [6,8] & [-7,-5] \end{pmatrix} \end{array}$$

$\lambda_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_{ij}$ olmak üzere $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = 2$ dir. Bu durumda normalize edilmiş matris

$$\begin{pmatrix} \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] & [2,3] \\ [3,4] & \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right] \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. O halde

$$\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] x_1 + [3,4](1 - x_1) = [2,3]x_1 + \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right](1 - x_1)$$

eşitliğinde $x_1 = \frac{13}{20}$ ve $x_2 = \frac{7}{20}$ olarak elde edilir. Bu durumda

$$X = (x_1, x_2) = \left(\frac{13}{20}, \frac{7}{20}\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$[-3,-1]y_1 + [4,6](1 - y_1) = [6,8]y_1 + [-7,-5](1 - y_1)$$

eşitliğinde $y_1 = \frac{11}{20}$ ve $y_2 = \frac{9}{20}$ olarak elde edilir.

$$Y = (y_1, y_2) = \left(\frac{11}{20}, \frac{9}{20}\right)$$

olur. Oyun değeri ise

$$v = \left[\frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}.\alpha_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - \alpha_{21}}, \frac{b_{11}.b_{22} - b_{12}.b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}\right] = \left[\frac{3}{40}, \frac{43}{40}\right]$$

olarak elde edilir.

3.5. Aralık Matris Oyunların Çözümü İçin Lexicographic Metod

Matris oyunlarının çözüm yöntemlerinden biri olan lineer programlama yöntemi, aralık matris oyunları için de incelenmiştir (Li ve ark., 2010; Li, 2011; Nayak ve Pal, 2009). Bu kısımda (Li, 2011) çalışmasında Deng Feng LI tarafından önerilen Lexicographic Metod ele alınmıştır. Burada ilk olarak ele alınan aralık matematiksel programlama modelleri bi-objective matematiksel programlama modellerine dönüştürülür ve daha sonra Lexicographic metodun adımları uygulanır.

I. ve II. oyuncunun pür stratejileri sırasıyla A_i $(i = 1,2,\dots,m)$, B_j $(j = 1,2,\dots,n)$ olsun. Eğer I. oyuncu i. satırı seçer yani I_i pür stratejisini, II. oyuncusu j. sütunu seçer yani II_j pür stratejisini uygularsa I. oyuncunun ödemesi $[a_{ijL}, a_{ijR}]$ dir. Oyunun aralık matrisi

$$\tilde{A} = \left([a_{ijL}, a_{ijR}]\right)_{m\times n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_n \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{array} & \begin{bmatrix} [a_{11L}, a_{11R}] & [a_{12L}, a_{12R}] & \cdots & [a_{1nL}, a_{1nR}] \\ [a_{21L}, a_{21R}] & [a_{22L}, a_{22R}] & \cdots & [a_{2nL}, a_{2nR}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [a_{m1L}, a_{m1R}] & [a_{m2L}, a_{m2R}] & \cdots & [a_{mnL}, a_{mnR}] \end{bmatrix} \end{array}$$

biçiminde ifade edilir. $\tilde{A}$ aralık matris oyunu olarak adlandırılır.

$\bar{v} = [v_L, v_R] = \wedge_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{m}[a_{ijL},\ a_{ijR}]x_i\right\}$ ve $\bar{\omega} = [\omega_L, \omega_R] = \vee_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}[a_{ijL},\ a_{ijR}]y_j\right\}$ olmak üzere I. oyuncu için maxmin değeri ve II. oyuncu için minmax değeri aşağıda verilen aralık matematiksel programlama modelleri çözülerek elde edilir.

$$max\{\bar{v}\}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}[a_{ijL}, a_{ijR}]x_i \ge \bar{v}\ (j = 1,2,\dots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \ge 0\ (i = 1,2,\dots,m) \end{cases} \tag{3.2}$$

ve

$$min\{\bar{\omega}\}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}[a_{ijL}, a_{ijR}]y_j \le \bar{\omega}\ (i = 1,2,\dots,m) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \ge 0\ (j = 1,2,\dots,n) \end{cases} \tag{3.3}$$

$A = [a_L,\ a_R]$ ve $B = [b_L,\ b_R]$ aralık sayıları arasındaki sıralama bağıntısı

$$\varphi(A \prec B) = \begin{cases} 1 & a_R \le b_L\ ise \\ 1^* & a_L \le b_L \le a_R \le b_R \text{ ve } w(A) > 0\ ise \\ \frac{b_R - a_R}{2(w(B) - w(A))} & b_L \le a_L \le a_R \le b_R \text{ ve } w(B) > w(A)\ ise \\ 0{,}5 & a_L = b_L \text{ ve } w(A) = w(B)\ ise \end{cases} \tag{3.4}$$

üyelik fonksiyonu yardımıyla ifade edilir (Collins and Hu, 2008). Burada "1^*" fuzzy anlamında 1'den küçük bir sayıdır ve bu da A aralığının B aralığından büyük olmadığını gösterir.

$$\varphi(B \prec A) = 1 - \varphi(A \prec B) \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanır.

φ fuzzy sıralama indeksi $a_L = b_L$ ve $w(A) = w(B)$ durumu dışındaki durumlarda süreklidir. Ek olarak aşağıdaki özelliklerin geçerli olduğu kolayca görülebilir (Collins and Hu, 2008).

(a) $0 \leq \varphi(A \prec B) \leq 1$

(b) $\varphi(A \prec A) = 0{,}5$

(c) $\varphi(A \prec B) + \varphi(B \prec A) = 1$

(d) Keyfi A, B, C aralıkları için $\varphi(A \prec B) \geq 0{,}5$ ve $\varphi(B \prec C) \geq 0{,}5$ ise $\varphi(A \prec C) \geq 0{,}5$ dir ya da $\varphi(A \prec B) \leq 0{,}5$ ve $\varphi(B \prec C) \leq 0{,}5$ ise $\varphi(A \prec C) \leq 0{,}5$ dir.

(3.2) ve (3.3) ifadeleri aşağıdaki biçimde bi-objective matematiksel programlama modellerine dönüştürülür.

$$max\left\{v_L, \frac{v_L+v_R}{2}\right\}$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ijL}x_i \geq v_L \ \ (j = 1,2,\dots,n) \\ \frac{v_L - \sum_{i=1}^{m} a_{ijR}x_i}{(v_R - v_L) - (\sum_{i=1}^{m} a_{ijR}x_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ijL}x_i)} \leq \alpha \ (j = 1,2,\dots,n) \\ v_L \leq v_R \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1,2,\dots,m) \end{cases} \tag{3.6}$$

ve

$$min\left\{\omega_R, \frac{\omega_L+\omega_R}{2}\right\}$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ijR}y_j \leq \omega_R \ \ (i = 1,2,\dots,m) \\ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ijR}y_j - \omega_L}{(\omega_R - \omega_L) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ijR}y_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ijL}y_j)} \leq \alpha \ (i = 1,2,\dots,m) \\ \omega_L \leq \omega_R \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j = 1,2,\dots,n) \end{cases} \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7) ifadelerinin sadeleştirilmiş hali aşağıdaki biçimde verilir.

$$max\left\{\upsilon_L, \frac{\upsilon_L+\upsilon_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ijL} x_i \geq \upsilon_L \ \ (j=1,2,\dots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha) a_{ijR} x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha a_{ijL} x_i \geq (1-\alpha)\upsilon_R + \alpha \upsilon_L \ (j=1,2,\dots,n) \\ \upsilon_L \leq \upsilon_R \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ \ (i=1,2,\dots,m) \end{cases} \tag{3.8}$$

ve

$$min\left\{\omega_R, \frac{\omega_L+\omega_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ijR} y_j \leq \omega_R \ \ (i=1,2,\dots,m) \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ijR} y_j + \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha) a_{ijL} y_j \leq \alpha\omega_R + (1-\alpha)\omega_L \ (i=1,2,\dots,m) \\ \omega_L \leq \omega_R \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j=1,2,\dots,n) \end{cases} \tag{3.9}$$

(3.8) ve (3.9) ile verilen sistemler bi-objective lineer programlama modelleridir. Bu denklemlerin çözümü için önerilen lexicographic metod aşağıdaki biçimde verilir (Li, 2011).

1. Adım

$$max\{\upsilon_L\}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ijL} x_i \geq \upsilon_L \ \ (j=1,2,\dots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha) a_{ijR} x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha a_{ijL} x_i \geq (1-\alpha)\upsilon_R + \alpha \upsilon_L \ (j=1,2,\dots,n) \\ \upsilon_L \leq \upsilon_R \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ (i=1,2,\dots,m) \end{cases} \tag{3.10}$$

ve

$$min\{\omega_R\}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ijR} y_j \leq \omega_R \ \ (i=1,2,\dots,m) \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ijR} y_j + \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha) a_{ijL} y_j \leq \alpha\omega_R + (1-\alpha)\omega_L \ (i=1,2,\dots,m) \\ \omega_L \leq \omega_R \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j=1,2,\dots,n) \end{cases} \tag{3.11}$$

burada $\alpha \in [0,1]$ oyuncu tarafından verilen bir parametredir. (3.10) ve (3.11) ifadelerine karşılık gelen optimal çözümler sırasıyla $(x^0,\ \upsilon_L^0,\ \upsilon_R^0)$ ve $(y^0,\ \omega_L^0,\ \omega_R^0)$ ile gösterilir.

2. Adım

$$max\left\{\frac{\upsilon_L+\upsilon_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ijL}x_i \geq \upsilon_L \ \ (j=1,2,\dots,n)\\ \sum_{i=1}^{m}(1-\alpha)a_{ijR}x_i + \sum_{i=1}^{m}\alpha a_{ijL}x_i \geq (1-\alpha)\upsilon_R + \alpha\upsilon_L \ (j=1,2,\dots,n)\\ \upsilon_L \leq \upsilon_R\\ \upsilon_L \geq \upsilon_L^0\\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\ x_i \geq 0 \ (i=1,2,\dots,m)\end{cases} \tag{3.12}$$

ve

$$min\left\{\frac{\omega_L+\omega_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ijR}y_j \leq \omega_R \ \ (i=1,2,\dots,m)\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha a_{ijR}y_j + \sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)a_{ijL}y_j \leq \alpha\omega_R + (1-\alpha)\omega_L \ (i=1,2,\dots,m)\\ \omega_L \leq \omega_R\\ \omega_R \leq \omega_L^0\\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\\ y_j \geq 0 \ (j=1,2,\dots,n)\end{cases} \tag{3.13}$$

(3.12) ve (3.13) ifadelerine karşılık gelen optimal çözümler sırasıyla $(x^*,\ \upsilon_L^*,\ \upsilon_R^*)$ ve $(y^*,\ \omega_L^*,\ \omega_R^*)$ dir. Bu çözümler (3.10) ve (3.11) in Pareto optimal çözümleridir.

Pareto optimal çözüm, bir oyuncunun kazancını azaltmaksızın diğerinin daha fazla kazanmasını sağlayacak strateji ikilisinin kullanılarak elde edildiği bir çözümdür.

Bu durumda x^*, $I.$ oyuncunun maximin(optimal) stratejisi ve $\bar{\upsilon}^* = [\upsilon_L^*, \upsilon_R^*]$ $I.$ oyuncu için oyun değeri(oyunun alt değeri) dir. y^*, $II.$ oyuncu için minimax(optimal) strateji ve $\overline{\omega}^* = [\omega_L^*, \omega_R^*]$ $II.$ oyuncu için oyun değeri(oyunun üst değeri) dir.

Örnek 3.5.1. 2×2 lik aralık matris oyunu

$$\tilde{A} = \left([a_{ijL}, a_{ijL}]\right)_{2\times 2} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{pmatrix} [-3,-1] & [4,6] \\ [6,8] & [-7,-5] \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilsin. Lexicographic metodu kullanarak oyunun çözümünü bulalım.

Çözüm. $\alpha = 0$ değeri için (3.10) ve (3.11) ifadelerine karşılık gelen lineer programlama modelleri

$$max\{v_L\}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 \geq v_L \\ 4x_1 - 7x_2 \geq v_L \\ -x_1 + 8x_2 \geq v_R \\ 6x_1 - 5x_2 \geq v_R \\ v_L \leq v_R \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

ve

$$min\{\omega_R\}$$

$$\begin{cases} -3y_1 + 4y_2 \leq \omega_L \\ 6y_1 - 7y_2 \leq \omega_L \\ -y_1 + 6y_2 \leq \omega_R \\ 8y_1 - 5y_2 \leq \omega_R \\ \omega_L \leq \omega_R \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

biçiminde elde edilir. Simpleks metod yardımıyla, (3.14) ve (3.15) in çözümleri sırasıyla $(x_1^0, x_2^0, v_L^0, v_R^0)$ ve $(y_1^0, y_2^0, \omega_L^0, \omega_R^0)$ biçiminde elde edilir. Burada

$$x_1^0 = \frac{13}{20}, x_2^0 = \frac{7}{20}, v_L^0 = \frac{3}{20}, v_R^0 = \frac{43}{20}$$

$$y_1^0 = \frac{11}{20}, y_2^0 = \frac{9}{20}, \omega_L^0 = \frac{3}{20}, \omega_R^0 = \frac{43}{20}$$

dir.

Lexicographic metodun ikinci adımında yer alan (3.12) ve (3.13) ifadelerine karşılık gelen ve (3.14) ve (3.15) ifadeleri gözönüne alınarak elde edilen lineer programlama modelleri sırasıyla

$$max\left\{\frac{v_L+v_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 \geq v_L \\ 4x_1 - 7x_2 \geq v_L \\ -x_1 + 8x_2 \geq v_R \\ 6x_1 - 5x_2 \geq v_R \\ v_L \leq v_R \\ v_L \geq 3/20 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

ve

$$min\left\{\frac{\omega_L+\omega_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} -3y_1+4y_2 \le \omega_L \\ 6y_1-7y_2 \le \omega_L \\ -y_1+6y_2 \le \omega_R \\ 8y_1-5y_2 \le \omega_R \\ \omega_L \le \omega_R \\ \omega_R \le 43/20 \\ y_1+y_2=1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

biçiminde elde edilir.

(3.16) ve (3.17) sitemlerin çözümleri simpleks metod yardımıyla $(x_1^*, x_2^*, \upsilon_L^*, \upsilon_R^*)$ ve $(y_1^*, y_2^*, \omega_L^*, \omega_R^*)$ biçiminde elde edilir. Burada

$$x_1^* = \frac{13}{20}, x_2^* = \frac{7}{20}, \upsilon_L^* = \frac{3}{20}, \upsilon_R^* = \frac{43}{20}$$

$$y_1^* = \frac{11}{20}, y_2^* = \frac{9}{20}, \omega_L^* = \frac{3}{20}, \omega_R^* = \frac{43}{20}$$

dir.

O halde, $\tilde{A}$ aralık matris oyunun değeri

$$\bar{v}^* = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i^*[a_{ijL}, a_{ijR}]y_j^* = \left[\frac{3}{20}, \frac{43}{20}\right]$$

dir. $\tilde{A}$ aralık matris oyunun değeri $\bar{v}^*$ olmasının yanı sıra $(x_1^*,\ x_2^*)^T$ $I.$ oyuncu için optimal strateji ve $\bar{\upsilon}^*$, $I.$ oyuncu için oyun değeri (oyunun alt değeri), $(y_1^*,\ y_2^*)^T$ $II.$ oyuncu için optimal strateji ve $\bar{\omega}^*$ $II.$ oyuncu için oyun değeri (oyunun üst değeri) dir. Burada $\bar{\upsilon}^* = \bar{\omega}^* = \bar{v}^* = [3/20,\ 43/20]$ dir.

Sonuç olarak, (3.14) ifadesinin optimal çözümü tektir. Bu yüzden, (3.14) ile (3.16) nın optimal çözümleri aynıdır. Benzer şekilde, (3.15) ile (3.17) nin de optimal çözümleri aynıdır.

BÖLÜM 4
BİMATRİS OYUNLARI

İkinci bölümde sıfır toplamlı sonlu oyunlar ele alınmıştır. Diğer yandan, ekonomik durumlarda sık olarak karşılaşılan işçi ve işletme arasındaki mücadele, bir ürünün iki üretici arasındaki rekabeti, satıcı ve satın alıcı arasındaki uzlaşma ve buna benzer birçok durumda iki oyuncunun çıkarlarının tamamen zıt olmasının kabul edilmesi her zaman amaca uygun değildir. Bu durumda işbirliği yoluyla her iki oyuncu da kazanabilir. Böyle oyunlar sıfır toplamlı olmayan oyunlar olarak adlandırılır. Bu bölümde (Nash, 1951; Lemke ve Howson, 1964; Ferguson, 2008) çalışmalarından yararlanılmıştır.

Bimatris oyunların çözümü için analitik bir yöntem olan Lemke-Howson algortiması ve grafik yöntem incelenmiştir. Konu ile ilgili örneklere yer verilmiştir. Bu kapsamda Kolobaşkina (2011) çalışmasından yararlanılmıştır.

Tanım 4.1. Her bir oyuncunun getirileri ayrı birer matris ile verildiğinde iki kişilik sıfır toplamlı olmayan sonlu oyuna bimatris oyunu denir.

$I.$ oyuncunun sonlu strateji kümesi $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ ve $II.$ oyuncunun sonlu strateji kümesi $\{II_1, II_2, \ldots, II_m\}$ olmak üzere (I_i, II_j) strateji ikilisi seçildiğinde $I.$ ve $II.$ oyuncunun ödemeleri sırasıyla, $a_{ij} = g_1(I_i, II_j)$ ve $b_{ij} = g_2(I_i, II_j)$ biçiminde olur. Burada g_1, g_2 ödeme fonksiyonlarıdır. $I.$ oyuncunun getiri matrisi

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

$II.$ oyuncunun getiri matrisi

$$B = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{11} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

olmak üzere oyun

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & \cdots & II_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1m}, b_{1m}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2m}, b_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & (a_{n2}, b_{n2}) & \cdots & (a_{nm}, b_{nm}) \end{bmatrix} \end{array}$$

biçiminde bimatris ile verilebilir.

Tanım 4.2. (I^*, II^*) strateji ikilisinin denge noktası olması için gerek ve yeter şart

$$g_1(I, II^*) \leq g_1(I^*, II^*)$$

ve

$$g_2(I^*, II) \leq g_2(I^*, II^*)$$

olmasıdır.

Eğer $(I^*, II^*) = \left(I_i, II_j\right)$ bir denge noktası ise

- a_{ij}, A matrisinin j. sütunundaki maksimum değeridir; $a_{ij} = \max_{1\leq k\leq m} a_{kj}$
- b_{ij}, B matrisinin i. satırındaki maksimum değeridir; $b_{ij} = \max_{1\leq k\leq n} b_{ik}$

olduğu kolaylıkla söylenebilir.

Örnek 4.3. Aşağıda verilen bimatris oyununu ele alalım.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_1 \end{array} & \begin{bmatrix} (\mathbf{2}, \mathbf{0}) & (2, -1) \\ (1, 1) & (3, -2) \end{bmatrix} \end{array}$$

görüldüğü üzere (I_1, II_1) strateji ikilisi bimatris oyunu için bir denge noktasıdır. Ancak pür stratejilerde her oyunda bir denge noktası mevcut değildir. Örneğin;

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_1 \end{array} & \begin{bmatrix} (1, -1) & (-1, 1) \\ (-1, 1) & (1, -1) \end{bmatrix} \end{array}$$

bimatris oyunun denge noktası mevcut değildir. Bu durumda karma stratejilere geçiş yapılır.

Tanım 4.4. x ve y olasılık vektörleri olmak üzere

$$X_n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

$$Y_m = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) : y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \right\}$$

kümelerine sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi denir.

Tanım 4.5. $H_I(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$

$H_{II}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i b_{ij} y_j$

biçiminde verilen bağıntılara sırasıyla, I. ve II. oyuncuların beklenen ödemeleri denir.

4.1. Bimatris Oyunlarında Baskınlık

Klasik matris oyunlarında I. oyuncunun kazancına göre oluşturulmuş tek bir matris vardı ve baskınlık uygulanırken I. oyuncu için satırlar, II. oyuncu için sütunlar göz önünde bulundurularak yapılırdı. Ancak bimatris oyununda her bir oyuncunun getirileri ayrı birer matris ile verildiğinden baskınlık uygulanırken, getiri matrislerin her ikisi de kazanç matrislerini, her ikisi de kayıp matrislerini veya biri kazanç diğeri kayıp matrisini temsil edebilir. Bu durumda, üç farklı kriter doğrultusunda baskınlık uygulanır. Gerekli olmayan stratejiler çıkarılarak, mümkün olduğu kadar matris boyutu küçültülür.

1. **Kriter**

Birinci kriterde amaç, I. oyuncunun kendi kazancını maksimalleştirmek, II. oyuncunun kazancını ise minimalleştirmektir. Burada aktif olan I. oyuncudur, II. oyuncu kendi kazancı için herhangi birşey yapmamaktadır.

İlk adımda, I. oyuncu klasik anlamda daha çok kazanacağı stratejiyi tutup, diğerini siler. Aynı anda II. oyuncunun da getiri matrisinden aynı satır silinir. İkinci adımda ise, amaç karşıt oyuncunun getirisini minimalleştirmek olduğundan, II. oyuncunun getiri matrisinden daha fazla kazanmasına sebep olacak olan satır silinir. Baskınlık işlemi, satırlar arası baskınlık ortadan kalkıncaya kadar devam eder.

Şimdi birinci kriter göz önünde bulundurularak aşağıdaki bimatrise baskınlık uygulayalım.

