T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MİNKOWSKİ 3 −UZAYINDA BERTRAND VE KÜRESEL PH-EĞRİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURCU GÜR SOĞAT

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ

ÇANAKKALE – 2023

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MİNKOWSKİ $3-$UZAYINDA BERTRAND VE KÜRESEL PH-EĞRİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURCU GÜR SOĞAT

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ

Bu çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon kurumu tarafından desteklenmiştir.
Proje No: FYL-2021-3817

ÇANAKKALE – 2023

T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Burcu GÜR SOĞAT tarafından Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ yönetiminde hazırlanan ve **24/08/2023** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**MİNKOWSKİ 3 −UZAYINDA BERTRAND VE KÜRESEL PH-EĞRİLER ÜZERİNE**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ (Danışman)	…………………………
Doç. Dr. Çetin CAMCI	…………………………
Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT	………………………….

Tez No : 10566421

Tez Savunma Tarihi : 24/08/2023

Prof. Dr. Ahmet Evren ERGİNAL

Enstitü Müdürü

24/08/2023

ETİK BEYAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kuralları'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi taahhüt ve beyan ederim.

Burcu GÜR SOĞAT
24/08/2023

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ'e, tezin düzenlenmesinde önemli katkıları olan Doç. Dr. Çetin CAMCI'ya, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen canım eşim Yusuf SOĞAT'a ve son olarak hayatımın her evresinde bana destek olan ve tüm hayatın zorluklarını birlikte göğüslediğimiz, bu hayattaki en büyük şansım olan bitanecik annem Nebahat Gür ve canımın içi babam Yusuf Gür olmak üzere modum düştüğünde sürekli yükselten, dert ortağım ve hayat enerjim olan kız kardeşim Gamze Gür'e ve sevgili eşi Kemal Tülü'ye, evimizin en küçüğü, canımın yarısı erkek kardeşim Veysel Gür'e kısacası değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım."

Bu çalışma Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FYL-2021-3817

Burcu GÜR SOĞAT

Çanakkale, Ağustos 2023

ÖZET

MİNKOWSKİ 3 −UZAYINDA BERTRAND VE KÜRESEL PH-EĞRİLER ÜZERİNE

Burcu GÜR SOĞAT
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet GÜMÜŞ
24/08/2023, 88

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, Öklid 3 −uzayı ve Minkowski 3 −uzayındaki temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Öklid 3 −uzayında Küresel eğriler, Küresel PH-eğriler ve Bertrand PH-eğriler incelenmiş ve ilgili teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, Minkowski 3 −uzayında Küresel PH-eğriler, Bertrand PH-eğriler tanımlanmış, karakterize edilerek örneklendirilmiştir. Son olarak beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Küresel Eğriler, Bertrand Eğriler, PH-eğriler, Öklid Uzayı, Minkowski Uzayı, Bertrand PH-Eğriler

ABSTRACT

ON BERTRAND AND SPHERICAL PH-CURVES
IN MINKOWSKI 3 −SPACE

Burcu GÜR SOĞAT
Çanakkale Onsekiz Mart University
School of Graduate Studies
Master of Science Thesis in Department of Mathematics
Advisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet GÜMÜŞ
24/08/2023, 88

This thesis consists of five chapters. The first section is the introduction. In Section 2, basic concepts in Euclidean 3 −space and Minkowski 3 −space have been given. In Section 3, the spherical curves, spherical PH-curves, Bertrand PH-curves in Minkowski 3 −space are defined, characterized and their properties are examined. In Section 4, the spherical PH-curves and Bertrand PH-curves are defined in Minkowski 3 −space and examples are given. Finally in Section 5, the results and suggestions are mentioned.

Keywords: Spherical Curves, Bertrand Curves, PH-Curves, Euclidean Space, Minkowski Space, Bertrand PH-Curves.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
I	Reel sayılar kümesinin bir açık alt aralığı
$\mathbb{E}^3$	3 −Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{E}^n$	n −Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	3 −Boyutlu Minkowski Uzayı
κ	Bir eğrinin eğriliği
τ	Bir eğrinin torsiyonu (burulması)
$\times$	Öklid uzayında vektörel çarpım
$\wedge$	Minkowski anlamında vektörel çarpım
T	Bir eğrinin teğet vektörü
N	Bir eğrinin normal vektörü
B	Bir eğrinin binormal vektörü
$\lVert\,,\rVert$	Öklid anlamında norm
$\lVert\,,\rVert_L$	Minkowski anlamında norm
$\langle\,,\rangle$	Öklid anlamında iç çarpım
$\langle\,,\rangle_L$	Minkowski anlamında iç çarpım