Örnek 4.1.1. (A, B) matris çifti ile verilen bimatris oyunu ele alalım.

$$(A,B)=\begin{bmatrix}(5,3) & (6,1) & (3,2)\\ (7,2) & (1,5) & (4,1)\\ (1,4) & (5,1) & (6,3)\\ (8,6) & (1,2) & (6,1)\end{bmatrix}$$

I. ve II. oyuncunun getiri matrisleri sırasıyla,

$$A=\begin{array}{c} \\ I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}5 & 6 & 3\\ 7 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 6\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}\end{array},\quad B=\begin{array}{c} \\ I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ 6 & 2 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

dir.

Çözüm. I. oyuncu kazancını maksimalleştirmek istiyor, bu kritere göre A oyuncusunun getiri matrisinden baskınlığa uğrayan satır silinir. O halde, I. oyuncunun getiri matrisinde I_2 ve I_4 stratejieri kıyaslandığında 4. satırın bütün elemanları 2. satırın bütün elemanlarından küçük değildir. Yani, I_4 baskındır. Bu durumda I. oyuncunun getiri matrisinden 2. satır silinir. Böylece otomatik olarak B matrisinden de 2. satır silinir. Bu durumda oyuncuların elde edilen yeni getiri matrisleri

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

biçiminde elde edilir. $I.$ oyuncu $II.$ oyuncunun kazancını minimalleştirmek ister ve birinci kritere göre B matrisinden baskın satırlar silinir. $II.$ oyuncunun getiri matrisinden görüldüğü gibi I_3 stratejisine karşılık gelen satır, I_1 stratejisine karşılık gelen satıra göre daha baskındır. Yani I_3 strateji satırının tüm elemanları, I_1 strateji satırının tüm elemanlarından küçük değildir. Amaç $II.$ oyuncunun kazancını minimalleştirmek olduğundan B matrisinden I_3 satırı silinir. Bu durumda, A matrisinden de I_3 satırı silinir. Bu durumda oyuncuların getiri matrisleri

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

biçiminde elde edilir.

2. Kriter

İkinci kriterde ise, $I.$ ve $II.$ oyuncu karşılıklı olarak diğerinin kazancını minimalleştirmeye çalışır. Burada amaç, karşıdaki oyuncunun daha az kazanmasını sağlamaktır, oyuncunun kendisinin ne kadar kazanıp kaybedeceğinin bir önemi yoktur. Bu durumda $I.$ oyuncu ilk önce tüm baskınlıkları kullanır ve gereksiz satırlar $II.$ oyuncunun getiri matrisinden silinir, aynı satırlar eş zamanlı $I.$ oyuncunun getiri matrisinden de silinir. matris indirgenemeyen hale gelinceye kadar devam eder. İkinci aşamada ise $II.$ oyuncu, $I.$ oyuncunun kazancını minimalleştirmek için baskınlığı her iki getiri matrisinde sütunlar üzerinden kullanarak devam eder.

Örnek 4.1.2. Aşağıda verilen bimatris oyunu ele alalım.

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (7,5) & (8,3) & (5,4) \\ (9,4) & (3,7) & (6,3) \\ (3,6) & (7,3) & (8,5) \end{bmatrix}$$

Her bir oyuncunun getiri matrisleri sırasıyla,

$$A = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

dir.

Çözüm. İkinci kriteri göz önünde bulundurarak baskınlık uygulayalım. I. oyuncunun amacı II. oyuncunun kazancını minimalleştirmektir. Bu durumda, ilk olarak II. oyuncunun I_3 strateji satırındaki bütün elemanları I_1 strateji satırındaki bütün elemanlardan büyük ve eşit olduğundan getirisi büyük olan satır silinir yani B matrisinden üçüncü satır silinir. I. oyuncunun da getiri matrisinden aynı satır silinir. Bu durumda

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisleri elde edilir. Son durumda I. oyuncu tarafından uygulanacak baskınlık sona ermiştir. O halde, ikinci aşamada II. oyuncu tarafından sütunlar üzerinden baskınlık uygulamaya devam edelim. Amaç I. oyuncunun kazancını minimalleştirmek olduğu için A matrisinden baskın olan sütun silinmelidir. Yani, II_1 sütunun her bir elemanı II_3 sütunundaki her bir elemandan büyük ve eşit olduğundan II_1 silinir. II. oyuncunun getiri matrisinden de aynı sütun silinir. Bu durumda

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisleri elde edilir. Sütunlarda uygulanacak baskınlık kalmadığı için işlem burada sonlanır.

3. Kriter

Üçüncü kriterde, her iki oyuncu da karşı tarafın kaybını maksimaleştirmeyi amaçlar. Bu nedenli oyuncuların getiri matrislerini kayıp matrisleri olarak düşünmeliyiz. Öyleyse, her bir oyuncu satır veya sütuna baskınlık uygularken kaybı küçük olanlar silinecektir. Bu işlem baskınlık ortadan kalkıncaya kadar devam eder.

Örnek 4.1.3. Aşağıda ele alınan bimatris oyunu örnek 3.1.2 ile aynıdır. I. ve II. oyuncunun getirileri sırasıyla,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

verilmiştir. Burada üçüncü kriteri göz önüne alarak baskınlık uygulayalım.

Çözüm. İlk olarak I. oyunu, II. oyuncunun kaybını maksimalleştirmek istediğinden B matrisinden birinci satır silinecektir. Çünkü I_1 ve I_3 satırları karşılaştırıldığında I_3 strateji satırının her bir elemanı I_1 deki her bir elemandan büyük ve eşit olduğundan kaybı küçük olan satır I_1 silinir. Aynı anda, A matrisinden de birinci satır silinir. Bu durumda oyuncuların getiri matrisleri

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

dir. Son durumda baskınlık görülmemektedir. O halde, ikinci aşamada $II.$ oyuncu tarafından sütunlar üzerinden baskınlık uygulamaya devam edilir. Amaç $I.$ oyuncunun kaybını maksimalleştirmek olduğundan A matrisinden kaybı küçük olan sütun silinmelidir. A matrisinde II_2 ve II_3 stratejileri karşılaştırıldığında II_3 sütunun her bir elemanı II_2 sütunundaki her bir elemandan büyüktür. Bu durumda, kaybı maksimalleştirmek adına küçük olan sütun yani II_2 silinir. Aynı anda B matrisinden de aynı sütun silinir. O halde,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisleri elde edilir. Son durumda, A matrisinde sütunlar arası baskınlık szö konusu değildir. Yani, $II.$ oyuncunun $I.$ oyuncunun kaybını maksimalleştirmek için uyguladığı baskınlık burada sona erer.

Sonuç olarak, baskınlıklar sonucunda elde edilmiş diğer bir deyişle sadeleştirilmiş matrisler ile çözüm yapılarak bimatris oyunu için bir çözüm elde edilir.

4.2. Denge Stratejileri ve Varlığı

İki kişilik sıfır toplamlı olmayan $n \times m$ boyutlu bimatris oyunu ele alalım.

Tanım 4.2.1. $x^* \in X_n$ $I.$ oyuncunun, $y^* \in Y_m$ $II.$ oyuncunun karma stratejisi olsun. Eğer

keyfi $x \in X_n$ için $H_I(x, y^*) \leq H_I(x^*, y^*)$ (4.1)

keyfi $y \in Y_m$ için $H_{II}(x^*, y) \leq H_{II}(x^*, y^*)$ (4.2)

ise, (x^*, y^*) ikilisine verilen oyunun denge stratejileri (veya denge ikilisi) denir.

$(x^*, y^*) \in X_n \times Y_m$ ikilisi ele alınan oyunda denge stratejileri olsun. O halde, $II.$ oyuncunun y^* stratejisini seçtiği bir durumda $I.$ oyuncu x^* stratejisi ile değil de başka bir strateji ile oynarsa, (4.1) eşitsizliği gereği x^* stratejisi ile oynadığı durumda elde edeceğinden daha fazla getiri elde edemez. Benzer durum $II.$ oyuncu için de geçerlidir. Yani oyunculardan herhangi biri denge ikilisini oluşturan stratejilerden kendisine ait olan stratejiyi seçtiğinde, diğer oyuncu daha fazla kaybetmemek için denge ikilisini oluşturan kendisine ait diğer stratejiyi seçmek zorunda kalır.

Bimatris oyunlarında denge stratejileri kavramı verildi. Bu durumda iki kişilik sıfır toplamlı olmayan sonlu oyunlarda her zaman bir denge ikilisinin var olup olmadığı sorusunu Nash Teoremi olumlu cevaplandırmaktadır (Nash, 1951).

Teorem 4.2.2. (Nash) Her bir bimatris oyunun en az bir denge noktası vardır.

Nash Teoremi, verilen iki kişilik sonlu oyunda denge stratejilerinin varlığını göstermektedir, denge ikilisinin nasıl bulunacağı konusunda bir bilgi vermez. Bu teorem sadece sonlu oyunlarda en az bir denge ikilisinin var olduğunu ifade eden bir varlık teoremidir.

Teorem 4.2.2 ile verilen denge ikilisine (denge noktasına) Nash Equilibrium (N.E) yani Nash dengesi denir.

Şimdi ise bimatris oyunların çözüm yöntemlerini ele alacağız, İlk olarak bimatris oyunlarında denge ikilisini bulmak için kullanılan analitik bir yöntemden bahsedeceğiz.

4.3. mxn Boyutlu Bimatris Oyunların Çözümü İçin Analitik Yöntem

A ve B sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun $m \times n$ boyutlu getiri matrisleri olsun. $I.$ oyuncunun m tane pür stratejisi, $II.$ oyuncunun n tane pür stratejisi olmak üzere, x^* $I.$ oyuncunun $(m \times 1)$ boyutlu karma strateji vektörü, y^* ise $II.$ oyuncunun $(n \times 1)$ boyutlu karma strateji vektörüdür.

$A > 0$ ise matrisin bütün elemanları pozitiftir ve $(1)_{mx1}$, $(1)_{nx1}$ sırasıyla $(m \times 1)$ ve $(n \times 1)$ boyutlu vektörlerdir. Yalnız 1 lerden oluşan matris ise $e_{ij} = 1, i = 1, \dots, m \; j = 1, \dots, n$ ile gösterilir.

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \; x_i \geq 0 \;\; i = 1, \dots, m \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \;\; y_i \geq 0 \;\; j = 1, \dots, n \\
&Ay^* \leq (x^{*T} A y^*)(1)_{m\times 1} = H_A (1)_{m\times 1} \\
&B^T x^* \leq (x^{*T} B y^*)(1)_{n\times 1} = H_B (1)_{n\times 1}
\end{aligned}
\qquad (4.3)
$$

(4.3) koşullarını gözönüne alarak A ve B getiri matrisleri için Nash Denge durumunu hesaplayalım.

$$d = max_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1 \; (i = 1, \dots, m; \; j = 1, \dots, n)$$

$$A_1 = dE - A > 0$$

$$B_1 = dE - B > 0$$

olmak üzere (3.12) koşullarına denk olan koşullar

$$\begin{aligned}&B_1^T\tilde{x} \geq (1)_{n\times 1}\\&\tilde{x} \geq 0\\&\big(\tilde{y}, (B_1^T\tilde{x} - (1)_{n\times 1})\big) = 0\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}&A_1^T\tilde{y} \geq (1)_{m\times 1}\\&\tilde{y} \geq 0\\&\big(\tilde{x}, (A_1^T\tilde{y} - (1)_{m\times 1})\big) = 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

biçiminde ifade edilir. $B_1^T\tilde{x} \geq (1)_{n\times 1}$ koşulu

$$B_1^T\tilde{x} \leq (d\textstyle\sum_{i=1}^m \tilde{x}_1 - 1)(1)_{n\times 1} \tag{4.6}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $x^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_1} \Rightarrow \tilde{x} = x^* \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i$ olduğundan $\tilde{x}$ değeri (4.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}B_1^T x^* \textstyle\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \ &\leq (d\textstyle\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i - 1)(1)_{n\times 1}\\ B_1^T x^* \ &\leq \left(d - \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}\right)(1)_{n\times 1}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$B^T x^* \leq (x^{*T} B y^*)(1)_{n\times 1} = H_B(1)_{n\times 1}$$

ile

$$B_1^T x^* \ \leq \left(d - \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}\right)(1)_{n\times 1}$$

ifadesi denktir. $B_1^T\tilde{x} \geq (1)_{n\times 1}$ eşitsizliğine, II. oyuncu için oyun değerini veren

$$x^{*T} B y^* = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}$$

ifadesi eklenirse

$$\begin{aligned}&\tilde{x}^T B\tilde{y} = \tilde{x}^T dE\tilde{y} - (1)_{n\times 1}^T\tilde{y}\\&\big(\tilde{y}, (B_1^T\tilde{x} - (1)_{n\times 1})\big) = 0\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(4.4) koşullarının sağlanması ile

$$B^T x^* \leq (x^{*T} B y^*)(1)_{n\times 1} = H_B(1)_{n\times 1}$$

eşitsizliği elde edilir ve benzer şekilde (4.5) koşullarının sağlanması ile

$$Ay^* \leq (x^{*T} A y^*)(1)_{m\times 1} = H_A(1)_{m\times 1}$$

elde edilir.

Nash Denge durumuna uygun denge ikilisi $(\tilde{x},\tilde{y})$olmak üzere $I.$ ve $II.$ oyuncunun sırasıyla optimal stratejileri x^*, y^* ve oyun değerleri H_A, H_B aşağıdaki biçimde bulunur.

$$x^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i}, y^* = \frac{\tilde{y}}{\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_j}$$

$$H_A = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_i}, H_B = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i}.$$

Her bimatris oyunu için en az bir denge ikilisi olduğunu Nash Teoremi ile ifade etmiştik. Nash dengesini bulmak için etkili ve yaygın bir analitik yöntem Lemke-Howson Algoritmasıdır. Bu algoritmanın adımları aşağıdaki biçimdedir.

Lemke-Howson Algoritması

(I) A_1, B_1 matrislerinin hesaplanması

(II) x^0, y^0 başlangıç strateji vektörlerinin belirlenmesi

(III) Denge koşullarının kontrol edilmesi

(IV) Bazların değiştirilmesi

(V) Optimal stratejilerin ve oyun değerinin bulunması.

Şimdi ise her bir adımda neler yapıldığını ele alalım.

(I) A_1, B_1 matrislerinin hesaplanması

1. $d = max_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1, (i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,2, \dots, n)$ değerinin belirlenmesi

2. $A_1 = dE - A, B_1 = dE - B$ dönüşümlerinin yapılması

burada E matrisi, elemanları $e_{ij} = 1, (i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,2, \dots, n)$ olan $m \times n$ boyutlu bir matristir.

(II) x^0, y^0 başlangıç strateji vektörlerinin belirlenmesi

3. A_0^* tablosunun oluşturulması

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 & \vdots & e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array} \\ A_0^* = & \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{21}^1 & \cdots & a_{m1}^1 & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12}^1 & a_{22}^1 & \cdots & a_{m2}^1 & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}^1 & a_{2n}^1 & \cdots & a_{mn}^1 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [A_1^T \vdots I_{n\times n}] \end{array}$$

Burada oluşturulan tablo A_1^T ile $n \times n$ boyutlu birim matrisin çarpımıdır. e_i $i = 1,2, \dots, n$ ler A oyuncusu için baz vektörleridir.

4. y^0 başlangıç strateji vektörü

$$y^{0^T} = \left(\frac{1}{a}, 0, \dots, 0\right)$$

biçiminde seçilir. Burada $a = min_i\, a_{i1}^1$ $(i = 1,2, \dots, m)$, A_1 matrisinin $I.$ sütununun en küçük elemanıdır. Minimumu veren i değerini i^* ile gösterelim.

5. B_0^* tablosunun oluşturulması

$$B_0^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_n^1 & \vdots\, f_1 & f_2 & \cdots & f_m \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & \cdots & b_{1n}^1 & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & \cdots & b_{2n}^1 & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}^1 & b_{m2}^1 & \cdots & b_{mn}^1 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = [B_1 \colon I_{m \times m}]$$

burada oluşturulan tablo B_1 ile $m \times m$ boyutlu birim matrisin çarpımıdır. $f_j\ j = 1,2, \dots, m$ ler B oyuncusu için baz vektörleridir.

6. x^0 başlangıç strateji vektörü

$$x^{0^T} = \left(0,0, \dots, \frac{1}{b}, 0, \dots, 0\right)$$

biçiminde seçilir. Burada $b = min_j\, b_{i^*1}^1$ $(j = 1,2, \dots, n)$, B_1 matrisinin i^*. satırının minimum elemanıdır. Minimumu veren *j* değerini j^* ile gösterelim.

(III) Denge koşullarının kontrol edilmesi

7. Denge koşullarının sağlanması aşağıda verilen A ve B yöntemlerinden herhangi biriyle kontrol edilir.

A Metodu: Aşağıdaki eşitliklerin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir.

$$(e_j^T y^0)(b_j^{1T} x^0 - 1) = 0\ j = 1, \dots, n$$

$$(f_j^T x^0)(a_j^{1T} y^0 - 1) = 0\ i = 1, \dots, m$$

burada a_i^1, e_j ler A_0^* tablosunda yer alan sütunlar, b_j^1, f_i ler B_0^* tablosunda yer alan sütunlardır. Bu koşullardan en az biri sağlanmazsa 8. adıma geçilir. Her ikisi de sağlanırsa, denge durumuna ulaşılmış demektir. Bu durumda 15. adıma geçiş yapılır.

B Metodu: $p(x)$ *ve* $q(y)$ kümelerinin belirlenmesi:

$p(x)$ kümesi $f_j^T x = 0$ koşulunu sağlayan bütün f_i ler ve $b_j^{1T} x - 1 = 0$ koşulunu sağlayan bütün b_j^{1T} lerden oluşur ve

$$p(x) = \{f_i, b_j^{1T} \,|\, f_i^T x = 0, b_j^{1T} x - 1 = 0\}$$

biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde $q(y)$ kümesi

$$q(y) = \{e_j, a_i^{1T} \mid e_j^T y = 0, a_i^{1T} y - 1 = 0\}$$

biçiminde tanımlanır. Algoritmaya başlangıç strateji vektörleri ile başlanıp işlem adımları sonrasında kümede oluşan bazları gösteren $p(x^0)$ ve $q(y^0)$ kümeleri

$$p(x^0) = \{f_1, f_2, \dots, f_{i^*-1}, b_{j^*}, f_{i^*+1}, \dots, f_m\}$$

$$q(y^0) = \{a_{i^*}, e_2, \dots, e_n\}$$

biçiminde ifade edilir.

Denge koşullarının sağlanması kontrolü $M(x,y)$ kümesinden yararlanılarak yapılır. $M(x,y)$ kümesi

$$M(x,y) = \left\{ e_r, f_s \middle| \begin{matrix} e_r \in M(x,y) \text{ eğer } e_r \in q(y) \; veya \; b_r^1 \in p(x) \\ f_s \in M(x,y) \;\; eğer \; f_s \in p(x) \; veya \; a_s^1 \in q(y) \end{matrix} \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $M(x_i, y_j) = \{e_1, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ise (x_i, y_j) ikilisi denge ikilisidir ve bu durumda 15. adıma geçiş yapılır, aksi halde 8. adıma geçiş yapılır.

(IV) Bazların değiştirilmesi

8. $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ bazı $q(y^0)$ ile $(f_1, \dots, f_m)$ bazı $p(x^0)$ ile değiştirilir ve simpleks yardımıyla yeni A_1^*, B_1^* tabloları oluşturulur. Bu işlem yapılırken anahtar elemanın bulunduğu satırın numarası e veya f bazlarının bulunduğu sütunların numarası ile aynı ise tabandan çıkarılır. Anahtar elemanın bulunduğu sütuna ait baza yerleştirilir.

A_1^* tablosunu oluşturmak için bazdan ilk olarak e_1 vektörü çıkarılır yerine a_i^* vektörü girer. Bu işlem simpleks metodda olduğu gibi yapılır. Anahtar elemanın olduğu satır, anahtar elemana bölünür ve A_0^* tablosunun tüm satırlarından anahtar elemanın olduğu satır çıkarılır. Bu işlemler sonucunda A_1^* tablosu

$$\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{i^*-1,1} & 1 & \alpha_{i^*+1,1} & \dots & \alpha_{m1} & q^{11} & \dots & q^{1n} \\
\alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{i^*-1,2} & 0 & \alpha_{i^*+1,2} & \dots & \alpha_{m2} & q^{21} & \dots & q^{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{i^*-1,n} & 0 & \alpha_{i^*+1,n} & \dots & \alpha_{mn} & q^{n1} & \dots & q^{nn}
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} \xi_i - 1 & \xi_i - 1 & \dots & \xi_i - 1 & \xi_i - 1 & \xi_i - 1 & \dots & \xi_i - 1 & y_1^0 & \dots & y_n^0 \end{matrix} &
\end{array}$$

biçiminde elde edilir.

Burada $\alpha_{i1} = \frac{a'_{i1}}{a'_{i^*1}}$ ve $\alpha_{ij} = a'_{ij} - \alpha_{i1} a'_{i^*j}$, $j \neq 1$ dir.

9. A_1^* tablosunun en alt satırında $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ bazı yerine

$$y^{0^T} = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$$

yazılır. A_1^* tablosunda

$$\xi_i = a_i^{1T} y^0, i = 1,2, \dots, m$$

biçiminde tanımlanır. Burada a_i^1 ler A_0^* tablosunun sütunlarıdır.

10. A_1^* tablosunun en sağında bulunan λ sütununu ele alalım. λ sütununun elemanları, (λ_j) ler sıfırdan farklı λ_j^* ya da λ_j^{**} lardan oluşur. Hesaplanan $\lambda_j^*,\ \lambda_j^{**}$ değerlerinden ya λ_j^* ya da λ_j^{**} sıfır olacaktır. Eğer her iki değer de $\lambda_j^* = \lambda_j^{**} = 0$ ise sıfır "0" elemanı λ sütununa girer. $\lambda^*,\ \lambda^{**}$ değerleri

$$\lambda_j^* = \min_{\substack{\alpha_{kj}<0 \\ q^{jr}<0 \\ 1\le k\le m \\ 1\le r\le n}} \left\{-\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}}, -\frac{y_r^0}{q^{jr}}\right\}, \lambda_j^{**} = \max_{\substack{\alpha_{sj}>0 \\ q^{jt}>0 \\ 1\le s\le m \\ 1\le t\le n}} \left\{-\frac{\xi_s - 1}{\alpha_{sj}}, -\frac{y_t^0}{q^{jt}}\right\}$$

11. Benzer şekilde B_1^* tablosu oluşturulur. Bu durumda A_1^* tablosunda yer alan λ sütununda λ_j lerin yerini μ_i değerleri alır. Benzer biçimde A_1^* tablosunun en alt satırındaki $\xi_i - 1$ değerlerin yerine $\eta_j - 1$ değerleri yazılır ve q^{ji} lerin yerini p^{ij} ler alır.

(V) Optimal stratejilerin ve oyun değerinin bulunması

12. I. ve II. oyuncu için olası bütün stratejiler sırasıyla

$$x_i^T = x^{0^T} + \mu_i p^i,\ \ i = 1,2, \dots, m$$
$$y_j^T = y^{0^T} + \lambda_j q^j,\ \ j = 1,2, \dots, n$$

biçiminde ifade edilir. Burada p^i, q^j ler B_1^* ve A_1^* tablolarında yer alan P ve Q matrislerinin satırlarıdır.

13. Bu adım, algoritmanın sistemin denge durumu kontrolünden bir önceki adımıdır. Bundan dolayı, simpleks yardımıyla elde edilen değişiklikler sonucu her iki oyuncu için son durumda kümelerdeki bazlar belirlenir. Yani I. ve II. oyuncu için sırasıyla $q(y_j)$ ve $p(x_i)$ kümeleri

$$q(y_j) = \{q(y^0) \cup a_m\} \setminus \{e_j\}$$
$$p(x_i) = \{p(x^0) \cup b_m\} \setminus \{f_i\}$$

biçiminde belirlenir.

14. Her bir (x_i, y_j) ikilisi için $M(x_i, y_j)$ kümesini belirlenir. 7. adımda olduğu gibi denge durumu kontrol edilir. Eğer denge koşulları sağlanırsa 15. adıma geçilir. Eğer denge durumu hiçbir ikili için sağlanmıyorsa 4. adıma geri dönülür ve A_0^* tablosunda yer alan A_1^T matrisinin ikinci satırının minimal elemanı bulunur. Bu durumda y^0 başlangıç değeri

$$y^{0^T} = \left(0\ \frac{1}{a}\ 0 \dots 0\right)$$

ile ifade edilir. Daha sonra algoritmanın bütün adımları benzer şekilde uygulanır. Eğer 2. adımda da dengeye ulaşılmazsa A_1^T matrisinde 3. satırın minimal elemanı ve uygun y^0 vektörü aranır. Bu durumda $\frac{1}{a}$ değeri y^0 vektörünün 3. bileşenine yazılır. Yani

$$\left(0\ \frac{1}{a}\ 0 \dots 0\right), \left(0\ 0\ \frac{1}{a}\ 0 \dots 0\right), \dots, \left(0\ 0 \dots \frac{1}{a}\ 0 \dots 0\right)$$

olacak biçiminde ifade edilir.

15. $(\tilde{x}, \tilde{y})$ denge ikilisi bilinirse, oyuncuların optimal stratejileri x^*, y^* ve oyun değerleri H_A, H_B

$$x^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}, y^* = \frac{\tilde{y}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}$$

$$H_A = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_i}, H_B = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 4.3.1. Oyunun getiri bimatrisi

$$(A,B) = \begin{pmatrix} (6,2) & (3,7) & (2,8) & (8,1) \\ (4,9) & (9,2) & (7,4) & (2,4) \\ (8,4) & (2,8) & (3,3) & (6,5) \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Lemke-Howson algoritmasını kullanarak bimatris oyunu için denge ikilisini yani Nash Dengesini (N.E) bulalım.

Çözüm. I. ve II. oyuncuların getiri matrisleri sırasıyla

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

dir. Şimdi algoritmanın adımlarını uygulayalım.

(I) A_1, B_1 matrislerinin hesaplanması

$d = max_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1, (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)$ ise $d = 9 + 1$=10

$$A_1 = dE - A = 10\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = dE - B = 10\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

(II) x^0, y^0 başlangıç strateji vektörlerinin belirlenmesi

$$A_0^* = [A_1^T : I_{4\times4}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 7 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

tablosunda $a = \min\limits_i a_{i1}^1 = 2$ $(i = 1,2,3)$ yani A_1 matrisinde birinci sütunun minimal elemanıdır. Bu durumda $y^{0^T} = \left(\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\right)$ olarak bulunur. O halde, $i^* = 3$ olur.

Benzer şekilde

$$B_0^* = [B_1 : I_{3\times3}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 & 9 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & 6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

tablosunda $b = \min\limits_j b_{i^*j}^1 = 2$ $(j = 1,2,3,4)$ dir ve $x^{0^T} = \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\right)$ olarak bulunur. O halde, $j^* = 2$ olur.

(III) Denge koşullarının kontrol edilmesi

A_0^* tablosunda (e_1, e_2, e_3, e_4) bazları, B_0^* tablosunda (f_1, f_2, f_3) bazları yer almaktadır. Bu adımda B Metodunu kullanmayı seçerek $M(x,\ y)$ kümesini elde etmeye çalışalım. O halde, önceki adımları gözönünde bulundurursak, "e_1" bazı çıkar, yerine "a_3" sütunu girer yani

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \to q(y^0) = (a_3, e_2, e_3, e_4)$$

olur. Benzer şekilde, "f_3" bazı çıkar, yerine "b_2" sütunu girer yani

$$(f_1, f_2, f_3) \to p(x^0) = (f_1, f_2, b_2)$$

olur. Bu durumda $M(x_1,\ y_1) = \{e_2, e_3, e_4, f_1, f_2\}$ kümesinde tüm bazlar bulunmadığından oyun için denge durumu mevcut değildir. Algoritmanın adımlarına devam edilir.

(IV) Bazların değiştirilmesi

Bazlar değiştirilir, simpleks yardımıyla gerekli satır işlemleri yapılarak A_1^* ve B_1^* tabloları oluşturulur.

$$A_0^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & \vdots & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & \vdots & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & \vdots & -7/2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & \vdots & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B_0^* = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccccc} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \end{array}$$

$$B_0^* = \left[\begin{array}{cccc:ccc} -1 & 0 & -17/2 & 3/2 & 1 & 0 & -3/2 \\ -23 & 0 & -22 & -14 & 0 & 1 & -4 \\ -6 & 1 & 7/2 & 5/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

dir. Şimdi A_1^* tablosunda yer alan ξ satırı ve λ sütununu bulalım.

$$\xi - 1 = [\xi_1 - 1\ \xi_2 - 1\ \xi_3 - 1]$$

satırında $\xi_i = a_i^{1^T} y^0$ olmak üzere

$$\xi_1 = [4\ 7\ 8\ 2]\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2,\ \xi_2 = 3,\ \xi_3 = 1$$

olarak elde edilir. Bu durumda, $\xi - 1 = [\xi_1 - 1\ \xi_2 - 1\ \xi_3 - 1] = [1\ 2\ 0]$ dir.

λ sütunu $\lambda^T = [\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4]$ olmak üzere elemanları $\lambda_j^*,\ \lambda_j^{**}$ lerden oluşur.

$$\lambda_1 \text{ için } \lambda_1^{**} = \max_{\substack{1\le s\le 3\\ 1\le t\le 4}}\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3},\ 0, -1\right\} = 0$$

$$\lambda_2 \text{ için } \begin{cases} \lambda_2^* = min_{\substack{1\le s\le 3\\ 1\le t\le 4}}\left\{\frac{1}{9},\ \frac{2}{23},\ \frac{1/2}{4}\right\} = \frac{2}{23} \\ \lambda_2^{**} = max_{\substack{1\le s\le 3\\ 1\le t\le 4}}\{0\} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_3 \text{ için } \begin{cases} \lambda_3^* = min_{\substack{1\le s\le 3\\ 1\le t\le 4}}\left\{\frac{1}{6},\ \frac{2}{18},\ \frac{1}{7}\right\} = \frac{1}{9} \\ \lambda_3^{**} = max_{\substack{1\le s\le 3\\ 1\le t\le 4}}\{0\} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_4 \text{ için } \begin{cases} \lambda_4^* = min_{\substack{1\le s\le 3\\ 1\le t\le 4}}\left\{\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{6} \\ \lambda_4^{**} = max_{\substack{1\le s\le 3\\ 1\le t\le 4}}\{0\} = 0 \end{cases}$$

ise $\lambda_2 = \frac{2}{23}, \lambda_3 = \frac{1}{9}, \lambda_4 = \frac{1}{6}$ olarak elde edilir. O halde A_1^* tablosu

$$A_1^* = \begin{array}{ccccccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \lambda \\ \hline 2 & 3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2/23 \\ -6 & -18 & 0 & -7/2 & 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ -6 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

biçiminde oluşturulur. Benzer şekilde B_1^* tablosu

$$B_1^* = \begin{array}{ccccccc|c} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & f_1 & f_2 & f_3 & \mu \\ \hline -1 & 0 & -17/2 & 3/2 & 1 & 0 & -3/2 & 5/17 \\ -23 & 0 & -22 & -14 & 0 & 1 & -4 & 2/23 \\ 3 & 1 & 7/2 & 5/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$

biçiminde oluşturulur.

(V) Optimal stratejilerin ve oyun değerinin bulunması

I. oyuncuların olası tüm stratejileri:

$$x_i^T = x^{0^T} + \mu_i p^i \ (i = 1,2,3)$$

olmak üzere

$$x_1^T = \left[0\ 0\ \tfrac{1}{2}\right] + \tfrac{5}{17}\left[1 \quad 0 \quad -\tfrac{3}{2}\right] = \left[\tfrac{5}{17}\ 0\ \tfrac{1}{17}\right]$$

$$x_2^T = \left[0\ 0\ \tfrac{1}{2}\right] + \tfrac{2}{23}[0\ 1 - 4] = \left[0\ \tfrac{2}{23}\ \tfrac{7}{46}\right]$$

$$x_3^T = \left[0\ 0\ \tfrac{1}{2}\right] + 0\left[0\ 0\ \tfrac{1}{2}\right] = \left[0\ 0\ \tfrac{1}{2}\right]$$

olarak bulunur.

II. oyuncuların olası tüm stratejileri:

$$y_j^T = y^{0^T} + \lambda_j q^j \ (j = 1,2,3,4)$$

olmak üzere

$$y_1^T = \left[\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\right] + 0\left[\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\right] = \left[\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\right]$$

$$y_2^T = \left[\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\right] + \tfrac{2}{23}[-4\ 1\ 0\ 0] = \left[\tfrac{7}{46}\ \tfrac{2}{23}\ 0\ 0\right]$$

$$y_3^T = \left[\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\right] + \tfrac{1}{9}\left[-\tfrac{7}{2}\ 0\ 1\ 0\right] = \left[\tfrac{1}{9}\ 0\ \tfrac{1}{9}\ 0\right]$$

$$y_4^T = \left[\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\right] + \tfrac{1}{6}[-2\ 0\ 0\ 1] = \left[\tfrac{1}{6}\ 0\ \tfrac{1}{6}\ 0\right]$$

olarak bulunur.

$p(x_i)$ ve $q(y_j)$ kümeleri $i = 1, j = 1$ için

$$p(x_1) = \{p(x^0) \cup b_m\}\backslash\{f_1\} \Rightarrow p(x_1) = \{b_3, f_2, b_2\}$$

$$q(y_1) = \{q(y^0) \cup a_m\}\backslash\{e_1\} \Rightarrow q(y_1) = \{a_3, e_2, e_3, e_4\}$$

olur. Bu durumda $M(x_1, y_1) = \{f_1, f_2, a_3, b_2, e_2, e_3, e_4\}$ dir. Kümede tüm bazlar mevcut olmadığından 4. adıma geri dönülerek adımlar uygulanır ve 7. adımdaki denge koşulları tekrar kontrol edilir.

A_0^* tablosunda ikinci adımda, A_1^T matrisinin ikinci satırın minimum elemanı 1 dir. Bu durumda e_2 bazı çıkar, yerine a_2 girer. B_0^* tablosunda B_1 matrisinde ikinci satıra gidilir ve minimum eleman 1 olarak bulunur. Yani, f_2 bazı çıkarılır yerine b_1 girer. Bu durumda baz çiftleri

$$(b, e) \rightarrow (b_1, b_2, e_3, e_4)$$

$$(a, f) \rightarrow (f_1, a_2, a_3)$$

biçiminde elde edilir. 7.adımda denge koşullarını tekrar kontrol edildiğinde

$M(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ f_1,\ f_2, f_3\}$

olarak bulunur, M kümesinde tüm bazlar bulunduğu için denge durumuna ulaşılmıştır.

O halde, denge durumuna ikinci aşamanın sonunda ulaşıldığından optimal stratejileri ve oyun değerini bulmak için her bir oyuncunun ikinci stratejileri kullanılacaktır.

$I.$ ve $II.$ oyuncunun optimal stratejileri ve getirileri

$$x^{*T} = \frac{\left[0\ \frac{2}{23}\ \frac{7}{46}\right]}{0+\frac{2}{23}+\frac{7}{46}} = \left[0\ \ \frac{4}{11}\ \ \frac{7}{11}\right],\ y^{*T} = \frac{\left[\frac{7}{46}\ \frac{2}{23}\ 0\ 0\right]}{\frac{7}{46}+\frac{2}{23}+0+0} = \left[\frac{7}{11}\ \ \frac{4}{11}\ \ 0\ 0\right]$$

$$H_A = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j} = 10 - \frac{46}{11} = 5\,\frac{9}{11}\ ,\ H_B = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i} = 10 - \frac{46}{11} = 5\,\frac{9}{11}$$

olarak bulunur.

4.4. Bimatris Oyunların Çözümü İçin Grafik Yöntem

2×2 lik bimatris oyunların denge ikililerini bulmak için grafik yöntem ele alınacaktır.

Getiri bimatrisi

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (a_{11},\ b_{11}) & (a_{12},\ b_{12}) \\ (a_{21},\ b_{21}) & (a_{22},\ b_{22}) \end{pmatrix}$$

biçiminde verilsin. $I.$ ve $II.$ oyuncuların getiri matrisleri sırasıyla

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir. 2×2 lik bir oyunda oyuncuların karma stratejileri

$(x, 1-x)$ ve $(y, 1-y)$ $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

dir. Bu durumda oyuncuların kazançları (getiri fonksiyonları)

$$H_A = x^T A y = (x\ 1-x) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$$

$$H_B = x^T B y = (x\ 1-x) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

$$= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$$

biçiminde ifade edilir.

Ele alınan bimatris oyunu için

$$Ay \le H_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \le H_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Bx \leq H_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \leq H_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ifadeleri düzenlenirse

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \leq H_A \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \leq H_A \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{12}(1-x) \leq H_B \\ b_{21}x + b_{22}(1-x) \leq H_B \end{cases} \tag{4.10}$$

(4.9) ve (4.10) ile verilen eşitsizlikler elde edilir. (4.7) ifadesindeki H_A değeri (4.9) ile verilen eşitsizliklerde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(1-x)y + (a_{12} - a_{22})(1-x) \leq 0 \\ (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x \geq 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

elde edilir. Burada $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = a_1$ ve $a_{12} - a_{22} = a_2$ olacak biçimde bir değişken değiştirme yapılırsa, (4.11) ifadesi

$$a_1(1-x)y - a_2(1-x) \leq 0 \tag{4.12}$$

$$a_1xy - a_2x \geq 0 \tag{4.13}$$

olur. Bu durumda I. oyuncunun stratejiler kümesi (4.12) ve (4.13) ile verilen koşulları sağlar. x için üç durum mevcuttur:

1. Durum

$x = 0$ ise (4.13) bütün y ler için sağlanır ve (4.12) ise

$$a_1y - a_2 \leq 0 \tag{4.14}$$

biçiminde ifade edilir.

2. Durum

$x = 1$ ise (4.12) bütün y ler için sağlanırken (4.13) koşulu ise

$$a_1y - a_2 \geq 0 \tag{4.15}$$

biçiminde ifade edilir.

3. Durum

$0 < x < 1$ ise bu durumda (4.12) ile verilen eşitsizliğin sol tarafı $(1-x)$'e, (4.13) ile verilen eşitsizliğin sol tarafını ise x'e bölünürse

$$\begin{cases} a_1 y - a_2 \le 0 \\ a_1 y - a_2 \ge 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

elde edilir. Yani, $a_1 y - a_2 = 0$ olur. Böylece (4.12) ve (4.13) koşullarını sağlayan sistemin çözüm kümesi $\mathcal{K}$ ile gösterilsin. O halde $\mathcal{K}$ için üç durum mevcuttur.

1) $a_1 y - a_2 \le 0 \Rightarrow (0, y)\ 0 \le y \le 1$

2) $a_1 y - a_2 = 0 \Rightarrow (x, y)\ 0 \le y \le 1, 0 < x < 1$

3) $a_1 y - a_2 \ge 0 \Rightarrow (1, y)\ 0 \le y \le 1.$

Eğer $a_1 = a_2 = 0$ ise (4.14)-(4.16) koşulları bütün x ve y ler için sağlanır. Bu durumda çözüm $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ birim karesinin bütün noktalarıdır.

Eğer $a_1 = 0$, $a_2 \ne 0$ ise (4.14) ve (4.15) koşullarından biri sağlanır. Bu durumda çözüm $x = 0$ ya da $x = 1$ dir.

Eğer $a_1 > 0$ ise

$$\begin{cases} x = 0 \text{ için } y \le a_2/a_1 = \alpha \\ x = 1 \text{ için } y \ge \alpha \\ 0 < x < 1 \text{ için } y = \alpha \end{cases}$$

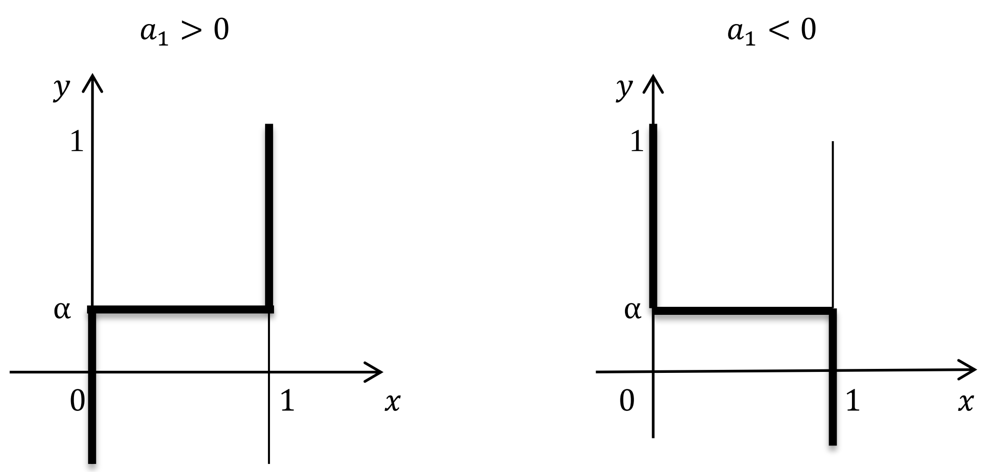
biçiminde çözümler elde edilir.

Eğer $a_1 < 0$ ise

$$\begin{cases} x = 0 \text{ için } y \ge a_2/a_1 = \alpha \\ x = 1 \text{ için } y \le \alpha \\ 0 < x < 1 \text{ için } y = \alpha \end{cases}$$

biçiminde çözümler elde edilir.

I. oyuncuyu temsil eden A nın çözümler kümesi olan $\mathcal{K}$ nın grafik gösterimi şekil 4.1 ile verilir.



Şekil 4.1. *I*. oyuncu için oyunun çözümünün grafik ile gösterimi

Benzer biçimde B oyuncusu için de aynı adımları uygulayalım.

(4.8) ifadesindeki H_B değeri (4.10) ile verilen eşitsizliklerde yerine yazılırsa

$$\begin{cases}(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})(1-x)y+(b_{12}-b_{22})(1-x)\leq 0\\(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})xy+(b_{12}-b_{22})x\geq 0\end{cases} \tag{4.17}$$

elde edilir. Burada $b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}=b_1$ ve $b_{22}-b_{21}=b_2$ olacak biçimde bir değişken değiştirme yapılırsa, (4.17) ifadesi

$$b_1(1-x)y-b_2(1-x)\leq 0$$
$$b_1xy-b_2x\geq 0$$

biçiminde elde edilir. B oyuncusunun çözümler kümesi $\mathcal{L}$ olsun. O halde $\mathcal{L}$ için aşağıdaki durumlar mevcuttur.