ŞEKİLLER DİZİNİ

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Eğriler teorisi, diferansiyel geometrinin önemli bir alanıdır ve Bertrand eğrileri, bu alandaki önemli eğrilerden biridir. Fransız matematikçi Saint-Venant, 1845 yılında $3-$boyutlu Öklid uzayda bir eğrinin asli normalleri tarafından üretilen regl yüzeyi üzerinde bulunan iki eğri ve bunların asli normal vektörlerinin lineer olup olmadığı sorusunu gündeme getirmiştir. Daha sonra, bu soru 1850 yılında Joseph Bertrand tarafından cevaplanmıştır. Bertrand'ın çalışmasıyla, belirli koşullar altında α ve α^* eğrilerinin asli normal vektörlerinin lineer olduğu gösterilmiştir. Bertrand eğrileri, 19. Yüzyılda Fransız matematikçi Joseph Bertrand tarafından tanımlanan ve çalışılan eğrilerdir (Bertrand, 1850).

Bertrand, regle yüzeyler üzerindeki eğrileri sınıflandırarak çeşitli sonuçlara ulaşmıştır. Bertrand eğrileri olarak adlandırılan özel eğri sınıfı tanımlamıştır. Bertrand eğrileri, asli normal vektörlerinin lineer olduğu eğrilerdir. Bu özellik, eğrinin belirli bir simetriye sahip olduğunu gösterir ve bu nedenle Bertrand eğrileri, diferansiyel geometri ve eğriler teorisinde ilgi çekici bir konudur.

Bertrand eğrilerinin özellikleri ve karakteri üzerine yapılan çalışmalar, diferansiyel geometri, matematik, fizik ve mekanik gibi alanlarda çeşitli uygulamalara sahiptir. Bu eğrilerin özellikleri ve matematiksel yapıları, genel olarak eğriler teorisi ve diferansiyel geometriyle ilgilenen matematikçilerin ilgisini çekmektedir. Bertrand eğrileri, diferansiyel geometri ve eğriler teorisi çalışmalarında önemli bir yere sahiptir. Bu eğrilerin özellikleri ve matematiksel analizi, eğrilerin şekilleri ve davranışları hakkında daha fazla bilgi sağlar. Ayrıca, Bertrand eğrileri, eğrilerin teğet çemberleri ve birbirleriyle olan ilişkileri gibi konuların incelenmesinde de kullanılır.

Bertrand eğrilerinin en basit örneği, bir daire veya bir düz çizgidir. Ancak, daha karmaşık ve çeşitli Bertrand eğrileri de mevcuttur. Örneğin, elipsler, paraboller, hiperboller, Bernoulli eğrileri ve Cassini eğrileri gibi eğriler Bertrand eğrilerine örnek olarak verilebilir.

Joseph Bertrand, çalışmasında Bertrand eğrilerinin özelliklerini daha ayrıntılı bir şekilde incelemiş ve Bertrand eğri çiftlerini karakterize etmek için gerekli ve yeterli koşulu ortaya koymuştur. Bertrand eğri çifti, belirli bir özelliğe sahip olan iki eğriden oluşur (Bertrand, 1850).

Bertrand'ın elde ettiği karakterizasyon şu şekildedir: $3-$boyutlu Öklid uzayında eğriliği κ ve burulması (torsiyon) τ olan bir α eğrisinin Bertrand eğri çifti olması için gerekli ve yeterli koşul, λ ve μ gibi reel sayılarla ifade edilen katsayılarla aşağıdaki denkliğin geçerli olmasıdır:

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1 \tag{1.1}$$

Burada λ ve μ, eğrinin eğrilik (κ) ve burulma (τ) özellikleri arasında lineer bir ilişki olduğunu ifade eder. Yani, eğer bir α eğrisi (1.1) numaralı denklemi sağlayan λ ve μ değerlerine sahipse, o zaman α eğrisi ve α^* eğrisi (asli normal vektörleri tarafından üretilen ikinci eğri) bir Bertrand eğri çifti oluşturur (Hsiung, 1981).

(1.1) numaralı denklem, Bertrand eğrilerinin özelliklerini ve ilişkilerini açıklayarak bu eğrileri daha iyi anlamamıza yardımcı olur. Bertrand'ın karakterizasyonu, Bertrand eğrilerinin geometrisini ve karakterini daha derinlemesine incelemek ve analiz etmek için önemli bir araç sağlar.