1) $b_1y-b_2\leq 0 \Longrightarrow (x,0)\ 0\leq x\leq 1$

2) $b_1y-b_2=0 \Longrightarrow (x,y)\ 0\leq x\leq 1, 0<y<1$

3) $b_1y-b_2\geq 0 \Longrightarrow (x,1)\ 0\leq x\leq 1.$

Eğer $b_1=b_2=0$ ise çözüm $x\in[0,1],\ y\in[0,1]$ birim karesinin tüm noktalarıdır.

Eğer $b_1=0,\ b_2\neq 0$ ise çözüm $y=0$ ya da $y=1$ dir.

Eğer $b_1>0$ ise

$$\begin{cases}y=0\ \ için\ x\leq a_2/a_1=\alpha\\ y=1\ için\ x\geq\alpha\\ 0<y<1\ için\ x=\alpha\end{cases}$$

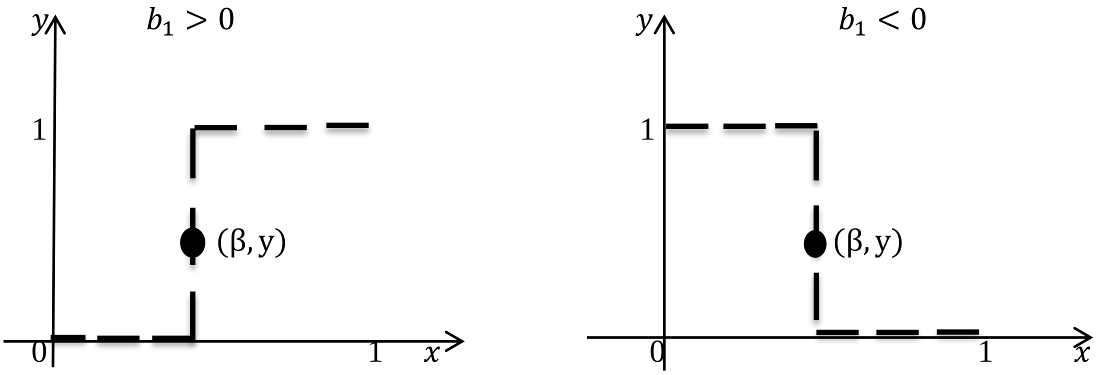
biçiminde çözümler elde edilir.

Eğer $b_1<0$ ise

$$\begin{cases}y=0\ için\ x\geq a_2/a_1=\alpha\\ y=1\ için\ x\leq\alpha\\ 0<y<1\ için\ x=\alpha\end{cases}$$

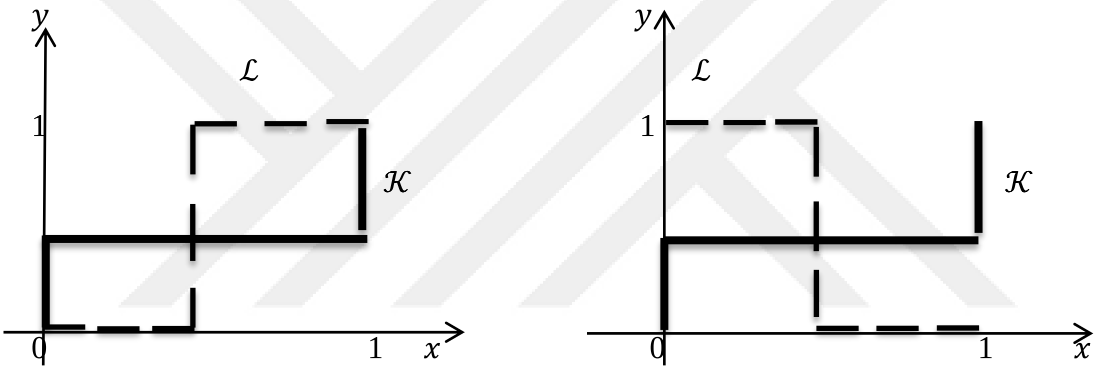
biçiminde çözümler elde edilir.

$II.$ oyuncuyu temsil eden B nın çözümler kümesi olan $\mathcal{L}$ nin grafik gösterimi şekil 4.2 ile verilir.



Şekil 4.2. II. oyuncu için oyunun çözümünün grafik ile gösterimi

Oyunun çözümü $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ kümelerinin kesişimi olan x ve y lerdir. Bu durumda (A, B) matris çifti ile verilen bimatris oyunun çözümünün grafik gösterimi şekil 4.3 ile verilir.



Şekil 4.3. Bimatris oyunun grafik yöntemi ile çözümü

Elde edilen şekillerden de görüldüğü gibi $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ çözüm kümelerinin oluşturduğu zigzaglar ters yönde olduğu gibi aynı yönde de olabilir.

Şekil 4.3'de yer alan ilk grafikte zigzaglar üç kesişim noktasına sahiptir. İkinci grafikte ise zigzaglar bir kesişim noktasına sahiptir.

O halde elde edilen x ve y değerleri (4.7) ve (4.8) ifadelerinde yerine yazılırsa, oyuncuların herbirinin ortalama kazançları belirlenir.

Örnek 4.4.1. Getiri bimatrisi

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (-10, 5) & (2, -2) \\ (1, -1) & (-1, 1) \end{pmatrix}$$

ile verilen I. ve II. oyuncuların getiri matrisleri sırasıyla

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir. 2×2 lik bimatris oyununu grafik yöntem ile çözelim.

Çözüm. I. oyuncunun $\mathcal{K}$ çözümler kümesini belirleyelim. İlk olarak α değerini hesaplayalım:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -14 < 0$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -3$$

olmak üzere $\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{14}$ olur.

$a_1 < 0$ olduğundan çözüm kümesi $\mathcal{K}$

$$\begin{cases} (0,y) & 3/14 \le y \le 1 \\ (x,3/14) & 0 \le x \le 1 \\ (1,y) & 0 \le y \le 3/14 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir. Benzer biçimde II. oyuncusunun $\mathcal{L}$ çözümler kümesini belirleyelim. İlk olarak β değerini hesaplayalım:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 9 > 0$$

$$b_2 = b_{22} - b_{12} = 2$$

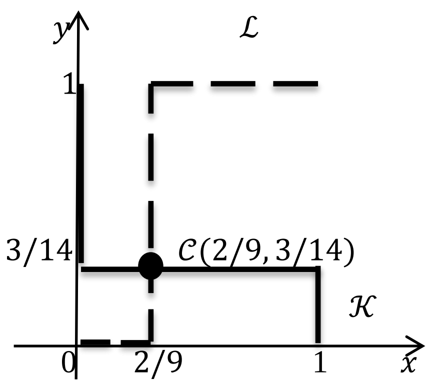
olmak üzere $\beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{9}$ olur.

$b_1 > 0$ olduğundan çözüm kümesi $\mathcal{L}$

$$\begin{cases} (x,0) & 0 \le x \le 2/9 \\ (2/9,y) & 0 \le y \le 1 \\ (x,1) & 2/9 \le x \le 1 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

$\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ çözüm kümelerinin kesim noktası $\mathcal{C}$ olsun. Bu durumda çözümün grafik ile gösterimi şekil 4.4 ile verilir.



Şekil 4.4. Örnek 4.4.1 in grafik yöntem ile çözümü

Oyuncuların optimal stratejileri ve ödemeleri

$$x^{*T} = \left(\frac{2}{9}\ \frac{7}{9}\right),\ y^{*T} = \left(\frac{3}{14}\ \frac{11}{14}\right)$$

$$H_A = x^{*T} A\, y^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/14 \\ 11/14 \end{pmatrix} = -\frac{4}{7}$$

$$H_B = x^{*T} B\, y^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/14 \\ 11/14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.4.2. Getiri bimatrisi

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (2,2) & (-1,-2) \\ (1,-1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

ile verilen I. ve II. oyuncuların getiri matrisleri sırasıyla

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir. 2×2 lik bimatris oyununu grafik yöntem ile çözelim.

Çözüm. I. oyuncunun $\mathcal{K}$ çözümler kümesini belirleyelim. İlk olarak α değerini hesaplayalım:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 2 > 0$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = 1$$

olmak üzere $\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ olur.

$a_1 > 0$ olduğundan çözüm kümesi $\mathcal{K}$

$$\begin{cases} (0, y) & 0 \le y \le 1/2 \\ (x, 1/2) & 0 < x < 1 \\ (1, y) & 1/2 \le y \le 1 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir. Benzer biçimde II. oyuncusunun $\mathcal{L}$ çözümler kümesini belirleyelim. İlk olarak β değerini hesaplayalım:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 > 0$$

$$b_2 = b_{22} - b_{12} = 1$$

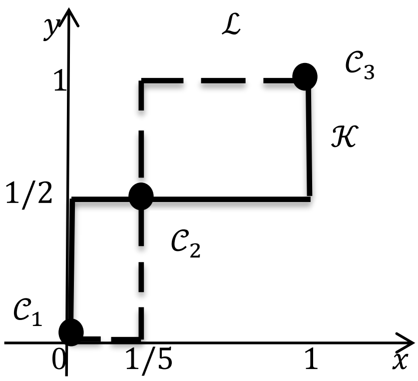
olmak üzere $\beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$ olur.

$b_1 > 0$ olduğundan çözüm kümesi $\mathcal{L}$

$$\begin{cases} (x, 0) & 0 \le x \le 1/5 \\ (1/5, y) & 0 \le y \le 1 \\ (x, 1) & 1/5 \le x \le 1 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

$\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ çözüm kümelerinin kesim noktası $\mathcal{C}$ olsun. Bu durumda çözümün grafik ile gösterimi şekil 4.5 ile verilir.



Şekil 4.5. Örnek 4.4.2 nin grafik yöntem ile çözümü

Şekil 4.5'de üç tane kesim noktası vardır ve bunlar

$$\mathcal{C}_1 = (0,0),\ \mathcal{C}_2 = \left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right),\ \mathcal{C}_3 = (1,1)$$

noktalarıdır. Bu durumda, oyuncuların optimal stratejileri ve ödemeleri

$$x_1^{*T} = (0,1) \quad x_2^{*T} = \left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right) \quad x_3^{*T} = (1,0)$$

$$y_1^{*T} = (0,1) \quad y_2^{*T} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad y_3^{*T} = (1,0)$$

$$\begin{cases} H_A = (x_1, 1-x_1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ H_B = (x_1, 1-x_1)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = (x_2, 1-x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathrm{H}_B = (x_2, 1-x_2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{H}_A = (x_3, 1-x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathrm{H}_B = (x_3, 1-x_3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

4.5. Aralık Bimatris Oyunları

Getiri matrisi, aralık matrisleriyle verildiğinde oyunun bimatrisi $(\tilde{A}, \tilde{B})$

$$\begin{bmatrix} ([a_{11L}, a_{11R}], [b_{11L}, b_{11R}]) & ([a_{12L}, a_{12R}], [b_{12L}, b_{12R}]) & \dots & ([a_{1nL}, a_{1nR}], [b_{1nL}, b_{1nR}]) \\ ([a_{21L}, a_{21R}], [b_{21L}, b_{21R}]) & ([a_{22L}, a_{22R}], [b_{22L}, b_{22R}]) & \dots & ([a_{2nL}, a_{2nR}], [b_{2nL}, b_{2nR}]) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ([a_{m1L}, a_{m1R}], [b_{m1L}, b_{m1R}]) & ([a_{m2L}, a_{m2R}], [b_{m2L}, b_{m2R}]) & \dots & ([a_{mnL}, a_{mnR}], [b_{mnL}, b_{mnR}]) \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$S_I = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i = 1,2, \dots, m\}$

$S_{II} = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_m); \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, y_j \geq 0, \forall j = 1,2, \dots, n\}$

kümeleri sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun karma stratejilerinin kümeleridir.

$I.$ oyuncu $x \in S_I$, $II.$ oyuncu $y \in S_{II}$ karma stratejisi ile oynadığında, $I.$ oyuncunun getirisi

$$H_I(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i [a_{ijL}, a_{ijR}] y_j$$

biçiminde $II.$ oyuncunun getirisi

$$H_{II}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i [b_{ijL}, b_{ijR}] y_j$$

biçiminde ifade edilir.

4.6. mxn Boyutlu Aralık Bimatris Oyunlarının Çözümü İçin Analitik Yöntem

Bu kısımda, bimatris oyunların çözümünde kullanılan Lemke-Howson algoritması aralık bimatris oyunların çözümü için uygulanacaktır.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [a_{11L}, a_{11R}] & \cdots & [a_{1nL}, a_{1nR}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{m1L}, a_{m1R}] & \cdots & [a_{mnL}, a_{mnR}] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} [b_{11L}, b_{11R}] & \cdots & [b_{1nL}, b_{1nR}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [b_{m1L}, b_{m1R}] & \cdots & [b_{mnL}, b_{mnR}] \end{bmatrix}$$

sırasıyla $I.$ ve $II.$ oyuncunun mxn boyutlu getiri matrisleri olsun. m $I.$ oyuncunun pür strateji sayısı, n $II.$ oyuncunun pür strateji sayısı olmak üzere, x^* $I.$ oyuncunun $(m \times 1)$ boyutlu karma strateji vektörü, y^* $II.$ oyuncunun $(n \times 1)$ boyutlu karma strateji vektörü olsun.

$x^* \in S_I$ $I.$ oyuncunun, $y^* \in S_{II}$ ise $II.$ oyuncunun karma stratejisi olsun. Eğer

keyfi $x \in S_I$ için $H_I(x, y^*) \leq H_I(x^*, y^*)$

keyfi $y \in S_{II}$ için $H_{II}(x^*, y) \leq H_{II}(x^*, y^*)$

ise, $(x^*,\ y^*)$ ikilisine verilen oyunun denge strataejileri (veya denge ikilisi) denir.

$\tilde{A} > 0$ ise aralık matrisinin bütün elemanları pozitifdir. $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$ olsun. $\tilde{A} = [a_{ijL}, a_{ijR}]$ ve $\tilde{B} = [b_{ijL}, b_{ijR}], 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olmak üzere her bir i, j için aralıkların uzunlukları birbirinden farklı ve aralıklar iç içe geçmemiş olsun.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \;\; x_i \geq 0 \;\; i = 1,\dots,m\\&\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \;\; y_j \geq 0 \;\; j = 1,\dots,n\\&\tilde{A}y^* \leq \left(x^{*T}\tilde{A}y^*\right)([1,1])_{mx1} = H_{\tilde{A}}([1,1])_{mx1}\\&\tilde{B}^T x^* \leq \left(x^{*T}\tilde{B}y^*\right)([1,1])_{nx1} = H_{\tilde{B}}([1,1])_{nx1}\end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.18) ile verilen koşullara dayanarak, I. ve II. oyuncunun getiri (kazanç) matrislerine uygun Nash Denge durumunu hesaplayalım.

$$d = \max_{i,j}(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) + [1,1], i = 1,\dots,m \; j = 1,\dots,n, \;\; \alpha_{ij} = \left[a_{ijL}, a_{ijR}\right], \beta_{ij} = \left[b_{ijL}, b_{ijR}\right]$$

$$\tilde{A}_1 = d\tilde{E} - \tilde{A} = \begin{pmatrix}[d,d] & \cdots & [d,d]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [d,d] & \cdots & [d,d]\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}[a_{11L}, a_{11R}] & \cdots & [a_{1nL}, a_{1nR}]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [a_{m1L}, a_{m1R}] & \cdots & [a_{mnL}, a_{mnR}]\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{m1} & \cdots & t_{mn}\end{pmatrix} > 0$$

burada $t_{ij} = [d,d] - \left[a_{ijL}, a_{ijR}\right] \; i = 1,\dots,m \;\; j = 1,\dots,n, \tilde{E} = \left[e_{ijL}, e_{ijR}\right] = [1,1]$ dir.

$$\tilde{B}_1 = d\tilde{E} - \tilde{B} = \begin{pmatrix}[d,d] & \cdots & [d,d]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [d,d] & \cdots & [d,d]\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}[b_{11L}, b_{11R}] & \cdots & [b_{1nL}, b_{1nR}]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [b_{m1L}, b_{m1R}] & \cdots & [b_{mnL}, b_{mnR}]\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}s_{11} & \cdots & s_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ s_{m1} & \cdots & s_{mn}\end{pmatrix} > 0$$

burada $s_{ij} = [d,d] - \left[b_{ijL}, b_{ijR}\right], i = 1,\dots,m \;\; j = 1,\dots,n$ dir. Bu durumda, (4.18) koşullarına denk olan koşullar

$$\begin{aligned}&\tilde{B}_1^T \tilde{x} \geq ([1,1])_{nx1}\\&\tilde{x} \geq 0\\&\left(\tilde{y}, \left(\tilde{B}_1^T \tilde{x} - ([1,1])_{nx1}\right)\right) = 0\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{A}_1^T \tilde{y} \geq ([1,1])_{mx1}\\&\tilde{y} \geq 0\\&\left(\tilde{x}, \left(\tilde{A}_1^T \tilde{y} - ([1,1])_{mx1}\right)\right) = 0\end{aligned} \tag{4.20}$$

biçiminde ifade edilir. $\tilde{B}_1^T \tilde{x} \geq ([1,1])_{nx1}$ koşulu

$$\tilde{B}_1^T \tilde{x} \leq \left(d \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i - 1\right)([1,1])_{nx1} \tag{4.21}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $x^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i} \Longrightarrow \tilde{x} = x^* \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i$ olduğundan $\tilde{x}$ değeri (4.21) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\tilde{B}_1^T x^* \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \ \le (d \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i - 1)([1,1])_{nx1}$$
$$\tilde{B}_1^T x^* \ \le \left(d - \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}\right)([1,1])_{nx1}$$

elde edilir. Böylece,

$$\tilde{B}^T x^* \le \left(x^{*T} \tilde{B} y^*\right)([1,1])_{nx1} = H_{\tilde{B}}([1,1])_{nx1}$$

ifadesi ile

$$\tilde{B}_1^T x^* \ \le \left(d - \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}\right)([1,1])_{nx1}$$

ifadesi denktir. $\tilde{B}_1^T \tilde{x} \ge ([1,1])_{nx1}$ eşitsizliğine karşılık gelen oyun değeri

$$x^{*T} \tilde{B} y^* = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}$$

ifadesini eklersek

$$\tilde{x}^T \tilde{B} \tilde{y} = \tilde{x}^T d \tilde{E} \tilde{y} - ([1,1])_{n\times1}^T \tilde{y}$$
$$\left(\tilde{y}, (B_1^T \tilde{x} - ([1,1])_{n\times1})\right) = 0$$

olur. (4.19) koşullarının sağlanması ile

$$\tilde{B}^T x^* \le \left(x^{*T} \tilde{B} y^*\right)([1,1])_{nx1} = H_{\tilde{B}}([1,1])_{nx1}$$

ifadesi sağlanacaktır. Benzer şekilde (4.20) koşullarının sağlanması ile

$$\tilde{A} y^* \le \left(x^{*T} \tilde{A} y^*\right)([1,1])_{mx1} = H_{\tilde{A}}([1,1])_{mx1}$$

ifadesi sağlanacaktır.

Nash dengesine uygun $\tilde{x}, \tilde{y}$ denge noktaları bulunduktan sonra $I.$ ve $II.$ oyuncular için x^*, y^* optimal stratejileri ve H_I, H_{II} oyun değerleri sırasıyla

$$x^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}, y^* = \frac{\tilde{y}}{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_j}$$
$$H_I = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \tilde{y}_j},\ H_{II} = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i}$$

olarak elde edilir.

Bimatris oyunlar için Nash dengesinin bulunmasında kullanılan Lemke Howson algoritmasını aralık bimatris oyunlarında ele alalım.

Lemke-Howson Algoritması

I) $\tilde{A}_1$**,** $\tilde{B}_1$ matrislerinin hesaplanması

1. $d = \max_{i,j}(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) + [1,1],\ (i = 1, \dots, m\ j = 1, \dots, n)$ değerinin belirlenmesi

2. Gerekli dönüşümlerin yapılması

$$\tilde{A}_1 = d\tilde{E} - \tilde{A} > 0$$

$$\tilde{B}_1 = d\tilde{E} - \tilde{B} > 0$$

burada $\tilde{E} = [e_{ijL}, e_{ijR}] = [1,1],\ i = 1, \dots, m\ j = 1, \dots, n$ dir.

II) x^0, y^0 başlangıç strateji vektörlerinin belirlenmesi

3. $\tilde{A}_0^*$ tablosunun oluşturulması

$$A_0^* = \begin{bmatrix} t_{11}^1 & t_{21}^1 & \cdots & t_{m1}^1 & \vdots & [1,1] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ t_{12}^1 & t_{22}^1 & \cdots & t_{m2}^1 & \vdots & [0,0] & [1,1] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{1n}^1 & t_{2n}^1 & \cdots & t_{mn}^1 & \vdots & [0,0] & [0,0] & \cdots & [1,1] \end{bmatrix} = [\tilde{A}_1^T : \tilde{I}]$$

4. y^0 başlangıç vektörünün elde edilmesi

$$y^{0^T} = \left(\frac{1}{a}\ 0 \dots 0\right)$$

burada $a = \min_i t_{i1}^1\ , i = 1,2, \dots, m$ ve $0 = [0,0]$ aralık sayısıdır. Bu değer $\tilde{A}_1$ matrisinin 1. sütununun en küçük elemanıdır. Minimumu veren i değerini i^* ile gösterelim.

5. $\tilde{B}_0^*$ tablosunu oluşturulması: $\tilde{B}_0^* = [\tilde{B}_1 : \tilde{I}]$ biçiminde elde edilir.