İzumiya ve Takeuchi, Öklid $3-$uzayında, Bertrand eğrilerin küresel eğrilerden nasıl elde edilebileceğini göstermişlerdir. Bu yaklaşım, küresel eğrilerin belirli bir dönme hareketiyle dönüştürülmesiyle Bertrand eğrilerinin elde edilebileceğini göstermektedir. İzumiya ve Takeuchi'nin çalışmaları, özellikle Bertrand eğrilerinin geometrisi ve kökenleriyle ilgilenen matematikçiler ve diferansiyel geometri araştırmacıları için önemli bir kaynaktır. Bu çalışma, Bertrand eğrilerinin farklı türlerini anlama ve küresel eğrilerin bu özel sınıfına nasıl dönüştürülebileceklerine yardımcı olur. Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerden nasıl türetilebileceğiyle ilgili daha fazla ayrıntı ve matematiksel ifadeler, İzumiya ve Takeuchi'nin orijinal çalışmasında bulunabilir. Bu çalışma, Bertrand eğrileri ve diferansiyel geometriyle ilgili daha derinlemesine bir araştırma yapmak isteyenler için ilgi çekici bir kaynaktır (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Murat Babaarslan (2009), yüksek lisans tezinde**,** $\mathbb{R}_1^5, \mathbb{R}_2^4, \mathbb{R}_2^5$ uzaylarında ilk olarak Cartan Çatısı ve Cartan eğrilikleri elde etmiştir. Daha sonra da bu uzaylarda null Bertrand eğrileri tanımlanmış ve karakteristik özelliklerini vermiştir (Babaarslan, 2009).

Gül Güner (2011), yüksek lisans tezinde farklı eğrilerin Bertrand eğrilerine nasıl dönüştürülebileceği ve Bertrand eğrilerinin özellikleri incelenmiştir. Tezde, ilk olarak

3 −boyutlu Öklid uzayında düzlemsel eğrilerden silindirik helisler ve küresel eğrilerden Bertrand eğrilerinin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu metod kullanılarak, bir eğrinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri araştırılmıştır. Ayrıca, bir silindirik helisin düzlemsel evolütü ve bir küresel eğrinin küresel evolütü de incelenmiştir. Daha sonra, tezde Öklid uzayında kullanılan metot Minkowski uzayına taşınmış ve 3 −boyutlu Minkowski uzayında da küresel eğrilerden Bertrand eğrilerinin elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu çalışma, Bertrand eğrilerinin Minkowski uzayında da geçerli olduğunu ve bu uzayda da benzer bir dönüşüm metoduyla elde edilebileceğini göstermektedir. Ayrıca, tezde $\mathbb{E}^3$ uzayında bir küresel eğrinin hiperbolik evolütü de incelenmiştir. Bu evolüt, küresel eğrinin belirli bir değişime uğramasıyla elde edilen yeni bir eğridir. Son olarak, tezde spacelike (uzayımsı) ve timelike (zamanımsı) uzay eğrilerinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri araştırılmıştır. Bu çalışma, farklı uzayımsı geometrilerinde Bertrand eğrilerinin özelliklerini ve dönüşüm metotlarını ele almaktadır. Gül Güner'in tezi, Bertrand eğrileri ve farklı eğriler arasındaki ilişkileri inceleyerek bu konuda önemli bir katkı sunmaktadır. Tezde sunulan metotlar ve bulgular, Bertrand eğrileri üzerine yapılan araştırmalara ve ilgili alanda çalışan araştırmacılara yol gösterebilir (Güner, 2011).

Murat Babaarslan (2013), doktora tezinde Öklid 3 −uzayında ve diğer uzaylarda sabit eğilimli yüzeyler ve bunların uygulamalarına yer verilmiştir. Tezde, Öklid 3 −uzayında Öklid 2 −küresi üzerindeki birim hızlı eğriler için Sabban çatısı ve küresel evolüt kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, Öklid 2 −küresi üzerindeki birim hızlı eğrilerden Bertrand eğrilerinin oluşturulabileceği gösterilmiştir. Bertrand eğrileriyle helisler arasındaki bağlantı da incelenmiştir. Tezde ayrıca, Bertrand eğrilerinin Darboux göstergelerinin küresel evolütlere eşit olduğu ispatlanmıştır. Babaarslan, bir uzay eğrisinin teğetler, asli normaller, binormaller ve Darboux göstergeleri için sabit eğimli yüzeylerin parametrizasyonlarını bulmuş ve bazı sonuçlar elde etmiştir. Sabit eğimli yüzeylerin parametre eğrilerine karşılık gelen Bertrand eğrileri de araştırmıştır. Tezin bir diğer bölümünde, Minkowski 3 −uzayında de Sitter 2 −uzayındaki birim hızlı spacelike eğriler için Lorentz anlamında Sabban çatısı ve de Sitter evolüt kavramları tanımlanmış ve bu eğrilerin invaryantları incelenmiştir. Pseudo-hiperbolik uzayındaki birim hızlı spacelike eğriler için de çalışmalar yapılmıştır. Öklid 3 −uzayında kuaterniyonlar ile sabit eğimli yüzeylerin bağlantıları ve Minkowski 3 −uzayında split kuaterniyonlar ile spacelike sabit eğimli yüzeylerin bağlantıları da tezde araştırılan konular arasındadır. Murat Babaarslan'ın doktora tezi, sabit eğilimli yüzeyler ve