6. x^0 vektörünün elde edilmesi

$$x^{0^T} = \left(0\ 0\ \dots \frac{1}{b}\ 0 \dots 0\right)$$

burada $b = \min_j s_{i^*1}^1, j = 1,2, \dots, n$ ve $0 = [0,0]$ aralık sayısıdır. b aralık sayısı $\tilde{B}_1$ matrisinin i^*. satırının minimum elemanıdır. Minimum değerine uygun j değerini j^* ile gösterelim.

III) Denge koşullarının kontrol edilmesi

7. Sistemin denge durumunda olup olmadığının kontrolü aşağıdaki biçimde yapılır. Öncelikle $p(x)$ ve $q(x)$ kümeleri belirlenir. $p(x)$ kümesi $f_j^T x = [0,0]$ koşulunu sağlayan bütün f_i ler ve $s_j^{1T} x - [1,1] = [0,0]$ koşulunu sağlayan bütün s_j^{1T} lerden oluşur ve

$$p(x) = \{f_i, s_j^{1T} \mid f_i^T x = 0, s_j^{1T} x - [1,1] = [0,0]\}$$

biçiminde tanımlanır.

Benzer şekilde $q(y)$ kümesi

$$q(y) = \{e_j, t_i^1 \mid e_j^T y = 0, t_i^{1T} y - [1,1] = [0,0]\}$$

biçiminde elde edilir.

$p(x^0)$ ve $q(y^0)$ kümelerini aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$p(x^0) = \{f_1, f_2, \dots, f_{i^*-1}, s_{j^*}, f_{i^*+1}, \dots, f_m\}$

$q(y^0) = \{t_{i^*}, e_2, \dots, e_n\}$

Denge durumu kontrolü $M(x, y)$ kümesinden yararlanılarak yapılır.

$$M(x,y) = \left\{ e_r, f_s \middle| \begin{matrix} e_r \in M(x,y) \;\; eğer\; e_r \in q(y) \; veya \; s_r^1 \in p(x) \\ f_s \in M(x,y) \;\; eğer\; f_s \in p(x) \; veya \; t_s^1 \in q(y) \end{matrix} \right\}$$

Eğer $M(x_i, y_j) = \{e_1, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ise (x_i, y_j) ikilisi denge durumudur. Eğer denge durumu sağlanıyorsa 15. adıma aksi halde 8. adıma geçiş yapılır.

IV) Bazların Değiştirilmesi

8. $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ bazının $q(y^0)$ ile $(f_1, \dots, f_m)$ bazının $p(x^0)$ ile değiştirilmesi, yeni $\tilde{A}_1^*, \tilde{B}_1^*$ tabloları simpleks yardımıyla oluşturulur. Eğer anahtar elemanın bulunduğu satırın numarası e veya f sütunlarının numarası ile aynı ise tabandan çıkarılır. Anahtar elemanın bulunduğu sütun baza yerleştirilir.

$\tilde{A}_1^*$ tablosunu oluşturmak için bazdan e_1 vektörü çıkarılır yerine t_i^* vektörü girer. Bu işlem simpleks metodda olduğu gibi yapılır. Anahtar elemanın olduğu satır, anahtar elemana bölünür ve $\tilde{A}_0^*$ tablosunun tüm satırlarından anahtar elemanın olduğu satır çıkarılır. $\tilde{A}_1^*$ tablosu

$$\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix}
\tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\alpha}_{21} & \dots & \tilde{\alpha}_{i^*-1,1} & 1 & \tilde{\alpha}_{i^*+1,1} & \dots & \tilde{\alpha}_{m1} & q^{11} & \dots & q^{1n} \\
\tilde{\alpha}_{12} & \tilde{\alpha}_{22} & \dots & \tilde{\alpha}_{i^*-1,2} & 0 & \tilde{\alpha}_{i^*+1,2} & \dots & \tilde{\alpha}_{m2} & q^{21} & \dots & q^{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\tilde{\alpha}_{1n} & \tilde{\alpha}_{2n} & \dots & \tilde{\alpha}_{i^*-1,n} & 0 & \tilde{\alpha}_{i^*+1,n} & \dots & \tilde{\alpha}_{mn} & q^{n1} & \dots & q^{nn}
\end{bmatrix} & \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} \xi_1 - 1 & \xi_2 - 1 & \dots & \xi_{i^*-1} - 1 & \xi_{i^*} - 1 & \xi_{i^*+1} - 1 & \dots & \xi_m - 1 & y_1^0 & \dots & y_n^0 \end{matrix} &
\end{array}$$

biçiminde elde edilir. Burada $1 = [1,1]$ aralık sayısıdır ve $\tilde{\alpha}_{i1} = \frac{t'_{i1}}{t'_{i^*1}}$, $\tilde{\alpha}_{ij} = t'_{ij} - \tilde{\alpha}_{i1} t'_{i^*j}$, $j \neq 1$ dir.

9. $\tilde{A}_1^*$ alt tablosunda $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ bazı yerine

$$y^{0^T} = (y_1^0 \; y_2^0 \dots y_n^0)$$

yazılır.

$$\xi_i = t_i^{1T} y^0, i = 1,2, \dots, m$$

ifadesinde t_i^1 ler $\tilde{A}_0^*$ tablosunun sütunlarıdır. $\tilde{A}_1^*$ tablosunun en alt satırına $\xi_i - 1$ ($i = 1,2, \dots, m$) değerleri yazılır.

10. $\tilde{A}_1^*$ tablosunun j. satırı için λ^*, λ^{**} değerlerinin hesaplanması

$$\lambda_j^* = \min_{\substack{\alpha_{kj}<0 \\ q^{jr}<0 \\ 1\le k\le m \\ 1\le r\le n}} \left\{ -\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}}, -\frac{y_r^0}{q^{jr}} \right\}, \qquad \lambda_j^{**} = \max_{\substack{\alpha_{sj}>0 \\ q^{jt}>0 \\ 1\le s\le m \\ 1\le t\le n}} \left\{ -\frac{\xi_s - 1}{\alpha_{sj}}, -\frac{y_t^0}{q^{jt}} \right\}$$

Hesaplanan $\lambda_j^*, \lambda_j^{**}$ değerlerinden ya λ_j^* ya da λ_j^{**} sıfır olacaktır. A_1^* matrisinin sağında bulunan λ sütununu ele alalım. λ sütununun elemanları, (λ_j) ler sıfırdan farklı λ_j^* ya da λ_j^{**} lardan oluşur. Eğer $\lambda_j^* = \lambda_j^{**} = 0$ olursa; sıfır sütunu girer. Bu sayının λ_j den sağda hangi sütuna uygun olarak elde edildiği gösterilmektedir.

11. Benzer şekilde $\tilde{B}_1^*$ tablosu oluşturulur. Bu tabloda λ_j sayısı yerine μ_i sayısı elde edilir. En alt satırdaki $\xi_i - [1,1]$ değeri yerine $\eta_j - [1,1]$ değeri yazılır. q^{ji} yerine p^{ij} elde edilir.

V) Optimal Strateji ve Oyun Değerinin Belirlenmesi

12. $I.$ ve $II.$ oyuncuların sahip oldukları bütün olası x ve y stratejilerini belirleyelim.

$$\begin{cases} x_i^T = {x^0}^T + \mu_i p^i \; i = 1,2,\dots,m \\ y_i^T = {y^0}^T + \lambda_j q^j \; j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

burada p^i, q^j ler $\tilde{B}_1^*$ ve $\tilde{A}_1^*$ tablolarında dönüşümlerinin içinde olan P ve Q matrislerinin satırlarıdır.

13. $q(y_j)$ ve $p(x_i)$ kümelerini belirleyelim.

$$q(y_j) = \{q(y^0) \cup t_m\} \setminus \{e_j\}$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde $p(x_i)$

$$p(x_i) = \{p(x^0) \cup s_n\} \setminus \{f_i\}$$

biçiminde elde edilir.

14. Her bir (x_i, y_j) ikilisi için $M(x_i, y_j)$ kümesini belirleyelim. 7. adımda olduğu gibi denge durumunu kontrol edelim. Eğer denge koşulu sağlanırsa 15. adıma geçilir. Eğer denge durumu hiçbir ikili için sağlanmıyorsa 4. adıma geçilir ve $\tilde{A}_0^*$ tablosunda olan $\tilde{A}_1^T$ matrisinin ikinci satırının minimal elemanı bulunur. Bu durumda y^0 başlangıç değeri

$${y^0}^T = \left(0 \; \frac{1}{a} \; 0 \dots 0\right)$$

biçiminde elde edilir. Burada $a = \min_i t_{i1}^1, i = 1,2,\dots,m$ dir. Daha sonra da algoritmanın bütün adımları sağlanır.

Eğer 2.adımda denge durumu sağlanmazsa $\tilde{A}_1^T$ matrisinin 3.satırının minimal elmanı ve uygun y^0 vektörü aranır. Bu durumda $\frac{1}{a}$, y^0 vektörünin 3. bileşenine yazılır.

$$\left(0 \; \frac{1}{a} \; 0 \dots 0\right), \left(0 \; 0 \; \frac{1}{a} \; 0 \dots 0\right), \dots, \left(0 \; 0 \dots \frac{1}{a} \; 0 \dots 0\right)$$

biçiminde ifade edilir.

15. $\tilde{x}, \tilde{y}$ denge durumu bilinirse, optimal stratejileri x^*, y^* ve getirileri H_I, H_{II} aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$x^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}, y^* = \frac{\tilde{y}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}$$

$$H_I = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}, H_{II} = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}$$

BÖLÜM 5
ÇOK ADIMLI OYUNLAR

Bu bölümde çok adımlı oyunlar sınıfından olan pozisyonlu oyunlar ve diferensiyel oyunlar incelenecektir.

5.1. Pozisyonlu Oyunlar

Bu kısımda çok adımlı oyunlardan pozisyonlu oyunlar ele alınacaktır. Pozisyonlu oyunlarda ilk hamle rastgele yapılır. Oyunun durumları düğüm noktaları veya pozisyon olarak adlandırılır. Oyuncuların sahip oldukları bilgi açısından pozisyonlu oyunlar ikiye ayrılır. Tam bilgiye dayalı pozisyonlu oyunlar ve tam bilgiye dayalı olmayan pozisyonlu oyunlardır. Pozisyonlu oyunlara dama, satranç, okey, iskambil oyunları örnek verilebilir. Pozisyonlu oyunların karakteristik özelliği literatürde sıklıkla karşılaşılan graflarla modellenebilmesidir. Bu bölümde graflarla modellenen pozisyonlu oyunları vermeden önce grafın temel özellikleri verilecektir (Rosen, 2012). Sonrasında incelenecek olan tanımlar ve örnekler için Kolobaşkina (2011) çalışmasından yararlanılmıştır.

Tanım 5.1.1. $G = (V, E)$ grafı boş olmayan köşeler (veya düğümler) kümesi V ve kenarlar kümesi E olan kümelerden oluşur. Her kenarın bir veya iki köşesi vardır. Bu köşelere uç noktalar denir. Bir kenar uç noktaları birleştirmektedir.

Kenar sayısı sonsuz olan grafa sonsuz graf, kenar sayısı sonlu olan grafa ise sonlu graf denir. G grafının köşeler kümesi V sonsuz olabilir. Görüldüğü gibi sonlu grafın sonsuz sayıda köşesi olabilir. Bu durumda, sonsuz sayıda köşeler izole edilmiş köşelerdir. Çalışma boyunca, graflarla ilişkilendirilecek sonlu oyunlar olduğu için sadece sonlu graflar ele alınacaktır.

Tanım 5.1.2. Kenarları kesişmeksizin düzlemde çizilebilen grafa düzlemsel (planar) graf denir.

Tanım 5.1.3. Hiç basit devre içermeyen yönsüz bir grafa ağaç denir.

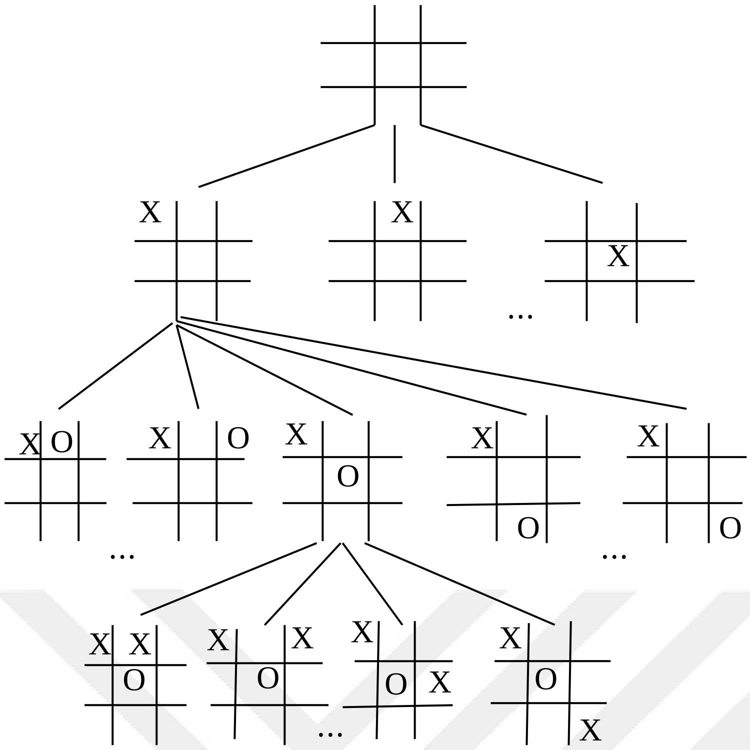
Teorem 5.1.4. Yönsüz bir grafın ağaç olması için gerek ve yeter şart her iki düğüm arasında basit bir tek yol olmasıdır.

İspat. T bir ağaç olsun. Bu durumda, T basit devre içermeyen bağlantılı bir graftır. x ve y T nin iki düğümü olsun. T bağlantılı olduğundan x ve y arasında basit bir yol vardır. Ayrıca bu yol tek olmalıdır, eğer ikinci bir yol olsaydı x den y ye giden birinci yol ile ikinci yolu tersine çevirerek elde edilen y den x e giden bir yolu birleştirerek bir devre oluştururduk. Böylelikle, T nin basit bir devreye sahip olduğunu elde ederiz. O halde, bir ağacın herhangi iki düğümü arasında basit bir tek yol vardır.

Şimdi ise T grafının herhangi iki düğüm arasında basit bir tek yol olduğunu kabul edelim. Herhangi iki düğüm arasında bir yol olduğu için T bağlantılıdır. Ayrıca T de hiç basit devre yoktur. Bunu görmek için T nin x ve y düğümlerini içeren basit bir devre olduğunu varsayalım. Bu durumda x ve y arasında iki yol olacaktır çünkü basit devre x den y ye ve y den x e giden basit bir yoldan oluşur. Dolayısıyla, herhangi iki düğüm arasında bir tek yol bulunduran graf bir ağaçtır.

Tic-tac-toe, nim, dama, satranç gibi pozisyonlu oyunları analiz etmek için ağaçlar kullanılabilir. Bu oyunların her birinde oyuncular sırayla hamle yaparlar. Her oyuncu diğer oyuncu tarafından yapılan hamleyi bilir ve oyunda şansın yeri yoktur. Böyle oyunlar, düğümleri oyun sürecindeki konumları temsil eden, kenarları ise bu konumlar arasındaki hamleleri temsil eden oyun ağaçları ile modellenir. Genellikle oyun ağaçları büyük olduğundan oyunun simetrik konumları aynı düğüm ile temsil edilerek basitleştirilebilir. Oyun, çift seviyedeki bir düğüm ile temsil edilen bir konumda ise, birinci oyuncunun hamle sırası, tek seviyedeki bir düğüm ile temsil edilen bir konumda ise ikinci oyuncunun hamle sırasıdır.

Örnek 5.1.5. (Tic-tac-toe) Tic-tac-toe oyunu iki oyuncu tarafından 3×3 lük tahtada sırayla her oyuncunun boş olan bir bölmeyi seçerek oynadığı bir oyundur. Galibiyet çizgisini tamamlayan ilk kazanan olur. Bu oyunda galibiyet çizgisi, üç yatay çizgi, üç dikey çizgi ve iki köşegenlerdir. Oyunun sonuna kadar oyuncuların biri tarafından galibiyet çizgisi oluşturulmazsa, oyun berabere biter. Bu durum, her oyuncunun rakibinin kazanmasını önlemek için oynadığını gösterir. Tic-tac-toe oyunun oyun ağacı oldukça büyüktür. Bu yüzden, Şekil 5.1'de gösterildiği gibi sadece üç olası ilk hamleleri ele almak yeterlidir.



Şekil 5.1. Tic-Tac-Toe için oyun ağacının bir kısmı

Bir oyun ağacındaki düğümlerin değerleri, yinelemeli olarak her iki oyuncunun da optimal stratejileri ile oynadıklarında oyunun sonucunu belirleyecek şekilde tanımlanır. Birinci oyuncu için optimal strateji, oyuncunun kendi kazancını maksimum yapan ve ikinci oyuncu için ise kazancını minimum yapan bir stratejidir. Şimdi bir düğümün değerini yinelemeli olarak tanımlayalım.

Tanım 5.1.6. Oyun ağacında, bir düğümün değeri yinelemeli olarak

(i) bir yaprağın değeri, eğer oyun bu yaprak ile temsil edilen bir pozisyonda bitiyorsa, birinci oyuncunun ödemesidir.

(ii) çift seviyedeki bir iç düğümün değeri, sahip olduğu düğüm değerlerinin maksimumudur ve tek seviyedeki bir iç düğümün değeri, düğüm değerlerinin minimumudur.

biçiminde tanımlanır.

Birinci oyuncunun maksimum değeri verecek olan konuma doğru hamle yaptığı ve ikinci oyuncunun ise minimum değeri verecek olan konuma doğru hamle yaptığı stratejiye minmax strateji denir. İki oyuncunun da minmax sratejisi ile oynadığı oyunda kimin kazanacağı ağacın değeri hesaplanarak belirlenebilir. Bu ise teorem 5.1.7'nin bir sonucudur.

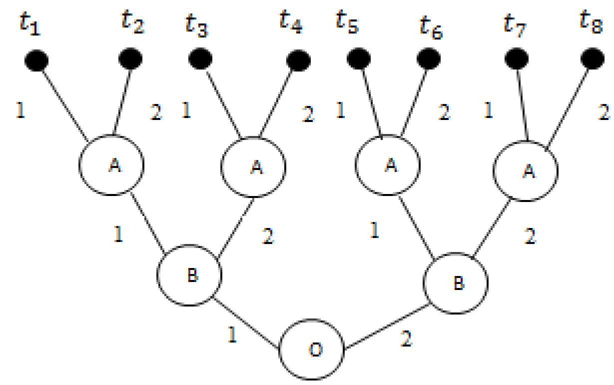
Teorem 5.1.7. Eğer iki oyuncu da minmax stratejisi ile oynarsa, oyuna başlanan düğümün değeri, birinci oyuncunun ödemesine eşit olur (Rosen, 2012).

5.1. 1. Tam Bilgili Olma Durumu

Tanım 5.1.1.1. Oyuncular oyunun geçmiş her anını biliyor ise bu özellikteki bir oyuna tam bilgiye dayalı oyun denir.

En çok oynanan tam bilgili oyunlar satranç ve Go dur. Ancak çok sayıda başka tam bilgili oyunlar da vardır; dama oyunu, çin daması, Nim, Hex, Tic-tac-toe v.s gibi. Örneğin, satranç tam bilgili bir oyundur çünkü oyunun başından itibaren her iki oyuncu da rakibinin hangi hamleyi yaptığını bilir.

Pozisyonlu bir oyun için oyun ağacı şekil 5.2 ile verilir.



Şekil 5.2. Pozisyonlu bir oyun için oyun ağacı

Yuvarların içine yazılan O, A, B sembolleri mevcut durumda hamle yapan oyuncuları temsil eder.

Örnek 5.1.1.2.

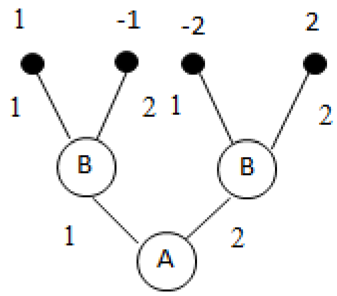
I. hamle: A oyuncusu $\{1,2\}$ kümesinden x sayısı seçiyor.

II. hamle: B oyuncusu $\{1,2\}$ kümesinden x sayısına bağlı olmaksızın bir y sayısı seçiyor. A oyuncusunun getiri fonksiyonu W olmak üzere

$W(1,1) = 1, W(2,1) = -2$

$W(1,2) = -1, W(2,2) = 2$

biçiminde veriliyor. Oyun ağacı ise şekil 5.3 ile verilir.



Şekil 5.3. Örnek 5.1.1.2 nin oyun ağacı

A oyuncusunun iki, B oyuncusunun dört stratejisi vardır ve

A_1: $\langle x = 1$ sayısını seçmek $\rangle$

A_2: $\langle x = 2$ sayısını seçmek $\rangle$

$B_1 - [1,1]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y = 1$ sayısını seçmek $\rangle$

$B_2 - [1,2]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y = x$ i seçmek $\rangle$

$B_3 - [2,1]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y \neq x$ i seçmek $\rangle$

$B_4 - [2,2]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y = 2$ i seçmek $\rangle$

biçiminde ifade edilir.

Tablo formu

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$[1,1]$	$[1,2]$	$[2,1]$	$[2,2]$
A_1	$x = 1$	$W(1,1)$	$W(1,1)$	$W(1,2)$	$W(1,2)$
A_2	$x = 2$	$W(2,1)$	$W(2,2)$	$W(2,1)$	$W(2,2)$

biçiminde elde edilir.

Matris formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir ve oyun değeri $v = -1$ dir.

5.1.2. Tam Bilgili Olmama Durumu

Tanım 5.1.2.1. Oyun hakkında oyuncuların bir kısmı diğer oyuncuların sahip olmadığı bir bilgiye sahip ise bu özellikteki oyuna tam bilgiye dayalı olmayan oyunlar denir.

Örneğin savaş, komutanlar eş zamanlı hamle yaptıkları için tam bilgili bir oyun değildir. Briç ve tavla oyununda şans rol oynadığı için bu oyunlar da tam bilgili oyunlar değildir.

Şimdi bu durumu ele alan bir örnek verelim. Örnek 5.1.2 deki bütün verilerin aynı kaldığı sadece B oyuncusunun $II.$ hamlede A oyuncusunun seçeceği x değerini bilmeden $\{1,2\}$ kümesinden bir y sayısını seçtiği bir hamle olsun. O halde,

A oyuncusunun iki tane, B oyuncusunun da iki tane stratejisi vardır ve

A_1: $\langle x = 1$ sayısını seçmek $\rangle$

A_2: $\langle x = 2$ sayısını seçmek $\rangle$

B_1: $\langle y = 1$ sayısını seçmek$\rangle$

B_2: $\langle y = 2$ sayısını seçmek $\rangle$

biçiminde ifade edilir. Oyun ağacı ise örnek 5.1.1.2 ile aynıdır.

Tablo formu

		B_1	B_2
		$y = 1$	$y = 2$
A_1	$x = 1$	$W(1,1)$	$W(1,2)$
A_2	$x = 2$	$W(2,1)$	$W(2,2)$

biçiminde elde edilir.

Matris formu

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir. Pür stratejilerde oyun değeri olmadığından karma stratejiye geçiş yapılır. Matris oyunlarının çözüm yöntemlerinden biri olan lineer programlama kullanılabilir. Bilinen simpleks metod uygulanarak çözüm elde edilir (Öztürk, 2011). Çözüm sonucu oyuncuların optimal stratejileri ve oyun değeri

$S^*_A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $S^*_B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $v = 0$

dır.

Örnek 5.1.2.2.

I. hamle: A oyuncusu $\{1,2\}$ kümesinden bir x sayısı seçiyor.

II. hamle: B oyuncusu A oyuncusunun hamlesini bilerek $\{1,2\}$ kümesinden bir y sayısı seçiyor.

III. hamle: A oyuncusu B oyuncusunun hamlesini bilmeden ve I. hamledeki seçimini unutarak $\{1,2\}$ kümesinden bir z sayısı seçiyor.

Bu durumda A nın getiri fonksiyonu W olmak üzere

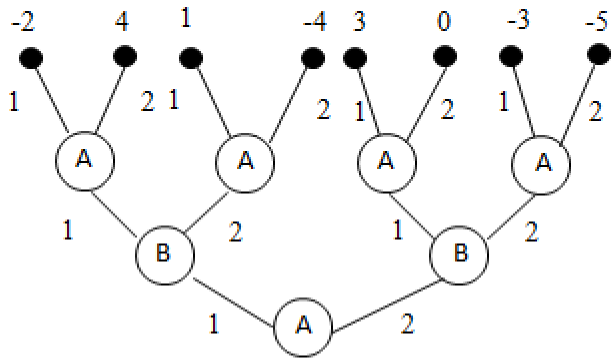
$W(1,1,1) = -2$, $W(2,1,1) = 3$

$W(1,1,2) = 4$, $W(2,1,2) = 0$

$W(1,2,1) = 1$, $W(2,2,1) = -3$

$W(1,2,2) = -4$, $W(2,2,2) = -5$

biçiminde veriliyor. Oyun ağacı ise şekil 5.4 ile verilir.



Şekil 5.4. Örnek 5.1.2.2 nin oyun ağacı

B oyuncusunun dört stratejisi vardır ve

$B_1 - [1,1]$ ⟨x'e bağlı olmadan $y = 1$ sayısını seçmek ⟩

$B_2 - [1,2]$ ⟨x'e bağlı olmadan $y = x$ i seçmek⟩

$B_3 - [2,1]$ ⟨x'e bağlı olmadan $y \neq x$ i seçmek⟩

$B_4 - [2,2]$ ⟨x'e bağlı olmadan $y = 2$ i seçmek⟩

biçiminde ifade edilir.

A oyuncusunun da dört stratejisi vardır ve

$A_1 - (1,1)$, $A_2 - (1,2)$, $A_3 - (2,1)$, $A_4 - (2,2)$

dir.

Tablo formu

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A_1	(1,1)	$W(1,1,1)$	$W(1,1,1)$	$W(1,2,1)$	$W(1,2,1)$
A_2	(1,2)	$W(1,1,2)$	$W(1,1,2)$	$W(1,2,2)$	$W(1,2,2)$
A_3	(2,1)	$W(2,1,1)$	$W(2,2,1)$	$W(2,1,1)$	$W(2,2,1)$
A_4	(2,2)	$W(2,1,2)$	$W(2,2,2)$	$W(2,1,2)$	$W(2,2,2)$

biçiminde elde edilir.

Matris formu

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Oyunun çözümü için matris oyunlarının çözüm yöntemlerinden biri olan lineer programlama kullanılabilir. Bilinen simpleks metod uygulanarak çözüm elde edilir (Öztürk, 2011). Çözüm sonucu oyuncuların optimal stratejileri ve oyun değeri

$S^*{}_A = \left(\frac{8}{11}, \frac{3}{11}, 0, 0\right)$, $S^*{}_B = \left(0, \frac{5}{11}, 0, \frac{6}{11}\right)$ ve $v = -\frac{4}{11}$

dir.

Örnek 5.1.2.3.

I. hamle: A oyuncusu $\{1,2\}$ kümesinden bir x sayısı seçiyor.

II. hamle: B oyuncusu A oyuncusunun hamlesini bilerek $\{1,2\}$ kümesinden bir y sayısı seçiyor.

III. hamle: A oyuncusu B oyuncusunun hamlesini bilmeden fakat I. hamlede kendi seçtiği x sayısını hatırlayarak $\{1, 2\}$ kümesinden bir z sayısı seçiyor.

Bu durumda A nın getiri fonksiyonu W örnek 5.1.2.2 ile aynı olmak üzere

$W(1,1,1) = -2$, $W(2,1,1) = 3$

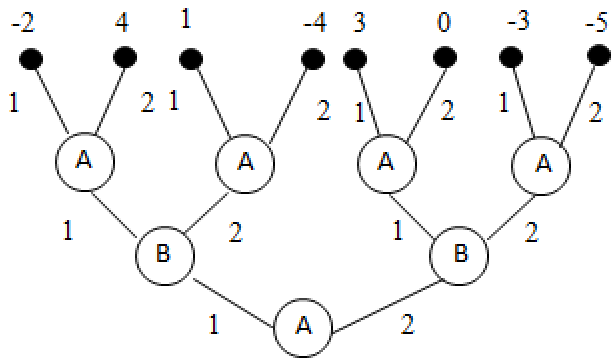
$W(1,1,2) = 4$, $W(2,1,2) = 0$

$W(1,2,1) = 1$, $W(2,2,1) = -3$

$W(1,2,2) = -4$, $W(2,2,2) = -5$

biçimindedir.

Oyun ağacı ise şekil 5.5 ile verilir.



Şekil 5.5. Örnek 5.1.2.3 ün oyun ağacı

A oyuncusunun I. hamlede seçtiği x sayısı belli olduğundan B oyuncusunun örnek 5.1.2.2'deki gibi $[y_1, y_2]$ biçiminde dört tane stratejisi vardır ve

$B_1 - [1,1]$ $\langle x'$e bağlı olmadan $y = 1$ sayısını seçmek $\rangle$

$B_2 - [1,2]$ $\langle x'$e bağlı olmadan $y = x$ i seçmek $\rangle$

$B_3 - [2,1]$ $\langle x'$e bağlı olmadan $y \neq x$ i seçmek $\rangle$

$B_4 - [2,2]$ $\langle x'$e bağlı olmadan $y = 2$ i seçmek $\rangle$

biçiminde ifade edilir.

A oyuncusu III. hamlede B oyuncusunun II. hamlede seçtiği y sayısını bilmiyor fakat I. hamlede kendi seçtiği x sayısını hatırlıyor. Buna göre A oyuncusunun III. hamlede seçtiği z sayısını I. hamlesinden bildiği x sayısı ile bağlamak gerekmektedir.

Bu durumda A oyuncusunun pür stratejileri

$$(x, [z_1,\ z_2])$$

biçiminde gösterilir. Sonuç olarak, A oyuncusunun sekiz tane stratejisi mevcuttur ve bunlar

$A_1 - (1, [1,1])$, $A_2 - (1, [1,2])$, $A_3 - (1, [2,1])$, $A_4 - (1, [2,2])$

$A_5 - (2, [1,1])$, $A_6 - (2, [1,2])$, $A_7 - (2, [2,1])$, $A_8 - (2, [2,2])$

dir. Burada A oyuncusunun $A_7 - (2, [2,1])$ stratejisini ele alırsak, I. hamlede $x = 2$ sayısını seçtiğini, III. hamlede ise $z = 1$ sayısını seçtiğini söyleyebiliriz çünkü $x = 2$ seçimi $[z_1,\ z_2]$ ikilisinden z_2 yi belirler. Öte yandan, x değeri tek değerli olarak z_i $(i = 1,2)$ yi belirlediğinden aynı getirileri veren strateji çiftleri elde edilir. Bunlar

$A_1 - A_2$, $A_3 - A_4$, $A_5 - A_7$, $A_6 - A_8$

strateji çiftleridir. Böylece, A oyuncusunun strateji sayısının dörde indirgenebildiği görülür. Buna göre, A oyuncusunun her (x, z) stratejisinde x sayısı $[x|\ x \in \{1,2\}]$ olmak üzere A oyuncusunun I. hamlesindeki x sayısına karşılık gelir. z ise $[z|\ z \in \{1,2\}]$ olmak üzere A oyuncusunun III. hamlesindeki z sayısına uygundur.

Örneğin, A nın $(2,1)$ stratejisi I. hamledesindeki $x=2$, III. hamlesindeki $z=1$ seçimini ifade eder.

O halde, örnek 5.1.2.2'de olduğu gibi A oyncusunun dört stratejisi mevcuttur. Bunlar

$A_1-(1,1), A_2-(1,2), A_3-(2,1), A_4-(2,2)$

dir.

Sonuçta, ele alınan oyunun matrisi ve çözümü örnek 5.1.2.2 ile verilen oyunun matrisi ve çözümü ile tamamen aynıdır. Bunun nedeni, I. hamlede seçilen x sayısının bilinmesinin, II. hamlede B oyuncusu tarafından seçilen y sayısı bilinmediğinde önemli olmamasıdır.

Not 5.1.2.4. Eğer A oyuncusu II. hamlede B oyuncusunun seçimini bilmiyorsa, III. hamlede A oyuncusunun, I. hamlesinde yaptığı seçimi hatırlayıp hatırlamamasının bir önemi yoktur.

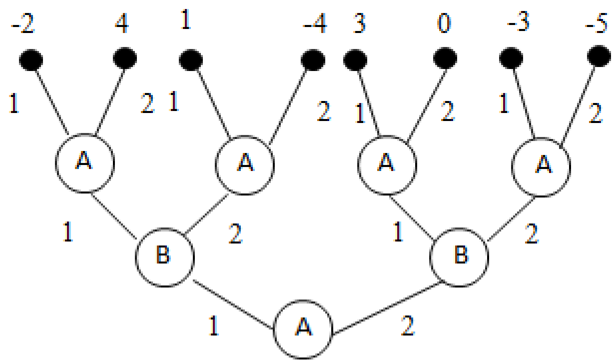
Örnek 5.1.2.5.

I. hamle: A oyuncusu $\{1,2\}$ kümesinden herhangi bir x sayısı seçiyor.

II. hamle: B oyuncusu A oyuncusunun I. hamlesinde ne seçtiğini bilmeden $\{1,2\}$ kümesinden bir y sayısı seçiyor.

III. hamle: A oyuncusu seçilen x ve y değerlerini bilmeden $\{1,2\}$ kümesinden bir z sayısı seçiyor.

Bu durumda oyun ağacı şekil 5.6 ile verilir.



Şekil 5.6. Örnek 5.1.2.5 in oyun ağacı

A oyuncusunun stratejileri

$A_1-(1,1),\ A_2-(1,2),\ A_3-(2,1),\ A_4-(2,2)$

B oyuncusunun stratejileri ise

B_1: $\langle y=1$ sayısını seçmek$\rangle$

B_2: $\langle y = 2$ sayısını seçmek $\rangle$

biçiminde ifade edilir.

Tablo formu

		B_1	B_2
		$y = 1$	$y = 2$
A_1	$(1,1)$	$W(1,1,1)$	$W(1,1,1)$
A_2	$(1,2)$	$W(1,1,2)$	$W(1,1,2)$
A_3	$(2,1)$	$W(2,1,1)$	$W(2,2,1)$
A_4	$(2,2)$	$W(2,1,2)$	$W(2,2,2)$

biçiminde olan bir pozisyonlu oyunun 4×2 lik matris formu ise

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda oyuncuların stratejileri ve oyun değeri

$$S^*_A = \left(\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{1}{3}, 0\right), S^*_B = \left(\frac{4}{9},\ \frac{5}{9}\right) \text{ ve } v = \frac{1}{3}$$

olarak elde edilir.

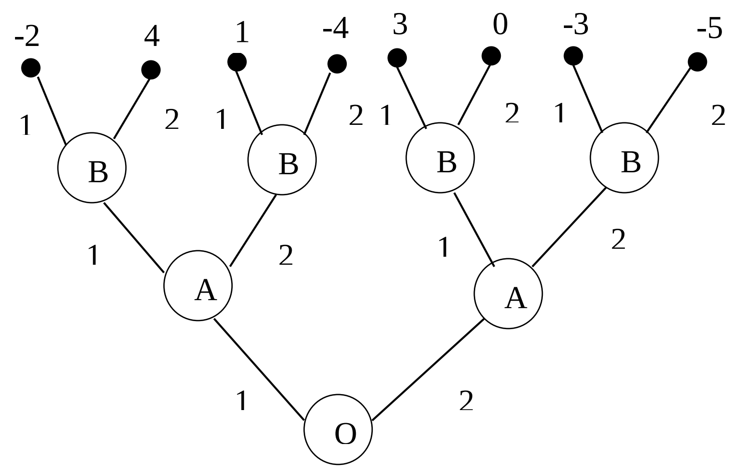
Örnek 5.1.2.6.

I. hamle rastgele yapılır, yani O oyuncusu 0.5 olasılıkla $\{1,2\}$ kümesindeki sayılardan birini seçiyor.

II. hamle: A oyuncusu, I. hamlede rastgele olarak yapılan seçimi bilmeden $\{1,2\}$ kümesinden bir y sayısı seçiyor.

III. hamle: B oyuncusu, I. hamlede rastgele yapılan seçimi bilerek ve II. hamlede A oyuncusunun seçtiği y sayısını bilmeden $\{1,2\}$ kümesinden bir z sayısı seçiyor.

Oyun ağacı şekil 5.7 ile verilir.



Şekil 5.7. Örnek 5.1.2.6 nın oyun ağacı

Oyun ağacından yararlanarak, ağacın dallarını takip ederek düğüm noktalarına ulaştığımızda oyuncuların hamleleri sonucu elde ettikleri getirilere ulaşılır.

Şimdi oyuncuların stratejilerini belirleyelim:

A oyuncusunun, $A_1 - (1)$, $A_1 - (2)$ biçiminde iki stratejsii vardır.

B oyuncusunun stratejisi rastgele yapılan hamledeki bilgi dahilinde belirlenir. Bu stratejiler $z = [z_1,\ z_2]$ biçimindedir. Burada z_1 $(z_1 \in \{1, 2\})$ B oyuncusunun $x = 1$ seçimine uygun, z_2 $(z_2 \in \{1, 2\})$ B oyuncusunun $x = 2$ seçimine uygun stratejisidir. Bu durumda B oyuncusunun dört stratejisi vardır ve bunlar

$B_1 - [1, 1], B_2 - [1, 2], B_3 - [2, 1], B_4 - [2, 2]$.

O halde A oyuncusunun getiri matrisini oluşturalım. Kabul edelim ki, A oyuncusu $A_1 - (1)$, B oyuncusu $B_3 - [2, 1]$ stratejisini seçsin. Burada iki durum söz konusudur.

i) Rastgele yapılan ilk hamlenin $x = 1$ olması durumu:

Burada B_3 stratejisi ile oynayan B oyuncusunun seçimi $x = 2$ ile belirler. A oyuncusunun seçimi ise $y = 1$ ile belirlenir. Sonuçta elde edilen getiri $W(x, y, z) = W(1, 1, 2) = 4$ olur.

ii) Rastgele yapılan hamlenin $x = 2$ olması durumu:

Bu durumda B_3 stratejisi ile oynayan B oyuncusunun seçimi $x = 1$ ile belirler. A oyuncusunun seçimi ise $y = 1$ olduğundan sonuçta elde edilen getiri $W(x, y, z) = W(2, 1, 1) = 3$ olur.

Her bir alternatifi seçme olasılığı 0,5 olduğundan uygulanan stratejiler sonucunda A oyuncusunun elde ettiği getiri (beklenen değeri)

$$4(0{,}5) + 3(0{,}5) = 3{,}5$$

biçiminde hesaplanır. Benzer şekilde diğer getiriler de hesaplanabilir.

Böylece, rastgele yapılan hamlenin $x = 1$ olması durumunda elde edilen getirilerin tablo formu

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A_1	(1)	$W(1,1,1)$	$W(1,1,1)$	$W(1,1,2)$	$W(1,1,2)$
A_2	(2)	$W(1,2,1)$	$W(1,2,1)$	$W(1,2,2)$	$W(1,2,2)$

biçiminde elde edilir.

Matris formu

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Benzer biçimde $x = 2$ için tablo formu

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A_1	(1)	$W(2,1,1)$	$W(2,1,2)$	$W(2,1,1)$	$W(2,1,2)$
A_2	(2)	$W(2,2,1)$	$W(2,2,2)$	$W(2,2,1)$	$W(2,2,2)$

biçiminde elde edilir.

Matris formu

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

A oyuncusu için oluşturulacak ödeme matrisinde oyuncular $A_1 - (1)$ ve $B_1 - [1,2]$ stratejilerini kullandıklarında elde ettikleri getiri matrisin a_{11} elemanıdır ve beklenen ödeme

$0{,}5.W(1,1,1) + 0{,}5.W(2,1,1) = 0{,}5.(-2) + 0{,}5.3 = 0{,}5$

olarak elde edilir ve diğer matris elemanlarına ait ödemeler ise

$0{,}5.W(1,1,1) + 0{,}5.W(2,1,2) = 0{,}5.(-2) + 0{,}5.0 = -1 \longrightarrow a_{12}$

$\vdots$

$0{,}5.W(1,2,2) + 0{,}5.W(2,2,2) = 0{,}5.(-4) + 0{,}5.(-5) = -4{,}5 \longrightarrow a_{24}$

biçiminde elde edilir. Bu durumda oyunun matrisi

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -1 & 3{,}5 & 2 \\ -1 & -2 & -3{,}5 & -4{,}5 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Oyuncuların optimal stratejileri ve oyun değeri

$S^*{}_A = (1, 0)$, $S^*{}_B = (1, 0, 0, 0)$ ve $v = 0{,}5$

olarak elde edilir.

5.2. Aralık Pozisyonlu Oyunlar

Pozisyonlu oyunlar ve çözümleri ile ilgili çalışmalara bir önceki bölümde yer verilmişti. Bu kısımda pozisyonlu oyunlarda önemli bir yere sahip olan ödeme matrisinde her bir bileşen aralık sayıları alınarak, pozisyonlu oyunlara farklı bir bakış açısı kazandırılmaya çalışılmıştır. Söz konusu durumda elde edilen aralık pozisyonlu oyunda lexicographic metod kullanılarak oyunun çözümü üzerine bir inceleme yapılmıştır.

Örnek 5.2.1.

I. hamle: A oyuncusu $\{[1,2], [3,5]\}$ kümesinden x aralık sayısı seçiyor.

II. hamle: B oyuncusu $\{[1,2], [3,5]\}$ kümesinden x e bağlı olmaksızın bir y aralık sayısı seçiyor. A oyuncusunun getiri fonksiyonu W olmak üzere

$W([1,2], [1,2]) = [1,2]$, $W([3,5], [1,2]) = -[3,5] = [-5, -3]$

$W([1,2], [3,5]) = -[1,2] = [-2, -1]$, $W([3,5], [3,5]) = [3,5]$

biçiminde verilir.

A oyuncusunun iki, B oyuncusunun dört stratejisi vardır ve

A_1: $\langle x = [1,2]$ aralık sayısını seçmek $\rangle$

A_2: $\langle x = [3,5]$ aralık sayısını seçmek $\rangle$

$B_1 - [1,1]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y = [1,2]$ aralık sayısını seçmek $\rangle$

$B_2 - [1,2]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y = x$ i seçmek $\rangle$

$B_3 - [2,1]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y \neq x$ i seçmek $\rangle$

$B_4 - [2,2]$ $\langle x$ e bağlı olmadan $y = [3,5]$aralık sayısını seçmek $\rangle$

biçiminde ifade edilir.

Tablo formu

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$([1,2], [1,2])$	$([1,2], [3,5])$	$([3,5], [1,2])$	$([3,5], [3,5])$
A_1	$x = [1,2]$	$W([1,2], [1,2])$	$W([1,2], [1,2])$	$W([1,2], [3,5])$	$W([1,2], [3,5])$
A_2	$x = [3,5]$	$W([3,5], [1,2])$	$W([3,5], [3,5])$	$W([3,5], [1,2])$	$W([3,5], [3,5])$

biçiminde elde edilir.

Matris formu ise

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [1,2] & [-2,-1] & [-2,-1] \\ [-5,-3] & [3,5] & [-5,-3] & [3,5] \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Şimdi elde edilen aralık matrisi için lexicographic metodun adımlarını uygulayalım.

$max\{\upsilon_L\}$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \geq \upsilon_L \\ x_1 + 3x_2 \geq \upsilon_L \\ -2x_1 - 5x_2 \geq \upsilon_L \\ -2x_1 + 3x_2 \geq \upsilon_L \\ 2x_1 - 3x_2 \geq \upsilon_R \\ 2x_1 + 5x_2 \geq \upsilon_R \\ -x_1 - 3x_2 \geq \upsilon_R \\ -x_1 + 5x_2 \geq \upsilon_R \\ \upsilon_L \leq \upsilon_R \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

ve

$min\{\omega_L\}$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 \leq \omega_R \\ -3y_1 + 5y_2 - 3y_3 + 5y_4 \leq \omega_R \\ y_1 + y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq \omega_L \\ -5y_1 + 3y_2 - 5y_3 + 3y_4 \leq \omega_L \\ \omega_L \leq \omega_R \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Simpleks metod yardımıyla

$x_1^0 = 1, x_2^0 = 0, \upsilon_L^0 = -2, \upsilon_R^0 = -1$

$y_1^0 = 0, y_2^0 = 0, y_3^0 = 1, y_4^0 = 0, \omega_L^0 = -2, \omega_R^0 = -1$

olarak bulunur.

(5.1) ve (5.2) ifadelerini gözönüne alarak, Lexicographic metodun 2. adımına karşılık gelen lineer programlama modelleri aşağıdaki biçimde verilir.

$$max\left\{\frac{\upsilon_L+\upsilon_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \geq \upsilon_L \\ x_1 + 3x_2 \geq \upsilon_L \\ -2x_1 - 5x_2 \geq \upsilon_L \\ -2x_1 + 3x_2 \geq \upsilon_L \\ 2x_1 - 3x_2 \geq \upsilon_R \\ 2x_1 + 5x_2 \geq \upsilon_R \\ -x_1 - 3x_2 \geq \upsilon_R \\ -x_1 + 5x_2 \geq \upsilon_R \\ \upsilon_L \leq \upsilon_R \\ \upsilon_L \geq -2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ve

$$min\left\{\frac{\omega_L+\omega_R}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 \leq \omega_R \\ -3y_1 + 5y_2 - 3y_3 + 5y_4 \leq \omega_R \\ y_1 + y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq \omega_L \\ -5y_1 + 3y_2 - 5y_3 + 3y_4 \leq \omega_L \\ \omega_L \leq \omega_R \\ \omega_R \leq -1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Simpleks metod kullanılarak A ve B oyuncuları için elde edilen çözümler sırasıyla $(x_1^*, x_2^*, \upsilon_L^*, \upsilon_R^*)$ ve $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, \omega_L^*, \omega_R^*)$ dir. Burada

$$x_1^* = 1,\ x_2^* = 0,\ \upsilon_L^* = -2,\ \upsilon_R^* = -1$$

$$y_1^* = 0,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 1,\ y_4^* = 0,\ \omega_L^* = -2,\ \omega_R^* = -1$$

olarak elde edilir. Aralık ödemeli pozisyonlu oyunun değeri

$$\bar{v}^* = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} x_i^*[a_{Lij}, a_{Rij}]y_j^* = [-2,-1]$$

olarak bulunur.

5.3. Diferensiyel Oyunlar

Bu bölümde çok adımlı oyunlar sınıfından olan, diferensiyel oyunlar ele alınarak bazı incelemeler yapılmıştır. İncelenecek olan tanımlar ve teoremler (Isaacs, 1965; Friedman, 1968, 1970, 1994; Elliott ve Kalton, 1972) çalışmalarında ayrıntılı biçimde yer almaktadır.

$\mathbb{R}^m$, m boyutlu öklid uzayı olsun. m-tane diferensiyel denklemden oluşan sistemi ele alalım:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y,z)\ t_0 \leq t \leq T \tag{5.3}$$

$$x(t_0) = x_0\ 0 \leq t_0 < T < \infty$$

burada $f(t,x,y,z) = \big(f_1(t,x,y,z),\ f_2(t,x,y,z), \dots, f_m(t,x,y,z)\big)$ ve $y = y(t),\ z = z(t)$ kontrol edicileri sırasıyla Y ve Z'de verilen fonksiyonlardır. Y, Z sırasıyla $\mathbb{R}^p$ ve $\mathbb{R}^q$ uzaylarının kompakt alt kümeleridir. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

i) $f(t,x,y,z)$ fonksiyonu $(t,x,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m \times Y \times Z$ üzerinde süreklidir.

ii) $\forall\, t \in [0,T]$ için $y \in Y, z \in Z$ ve $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere herhangi bir $R > 0$ sayısı için $|x| < R, |\bar{x}| < R$ olduğunda

$$|f(t,x,y,z) - f(t,\bar{x},y,z)| \leq k_1|x - \bar{x}|\ (k_1 \text{ sabit) dir.}$$

iii) $\forall\, t \in [0,T], y \in Y, z \in Z, x \in \mathbb{R}^m$ için

$$|f(t,x,y,z)| \leq k_2|x| + k_3\ (k_2, k_3 \text{ sabit) dir.}$$

(i)-(iii) sağlanırsa, $y = y(t),\ z = z(t)$ kontrol fonksiyonları için (5.3) probleminin $x(t)$ biçiminde tek bir çözümü vardır. $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ kontrollerine karşılık gelen yörünge olarak adlandırılır ve

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), y(s), z(s))\, ds$$

biçiminde ifade edilir.

$x(t)$ yörüngesine karşılık gelen $y(t)$ ve $z(t)$ kontrollerine bağlı ödeme olarak adlandırılan P fonksiyoneli,

$$P(y,z) = g\big(x(t)\big) + \int_{t_0}^{T} h(t, x(t), y(t), z(t))\, dt$$

ile gösterilir. Burada $g(x)$ $\mathbb{R}^m$'de ve $h(t,x,y,z)$ $[0,T] \times \mathbb{R}^m \times Y \times Z$'de sürekli fonksiyonlardır. z oyuncusunun amacı P ödemesini minimize etmeye çalışmak iken y oyuncusunun amacı ise maksimize etmeye çalışmaktır.

Tanım 5.3.1. $\mathcal{M}_1$ I. oyuncu için kontrol fonksiyonların kümesi, $\mathcal{M}_2$ II. oyuncu için kontrol fonksiyonların kümesi olsun. I. oyuncu için herhangi bir

$$\alpha: \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_1$$

dönüşümüne pseudo-strateji denir. Her pseudo-stratejisi

$$u(\alpha) = \inf_{z \in \mathcal{M}_2} P(\alpha z, z)$$

biçiminde tanımlanan bir değere sahiptir. Benzer şekilde, II. oyuncu için $\beta: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$

dönüşümü bir pseudo-strateji olur ve bu pseudo stratejisi

$$v(\beta) = \sup_{y \in \mathcal{M}_1} P(y, \beta y)$$

değerine sahiptir. Dolayısıyla, her $t \in [0, T]$ için $z_1, z_2 \in \mathcal{M}_2$ olmak üzere

$$z_1(t) = z_2(t) \text{ iken } \alpha z_1(t) = \alpha z_2(t)\ 0 \leq t \leq T$$

oluyorsa bu durumda α'ya strateji denir. II. oyuncu için de strateji tanımı benzer şekilde yapılır.

I. oyuncu için bütün stratejilerinin kümesi Γ ve II. oyuncu için bütün stratejilerinin kümesi Δ ile gösterilsin.

$$U = \sup_{\alpha \in \Gamma} u(\alpha)$$

ve

$$V = \inf_{\beta \in \Delta} v(\beta)$$

olsun. Eğer $U = V$ yani

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} \inf_{z \in \mathcal{M}_2} P(\alpha z, z) = \inf_{\beta \in \Delta} \sup_{y \in \mathcal{M}_1} P(y, \beta y)$$

ise oyun değeri mevcuttur. Hiçbir oyuncu V den daha iyi bir sonucu zorlayamaz, her ikisi de ancak V değerini elde edebilir. Şimdi verilecek örnek ise Berkovitz'in "A differential game with no pure strategy solution" adlı çalışmasında $U \neq V$ olduğunu açık bir şekilde gösterir.

Örnek 5.3.2. $Y = Z = [-1, 1]$ ve G dinamik oyunu

$$\frac{dx}{dt} = (y - z)^2$$

ile verilsin. Burada $x \in \mathbb{R}$ dir. Oyunun ödemesi

$$P(y, z) = \int_0^1 x(t)dt$$

dir. I. oyuncu için en iyi strateji α

$$z(t) < 0 \text{ ise } \alpha\big(z(t)\big) = 1$$

$$z(t) \geq 0 \text{ ise } \alpha\big(z(t)\big) = -1$$

iken II. oyuncu için en iyi strateji β

$$\beta\big(y(t)\big) = y(t)$$

olur. I. oyuncu için oyun değeri

$$U = u(\alpha) = P(\alpha(z_0), z_0)$$

olmak üzere burada $z_0(t) = 0$ dır ve

$$\left|\alpha\big(z_0(t)\big) - z_0(t)\right| = |-1| = 1 \Rightarrow (y-z)^2 = \Big(\alpha\big(z_0(t)\big) - z_0(t)\Big)^2 = (-1)^2 = 1$$

$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x = t$ yani $U = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$.

Benzer şekilde, $II.$ oyuncu için oyun değeri

$$\left|y(t) - \beta\big(y(t)\big)\right| = 0 \Rightarrow (y-z)^2 = 0$$

olur ve $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = 0$, bu durumda $V = 0$ dır. Yani, $U \neq V$ dir.

Sonuç olarak, α ve β stratejileri birbirine karşı kullanılamaz. Eğer $I.$ oyuncu α stratejisini kullanmayı seçerken $II.$ oyuncu β stratejisini seçerse, oyun için herhangi bir sonuç belirlenemez yani $\alpha z = y$ ve $\beta y = z$ biçiminde y ve z kontrol fonksiyonları mevcut değildir.

Optimal stratejileri oluşturmak için stratejilerin ve oyun değerin tanımına Friedman tarafından başka bir yaklaşım ortaya konulmuştur (Friedman, 1971).

Friedman Yaklaşımı

Keyfi pozitif bir tamsayı n ve $\delta = \frac{T-t_0}{n}$ olsun. (t_0, T) aralığı δ genişlikli n tane I_j aralığına bölünsün.

$$I_j = \{t \mid t_{j-1} < t \leq t_j, 1 \leq j \leq n\}$$

burada $t_j = t_0 + j\delta$ dir. I_j üzerinde y ve z nin kontrol fonksiyonları sırasıyla Y_j ve Z_j ile gösterilsin. y için δ-üst strateji

$$\Gamma^{\delta,j}: Z_1 \times Y_1 \times \ldots \times Z_{j-1} \times Y_{j-1} \times Z_j \longrightarrow Y_j$$

olmak üzere $\Gamma^\delta = (\Gamma^{\delta,1}, \ldots, \Gamma^{\delta,n})$ vektörü ile tanımlanır. Benzer şekilde, z için δ-üst strateji

$$\Delta^{\delta,j}: Y_1 \times Z_1 \times \ldots \times Y_{j-1} \times Z_{j-1} \times Y_j \longrightarrow Z_j$$

olmak üzere $\Delta^\delta = (\Delta^{\delta,1}, \ldots, \Delta^{\delta,n})$ vektörü ile tanımlanır.

y için δ-alt strateji

$$\Gamma_{\delta,j}: Y_1 \times Z_1 \times \ldots \times Y_{j-1} \times Z_{j-1} \longrightarrow Y_j$$

olmak üzere $\Gamma_\delta = \big(\Gamma_{\delta,1}, \ldots, \Gamma_{\delta,n}\big)$ vektörü ile

z için δ-alt strateji ise

$$\Delta_{\delta,j}: Z_1 \times Y_1 \times \ldots \times Z_{j-1} \times Y_{j-1} \longrightarrow Z_j$$

olmak üzere $\Delta_\delta = \big(\Delta_{\delta,1}, \ldots, \Delta_{\delta,n}\big)$ vektörü ile tanımlanır. $\big(\Delta_\delta, \Gamma^\delta\big)$ ikilisini ele alalım: I_j üzerinde y_j ve z_j bileşenli $y^\delta(t)$, $z_\delta(t)$ kontrol fonksiyonları $z_1 = \Delta_{\delta,1}$, $y_1 = \Gamma^{\delta,1}(z_1)$ olmak üzere

$$z_j = \varDelta_{\delta,j}\left(z_1, y_1, \dots, z_{j-1}, y_{j-1}\right)$$
$$y_j = \varGamma^{\delta,j}\left(z_1, y_1, \dots, z_j\right)\ 2 \leq j \leq n$$

biçiminde belirlenir.

(y^{δ}, z_{δ}) ikilisi $(\varDelta_{\delta}, \varGamma^{\delta})$ biçiminde verilen ikilinin bir bileşeni, strateji küme ikilisinin bir elemanıdır. Kullanılan bu stratejilere karşılık gelen ödeme ise

$$P\left[\varDelta_{\delta}, \varGamma^{\delta}\right] \equiv P\left[\varDelta_{\delta,1}, \varGamma^{\delta,1}, \dots, \varDelta_{\delta,n}, \varGamma^{\delta,n}\right] = P\left(y^{\delta}, z_{\delta}\right)$$

dir.

$G = \left(G^{\delta}, G_{\delta}\right)$ diferensiyel oyununu ele alalım. Burada G^{δ} ve G_{δ} sırasıyla δ-üst oyunu, δ-alt oyunu temsil eder. Her bir oyunun oynanmasına karşılık gelen oyun değerleri ise sırasıyla V^{δ}, V_{δ} dir. Şimdi bu tanımları verelim.

Tanım 5.3.3. $\varGamma^{\delta}$, y için herhangi bir δ-üst strateji ve $\varDelta_{\delta}$ ise z için herhangi bir δ-alt strateji olsun. z oyuncusu oyuna I_1 kümesinden $z_1 = \varDelta_{\delta,1}$ seçerek başlar ve y oyuncusu da $y_1 = \varGamma^{\delta,1}(z_1)$ seçimi ile oyuna devam eder. Genel anlamda, z oyuncusu I_j üzerinde $z_j = \varDelta_{\delta,j}\left(z_1, y_1, \dots, z_{j-1}, y_{j-1}\right)$ seçimini yaptıktan sonra buna karşın y oyuncusu $\mathrm{I_j}$ üzerinde $y_j = \varGamma^{\delta,j}\left(z_1, y_1, \dots, z_j\right)$ seçimini yapar. Bu duruma δ-üst oyun denir ve G^{δ} ile gösterilir. Oyunun ödemesi

$$P\left(y^{\delta}, z_{\delta}\right) \equiv P\left[\varDelta_{\delta}, \varGamma^{\delta}\right] \equiv P\left[\varDelta_{\delta,1}, \varGamma^{\delta,1}, \dots, \varDelta_{\delta,n}, \varGamma^{\delta,n}\right]$$

biçiminde ifade edilir.

G^{δ} oyunun δ-üst değeri

$$V^{\delta} = \inf_{\varDelta_{\delta,1}} \sup_{\varGamma^{\delta,1}} \dots \inf_{\varDelta_{\delta,n}} \sup_{\varGamma^{\delta,n}} P\left[\varDelta_{\delta,1}, \varGamma^{\delta,1}, \dots, \varDelta_{\delta,n}, \varGamma^{\delta,n}\right]$$

V^{δ} ile tanımlanır.

Lemma 5.3.4. (i)-(iii) koşulları sağlansın. O halde,

$$V^{\delta} = \inf_{\varDelta_{\delta}} \sup_{\varGamma^{\delta}} P\left[\varDelta_{\delta}, \varGamma^{\delta}\right] = \sup_{\varGamma^{\delta}} \inf_{\varDelta_{\delta}} P\left[\varDelta_{\delta}, \varGamma^{\delta}\right]$$

biçiminde ifade edilir. Burada

$$\sup_{\varGamma^{\delta}} = \sup_{\varGamma^{\delta,1}} \dots \sup_{\varGamma^{\delta,n}},\ \inf_{\varDelta_{\delta}} = \inf_{\varDelta_{\delta,1}} \dots \inf_{\varDelta_{\delta,n}}$$

dir.

Şimdi G^{δ} in tanımına benzer olarak δ-alt oyunu kavramını tanımlayalım.

Tanım 5.3.5. y oyuncusu I_1 üzerinde $y_1 = \varGamma_{\delta,1}$ i seçerek oyuna başlar daha sonra z oyuncusu I_1 üzerinde $z_1 = \varDelta^{\delta,1}(y_1)$ seçimi ile oyuna devam eder. Genel anlamda, y oyuncusu I_j üzerinde $y_j = \varGamma_{\delta,j}(y_1, z_1, z_2, \dots, z_{j-1})$ biçiminde seçimini yapar ve buna karşın

z oyuncusu I_j üzerinde $z_j = \Delta^{\delta,j}(y_1, \dots, y_j)$ yi seçer. Bu duruma δ-alt oyun denir ve G_δ ile gösterilir. Böylelikle, $y_\delta(t)$ ve $z^\delta(t)$ kontrollerine karşılık gelen yörünge $x_\delta(t)$ olmak üzere oyunun ödemesi

$$P(y_\delta, z^\delta) \equiv P[\Gamma_\delta, \Delta^\delta] \equiv P[\Gamma_{\delta,1}, \Delta^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{\delta,n}, \Delta^{\delta,n}]$$

biçiminde ifade edilir.

G_δ oyunun δ-alt değeri

$$V_\delta = \sup_{\Gamma_{\delta,1}} \inf_{\Delta^{\delta,1}} \dots \sup_{\Gamma_{\delta,n}} \inf_{\Delta^{\delta,n}} P[\Gamma_{\delta,1}, \Delta^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{\delta,n}, \Delta^{\delta,n}]$$

V_δ ile tanımlanır.

Lemma 5.3.6. (i)-(iii) koşulları sağlansın. O halde,

$$V_\delta = \sup_{\Gamma_\delta} \inf_{\Delta^\delta} P[\Gamma_\delta, \Delta^\delta] = \inf_{\Delta^\delta} \sup_{\Gamma_\delta} P[\Gamma_\delta, \Delta^\delta]$$

biçiminde ifade edilir. Burada,

$$\sup_{\Gamma_\delta} = \sup_{\Gamma_{\delta,1}} \dots \sup_{\Gamma_{\delta,n}}, \ \inf_{\Delta^\delta} = \inf_{\Delta^{\delta,1}} \dots \inf_{\Delta^{\delta,n}}$$

dir.

Teorem 5.3.7. [**Friedman (1971)**]

$$V^+ \equiv V^+(t_0, x_0) = \lim_{\delta\to 0} V^\delta,$$
$$V^- \equiv V^-(t_0, x_0) = \lim_{\delta\to 0} V_\delta,$$

limitleri mevcuttur.

Tanım 5.3.8. V^+ ve V^- değerlerine sırasıyla oyunun üst ve alt değerleri denir. Genel olarak,

$$V^+(t_0, x_0) \geq V^-(t_0, x_0) \tag{5.4}$$

dir. (5.4) eşitsizliği sağlanırsa, ortak değer $V(t_0, x_0)$ ile gösterilir ve V'ye oyun değeri denir. Oyun değeri

$$V = V^+ = V^-$$

dir.

Tanım 5.3.9. $\Gamma = \{\Gamma_\delta\}$ dizisine y için bir strateji ve $\Delta = \{\Delta_\delta\}$ dizisine z için bir strateji denir.

Tanım 5.3.10. Eğer keyfi Γ ve Δ stratejileri için $P[\Delta^*, \Gamma^*]$ boş kümeden farklı ve

$$P[\Delta^*, \Gamma] \leq P[\Delta^*, \Gamma^*] = \{V\} \leq P[\Delta, \Gamma^*]$$

oluyorsa, (Δ^*, Γ^*) strateji ikilisine bir denge noktası denir.

Örnek 5.3.11. (Pür stratejilerde çözümü olmayan bir oyun)

$$\dot{x}(t) = 4(y-z)^2, x \in \mathbb{R}^1, 0 \leq t \leq 1$$
$$x(t) = 0$$

denklemi ile tanımlanan ve ödemesi

$$P(y,z) = \int_0^1 x(t)dt$$

ile verilen diferensiyel oyunu ele alalım. Kontrol kümeleri,

$$Y = \{y: 0 \leq y \leq 1\} \text{ ve } Z = \{z: 0 \leq z \leq 1\}$$

dir. Berkovitz örnek 5.3.2'te de olduğu gibi pür stratejilerde oyun değerinin olmadığını göstermişti (Berkovitz, 1964). Şimdi Friedman yaklaşımı ile oyun değerini bulalım.

Öncelikle G_δ oyunu ele alalım. Oyuna önce y oyuncusu $y_j = \Gamma_{\delta,j}(y_1, z_1, z_2, \dots, z_{j-1})$ biçimindeki seçimi ile başlar ve buna karşın z oyuncusu I_j üzerinde $z_j = \Delta^{\delta,j}(y_1, \dots, y_j)$ yi biçimindeki stratejisini seçerek devam eder. z oyuncusunun y karşın en iyi stratejisi $z_j = y_j$ olmalıdır. Bu durumda

$|y_j - z_j| = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ dır ve $P(y,z) = 0$ olur. Yani, $V_\delta = 0$ dır.

G^δ oyununu ele alalım. Burada önce z oyuncusu I_j üzerinde $z_j = \Delta_{\delta,j}(\mathrm{z}_1, \mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{z}_{\mathrm{j}-1}, \mathrm{y}_{\mathrm{j}-1})$ biçiminde seçimini yapar ve sonra buna karşın y oyuncusu $y_j = \Gamma^{\delta,j}(z_1, y_1, \dots, z_j)$ yi seçer. Bu durumda $|y_j - z_j| \geq \frac{1}{2}$ dir.

O halde, $4(y_j - z_j)^2 \geq 1$ olur. $\frac{dx}{dt} \geq 1 \Rightarrow x(t) \geq t$ ve

$P(y,z) = \int_0^1 x(t)dt \geq \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}$

dir. Sonuç olarak, $V^\delta \geq \frac{1}{2}$ dir. O halde, $\delta \to \infty$ için $V^+ \neq V^-$ olduğu kolayca görülür. Bu ise Friedman teorisine göre oyunun değeri olmadığını gösterir (Friedman, 1970). Ancak relaxed kontrol kavramını vererek bu oyunun relax kontrollerde bir denge noktasına sahip olacağını göreceğiz.

Relaxed kontrol kavramı Warga (1967) çalışması ile kontrol teoriye, Elliott ve ark. (1973) çalışmasında ise diferensiyel oyun teorisine tanıtılmıştır. Relax kontroller Elliott ve ark. (1973) çalışmasında detaylı biçimde yer almaktadır.

Tanım 5.3.12. PY ve PZ sırasıyla $Y \subset \mathbb{R}^p$ ve $Z \subset \mathbb{R}^q$ Borel alt kümelerinde tanımlanan tüm düzgün olasılık ölçümlerinin uzayı $T = [0,1]$ olsun. $I.$ oyuncu için

$$\sigma: T \longrightarrow PY$$

fonksiyonuna relaxed kontrol denir. Sürekli reel değerli her $f \in Y$ fonksiyonu için

$\int_Y \ f(u)\sigma(du;t)\ t \in T$ nin sürekli fonksiyonu ise relaxed kontrol süreklidir.

$II.$ oyuncu için relaxed kontrol

$$\tau: T \longrightarrow PZ$$

fonksiyonu ile tanımlanır.

Bu durumda f ve h ın genişletilmiş tanımları

$$f: I \times \mathbb{R}^m \times PY \times PZ \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f_i(t,x,\sigma,\tau) = \int\limits_Z \int\limits_Y f_i(t,x,u,v)\, d\sigma(u) d\tau(v)\ (i = 1, \dots, m)$$

$$h: I \times \mathbb{R}^m \times PY \times PZ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(t,x,\sigma,\tau) = \int\limits_Z \int\limits_Y h(t,x,u,v)\, d\sigma(u) d\tau(v)$$

ile ifade edilir.

Relaxed kontroller, sonlu matris oyunları için von Neumann teoreminde adı geçen karma stratejilerine karşılık gelir.

Y üzerinde ölçülebilir relaxed kontroller kümesini $\varphi(Y)$, Z üzerinde ölçülebilir relaxed kontroller kümesini $\varphi(Z)$ ile gösterelim.

Teorem 5.3.13. $\sigma \in \varphi(\mathrm{Y})$ ölçülebilir relaxed kontrol olsun. $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m$ başlangıç koşullu

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) = \int\limits_Y f(t,x,u)\, \sigma(\mathrm{du};\mathrm{t})$$

diferensiyel denklemin sürekli tek çözümü $x(t)$ dir.

Diferensiyel denklemin çözümünden elde edilen $x(t)$ relaxed yörünge olarak adlandırılır.

Tanım 5.3.14. Eğer $I.$ oyuncu $\sigma(.\,;t)$, $II.$ oyuncu $\tau(.\,;t)$ ile verilen relaxed kontrollerini kullanırlarsa, bu durumda $\dot{x}(t)$ dinamik denklemi

$$\dot{x}(t) = \int\limits_Z \int\limits_Y f(t,x,u,v)\sigma(du;t)\tau(dv;t)$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca, σ ve τ relaxed kontrollerine karşılık gelen ödeme

$$P(\sigma,\tau) = g\big(x(t)\big) + \int\limits_0^1 \int\limits_Y \int\limits_Z h(t,x,u,v)\sigma(du;t)\tau(dv;t)dt$$

biçiminde tanımlanır.

Y üzerinde ölçülebilir relaxed kontroller kümesini $\varphi(Y)$ ile, Z üzerinde ölçülebilir relaxed kontroller kümesini $\varphi(Z)$ ile gösterelim.

Tanım 5.3.15. $\sigma^* \in \varphi(Y)$ ve $\tau^* \in \varphi(Z)$ olsun. Keyfi $\sigma \in \varphi(Y), \tau \in \varphi(Z)$ için

$$P(\sigma^*, \tau) \geq P(\sigma^*, \tau^*) \geq P(\sigma, \tau^*)$$

oluyorsa (σ^*, τ^*) relaxed kontrol ikilisine denge noktası denir.

5.4. Diferensiyel Oyunlarda Boolean Yaklaşımı

Bu kısımda öncelikle Boolean fonksiyonları ve türevleri ile ilgili temel tanımlar, kavramlar ve teoremler için (Encinas ve Rey, 2018; Rey ve ark., 2011; Rosen, 2012; Yablonsky, 1989) çalışmalarından yararlanılmıştır. Daha sonra, diferensiyel oyunda fonksiyonlar Boolean fonksiyonları ile değiştirilip, klasik türev yerine Boolean türevi kullanılarak yeni bir yaklaşım önerilmiştir.

Tanım 5.4.1. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m, \dots\}$ değişkenler kümesi olsun. Tanım kümesi $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ olan $f\left(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}\right)$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $\nu \neq \mu$ ise $u_{i_\nu} \neq u_{i_\mu}$ dir. Eğer değişkenlerin değerleri $\alpha_i \in \mathbb{F}_2$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ olduğunda $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_2$ ise bu tür fonksiyonlara mantık cebiri fonksiyonları ya da Boolean fonksiyonları denir.

Boolean fonksiyonları, daha sade olarak $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ biçiminde de yazılabilir. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin yukarıdaki koşulları sağladığı varsayılır. Bu durumda

$$f: \underbrace{\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \dots \times \mathbb{F}_2}_{n\ defa} = \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$$

dir. 0 ve 1 lerden oluşan birbirinden farklı n boyutlu dizilerin sayısı 2^n dir.

Çizelge 5.1. Boolean değişkenlerinin sıralı n'lilerin kümesi

$x_1 \ \dots \ x_{n-1} \ x_n$	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0 ... 0 0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0 ... 0 1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0 ... 1 0	$f(0, \dots, 1, 0)$
$\vdots$	$\vdots$
1 ... 1 1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Bütün n-değişkenli Boolean fonksiyonların kümesi $\mathcal{BF}_n$ ile gösterilir. n-değişkenli

Boolean fonksiyonların sayısı $|\mathcal{BF}_n| = 2^{2^n}$dir.

Tanım 5.4.2. $f: \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$, n-değişkenli Boolean fonksiyonu olsun. f fonksiyonun i. değişkeni x_i ye göre kısmi türevi

$$D_i f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$$

$$x \to D_i f(x) = f(x) \oplus f(x \oplus e_i)$$

biçiminde tanımlanır yani

$$D_i f(x) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, x_i \oplus 1, \dots, x_n)$$

dir.

Örnek 5.4.3. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ olmak üzere beş değişkenli Boolean fonksiyonu $f(x) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4x_5 \oplus x_1x_3x_4x_5$ ise her bir bileşenine göre türevi

$$D_1 f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \oplus f(x_1 \oplus 1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3x_4x_5$$

$$D_2 f(x) = 1$$

$$D_3 f(x) = 1 \oplus x_1x_4x_5$$

$$D_4 f(x) = x_5 \oplus x_1x_3x_5$$

$$D_5 f(x) = x_4 \oplus x_1x_3x_4$$

olarak hesaplanır.

f Boolean fonksiyonun i. ve j. değişkenine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}(D_i \circ D_j)f(x) &= D_i(D_j f)(x) = D_i f(x) \oplus D_j f(x \oplus e_i) \\ &= f(x) \oplus f(x \oplus e_j) \oplus f(x \oplus e_i) \oplus f(x \oplus e_i \oplus e_j)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 5.4.4. $f: \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ n değişkenli Boolean fonksiyonu olsun. f in $b \in \mathbb{F}_2^n$ ye göre yönlü türevi

$$D_b f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$$

$$x \to D_b f(x) = f(x) \oplus f(x \oplus b)$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 5.4.5. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4$ ve $b = (0, 1, 1, 0)$ dir. O halde,

$$\begin{aligned}D_b f(x) = D_{23} f(x) &= f(x) \oplus f(x \oplus b) \\ &= (x_1 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4) \oplus (x_1 \oplus (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \\ &\quad \oplus (x_3 \oplus 1)x_4 \oplus (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1)x_4) \\ &= 1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_4 \,.\end{aligned}$$

Önerme 5.4.6. $b \in \mathbb{F}_2^n$ ve $a \in \mathbb{F}_2$ olmak üzere f, g n-değişkenli Boolean fonksiyonları ise bu durumda D_b diferensiyel operatörü

1. $D_b(f \oplus g) = D_b(f) \oplus D_b(g)$
2. $D_b(af) = aD_b(f)$
3. $D_b(f \cdot g) = D_b(f) \cdot D_b(g) \oplus f \cdot D_b(g) \oplus g \cdot D_b(f)$

özelliklerini sağlar.

Şimdi diferensiyel oyunda klasik türev yerine Boolean türev kullanarak aşağıdaki biçiminde yeni bir yaklaşım önerebiliriz.

$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{F}_2^m$ ve $f_i \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ olsun. Bu durumda $x \in \mathbb{F}_2^n$ olmak üzere f in Boolean türevi

$$D_i f \colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$$

$$\begin{aligned} D_i f(x) &= f(x) \oplus f(x \oplus e_i) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, x_i \oplus 1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Boolean türev yardımıyla verilen denklemlerin çözümü genelde tek değildir. Bu durumda söz konusu diferensiyel oyunların da çözümü tek olmayacaktır. Örnek 5.4.3'ü ele alacak olursak, aşağıdaki işlemleri yapabiliriz.

$D_2 f(x) = 1$ alırsak, $f_1(x) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_3x_4x_5$

$f_2(x) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3$ fonksiyonları f in x_2'ye göre Boolean türevi 1 olan fonksiyonları olduğundan gözönüne alınan Boolean denklemin çözümünün tek olmadığı anlaşılmaktadır.

Benzer şekilde, f fonksiyonun x_3'ye göre Boolean türevi $1 \oplus x_1x_4x_5$ olan fonksiyonlar:

$f_3(x) = x_3 \oplus x_1x_3x_4x_5$

$f_4(x) = 1 \oplus x_3 \oplus x_4x_5 \oplus x_1x_3x_4x_5$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi Boolean türev ile verilen aşağıdaki sistemi ele alalım.

$D_i f(x) = s(x, f, y, z)$ ve başlangıç koşulu $f(x_0) = f^0$ olsun yani;

$$\begin{cases} f(x) \oplus f(x \oplus e_i) = s(x, f, y, z) \\ f(x_0) = f^0 \end{cases}$$

olmak üzere, burada $f \in \mathbb{F}_2^m$ ve $f_i \in \mathbb{F}_2$ dir. I. oyuncu için kontrol değişkeni $y \in \mathbb{F}_2^p$, II. oyuncu için kontrol değişkeni $z \in \mathbb{F}_2^q$ dir.

Bu durumda Boolean fonksiyonu

$$s \colon \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^m \times \mathbb{F}_2^p \times \mathbb{F}_2^q \to \mathbb{F}_2^m$$

dir. Böylece diferensiyel oyunlarda olduğu gibi tek çözüm koşullarının sağlandığını varsayarak Boolean türevli denklemlerle verilen farklı oyunlar oluşturulabilir. Bu yaklaşıma dayalı olarak bir oyun için gerekli olan sratejiler kümesi ve oyunun ödeme fonksiyonu belirlenerek araştırmalar yapılabilir. Boolean türevli denklemin çözümü $f(x)$'e karşılık gelen $y(x), z(x)$ kontrollerine bağlı ödeme fonksiyonu

$$P(y,z) = g(f(x)) \oplus \underbrace{\bigoplus}_{x \in \mathbb{F}_2^m} h(x, f(x), y(x), z(x))$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $g(f)$ $\mathbb{F}_2^m$'de ve $h(x,f,y,z)$ $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^m \times \mathbb{F}_2^p \times \mathbb{F}_2^q$'de Boolean fonksiyonlarıdır. Diferensiyel bir oyunda, oyunun ödemesi genelde integral yardımıyla verilirken, farklı yaklaşımlarla özel olarak verilen stratejilere bağlı olarak ta tanımlandığı görülmektedir. Bu nedenle, Boolean türevli denklemlerle ifade edilen oyunlar söz konusu olduğunda ödeme fonksiyonu stratejilere bağlı olarak farklı biçimlerde de verilebilir.

BÖLÜM 6
SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde elde edilen sonuçlar özet olarak aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Aralık matris oyunları üzerine incelemeler yapılarak, çözüm yöntemlerinden biri olan Lexicographic metod kullanılmıştır.

Bimatris oyunları ele alınarak baskınlık kriterleri incelenmiştir.

Bimatris oyununda denge stratejileri tanımlanmış, denge ikilisini bulmak için Lemke-Howson algoritması kullanılmış ve grafik yöntem ele alınarak aynı problemin çözümü için araştırmalar yapılmıştır.

Aralık bimatris oyunları ele alınarak, çözümü için Lemke-Howson algoritması uygulanmıştır.

Oyun ağacı yardımıyla verilen pozisyonlu oyunun matris formu oluşturularak örneklerle desteklenmiştir.

Pozisyonlu oyunlarda tam bilgili olma ve olmama durumları ele alınmış, uygun matris formu oluşturularak çözümler elde edilmiştir.

Aralık pozisyonlu oyunlar oluşturulmuş ve çözümü için Lexicographic metod uygulanmıştır.

Diferensiyel oyunlar ele alınarak incelemeler yapılmıştır.

Boolean fonksiyonu, Boolean türev tanımları ele alınmış ve diferensiyel oyunda klasik türev yerine Boolean türevi kullanılarak yeni bir yaklaşım önerilmiştir.

KAYNAKLAR

Ahlatçıoğlu M. ve Tiryaki F., 1998. Oyunlar Teorisi. Yıldız Teknik Uni. Basım-Yayın Mer.

Akyar H. ve Akyar E., 2011. A Graphical Method for Solving Interval Matrix Games. Abstract and Applied Analysis, Doi:10.1155. 1-17.

Aumann R. Ve Hart S., 1994. Handbook of Game Theory with Economic Applications, Volume 2. In: Friedman A. Ed. Differential Games. 781-799.

Bakoğlu H., 1991. Oyun Teorisi. Ege Üni. Basım Evi, 1-42.

Barron E. N., 2008. Game Theory an Introduction. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey. 1-108.

Berkovitz L. D., A Differential Game with No Pure Strategy Solution. Loc. Cit. 175-194.

Collins D. W. ve Hu C., 2005. Fuzzily Determined Interval Matrix Games.

Collins D. W. ve Hu C., 2008. Studying Interval Valued Matrix Games with Fuzzy Logic. Soft Computing. 12, 2: 147-155.

Elliott R. J ve Kalton N. J., 1972. The Existence of Value in Differential Games. American Mathematical Society. Number 126.

Elliott R. J ve Kalton N. J., 1972. Values in Differential Games. Bulletin of the American Mathematical Society. 78 (3): 427-431.

Elliott R. J., Kalton N. ve Markus L., 1973. Saddle Points for Linear Differential Games. SIAM J. Control. 11 (1): 100-112.

Ferguson T. S., 2008. Game Theory. In: Ferguson T. S., Two-Person General Sum Games (Part-III).

Friedman A., 1970. On the Definition of Differential Games and the Existence of Value and of Saddle Points. Journal of Differential Equations. 7: 69-91.

Guseinov K. G., Akyar E. ve Düzce S. A., 2012. Oyun Teorisi: Çatışma ve anlaşmanın matematiksel modelleri. Seçkin Yayınları. 280s.

Hefetz D., Krivelevich M., Stojakovic M. Ve Szabo T., 2014. Positional Games. Springer Basel. 1-19.

Hernandez Encinas L., Martin del Rey A., 2018. Boolean Differential Operators. Turkish Journal of Mathematics. 42: 57-68.

Isaacs R., 1965. Differential Games. John Wiley and Sons, New York, London.

Ishibuchi H. ve Tanaka H., 1990. Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Function. European Journalof Operational Research. 48: 219-225.

Kolobaşkina L. V., 2011. Osnov Teori gr BNOM, Laboratiriya Znaniy (in Russian). 100-130.

Lemke C. ve Howson J. T., 1964. Equilibrium Points of Bimatrix Games. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 12 (2): 413-423.

Li D. F., Nan J. X. ve Zhang M. J., 2010. Interval Programming Models for Matrix Games with Interval Payoffs. Optimization Methods and Software. 1-16.

Li D. F., 2011. Notes On "Linear Programming Technique to Solve Two-Person Matrix Games with Interval Pay-offs". Asia-Pacific Journal of Operational Research, 28 (6): 705-737.

Liu K., 2013. Lemke and Howson Algortihm.

Martin del Rey A., Rodriguez Sanchez G., de la Villa Cuenca A., 2011. On the Boolean Partial Derivatives and Their Composition. Applied Mathematics Letters. 25: 739-744.

Moore R. E., 1979. Method and Application of Interval Analysis. SIAM, Philadelphia. 1-108.

Morris P., 1994. Introduction to Game Theory. New York, Springer-Verlag. 35-115.

Nash J., 1951. Non-Cooperative Games. Annals of Mathematics, 54 (2): 286-295.

Nayak P. K. ve Pal M., 2009. Linear Programming Technique to Solve Two Person Marix Games with Interval Pay-Offs. Asia Pasific Journal of Operational Research 26 (2): 285-305.

Neumann V. J. ve Morgenstern, O., 1967. Theory of Games and Economic Behaviour.

New York, Science Editions, John Wiley and Sons. Inc. Third edition. 85-165.

Owen G., 1995. Game Theory. Academic Press, Inc. 1-85.

Öztürk A., 2012. Yöneylem Araştırması. Ekin Kitabevi Yayını, 14. Baskı, Bursa. 649-677.

Pritchard D., 2011. Game Theory and Algorithm. Lecture 6: The Lemke-Howson Algorithm.

Rosen K. H., 2012. Discrete Mathematics and Its Applications (7th ed.). McGraw-Hill, New York. 641-822.

Sengupta A. ve Pal T. K., 2009. Fuzzy Preference Ordering of Interval Numbers in Decision Problems. Studies in Fuzziness and Soft Computing 238. Springer, Berlin.

Sengupta A., Pal T. K. Ve Chakraborty D., 2001. Interpretation of Inequality Constraints Involving Interval Coefficients and Solution to Interval Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems 119: 129-138.

Warga J., 1967. Functions of relaxed controls. J. SIAM. Series A, Control. 5: 628-641.

Yablonsky S. V., 1989. Introduction to Discrete Mathematics. Mir Publishers, Moscow. 10-30.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gönül Selin SAVAŞKAN

Doğum Yeri : Çan/ Çanakkale

Doğum Tarihi : 11.08.1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü (2007-2011)
Sakarya Üniversitesi Erasmus Programı "Univerzita Hradec Králové-Pedagogická fakulta / Katedra matematiky" Hradec Králové, Çek Cumhuriyeti (2010-Bahar Dönemi)

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ABD (2011-2014)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer

1. Savaşkan G.S., Or A., Hacı Y., "An Analytic Method for Interval Bimatrix Games", Journal of Mathematics and System Science, pp. 66-71, 2016.
2. Or A., Savaşkan G.S., Hacı Y., "Graphical Method for Interval Bimatrix Games," International Journal of Pure and Applied Mathematics, pp. 615-624, 2016.

b) Bildiriler -Uluslararası –Ulusal

1. Savaşkan G.S., Or A., Hacı Y., "Lemke-Howson algorithm for two-person non-zero sum games", International Conference on Pure and Applied Mathematics, Van/ Türkiye, 25-28 Ağustos 2015, pp. 124.
2. Savaşkan G.S., Or A., Hacı Y., "On Positional Games with Interval Pay-Offs", Fifth International Student Research Conference, University of New York in Prague / Czech Republic, 12-13 Mayıs 2017.

3. Savaşkan G.S., Or A., “Lexicographic Method in Interval Positional Games”, International Conference on Mathematical Advance and Applications, Yıldız Teknik Üniversitesi İstanbul/ Türkiye, 11-13 Mayıs 2018, pp. 65.
4. Or A., Savaşkan G.S., “Value of Game for Infinite Matrix Games with Interval Payoffs”. International Conference on Mathematical Advance and Applications, Yıldız Teknik Üniversitesi İstanbul/ Türkiye, 11-13 Mayıs 2018, pp. 64.

İLETİŞİM

E-posta Adresi : gselin.savaskan@gmail.com