Bertrand eğrileri gibi konuları ele alarak geometri ve matematik alanında önemli bir katkı sağlamaktadır (Babaarslan, 2013).

Fırat Yerlikaya (2013), yüksek lisans tezinde, Bertrand eğrileri, eğilim çizgileri (helisler) ve slant helisler ile ilgili bir literatür özetini sunmaktadır. Tezde, Öklid $3-$uzayında Bertrand eğri çifti ve slant helis kavramları tanıtılarak, bir eğrinin küresel göstergeleri üzerinde durulmaktadır. Bu kavramlar, Bertrand eğrilerinin Öklid uzayında nasıl tanımlanabileceğini ve küresel göstergelerinin nasıl elde edilebileceğini açıklamaktadır. Ayrıca, tezde daha önce tanımlanmış olan timelike Bertrand eğri çifti kavramından yola çıkarak $3-$boyutlu Minkowski uzayında bu eğri çiftlerinin küresel göstergelerinin yeni özellikleri elde edilmiştir. Bu çalışma, Minkowski uzayında Bertrand eğrilerinin küresel göstergeleri üzerine yapılan bir araştırmayı içermektedir. Bertrand eğrileri, eğilim çizgileri ve slant helislerle ilgili literatürdeki gelişmeleri özetlemekte ve bu konulardaki yeni gösterimlerin elde edilmesine katkıda bulunmaktadır. Tezde sunulan bulgular, ilgili alanlarda çalışan araştırmacılar ve matematikçiler için önemli bir kaynak niteliği taşımaktadır (Yerlikaya, 2013).

Gözde Şimşek (2017), yüksek lisans tezinde üç boyutlu Minkowski uzayında Bertrand eğrilerinin nasıl elde edileceğini ve silindirik helislerin genel özelliklerini ele almaktadır. Tezde, Minkowski uzayında timelike veya spacelike bir eğri kullanılarak Bertrand eğrilerinin nasıl elde edildiği gösterilmektedir. Ayrıca, tezde düzlem eğrisinden bir silindirik helisin nasıl elde edildiği problemi de incelenilmiştir. Bu inceleme, düzlem eğrisinin timelike veya spacelike olması durumuna göre yapılmıştır. Bu çalışma, silindirik helislerin genel özelliklerini ve nasıl elde edilebileceğini açıklamaktadır. Minkowski uzayında Bertrand eğrileri ve silindirik helisler üzerine yapılan bir araştırmayı içermektedir (Şimşek, 2017).

Yasemin Irmak (2018), yüksek lisans tezinde Matsuda ve Yorozu'nun $n \geq 4$ boyutlu Öklid uzaylarında klasik anlamda Bertrand eğrisinin olmadığı sonucundan esinlenerek, "$(1,3)-$Bertrand Eğrileri" olarak adlandırılan eğrileri karakterizasyonlarıyla birlikte sunmuştur. Bu eğrilerin özellikleri ve tanımları detaylı olarak açıklanmıştır. $4-$boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik Bertrand eğrileri tanımlanmış ve uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrileri ile ilişkileri incelenmiştir. Bitorsiyonu sıfırdan farklı kuaterniyonik $(N-B_2)$ Bertrand eğrileri de tanımlanmış ve karakterizasyonları verilmiştir. $3-$boyutlu küre üzerindeki Bertrand eğrilerinin karakterizasyonlarını sunmuş ve örneklerle desteklenmiştir. Bu eğrilerin özellikleri ve ilişkileri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, Bertrand eğrileri ile $(1,3)-$Bertrand eğrileri arasındaki ilişkilere de değinilmiştir. $4-$boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrilerinin çeşitli özelliklerini ve geometrik uygulamalarını incelemektedir. Tezde sunulan karakterizasyonlar ve ilişkiler, bu alandaki araştırmalara katkıda bulunmayı hedeflemektedir (Irmak, 2018).

Sezer Çakal (2018), yüksek lisans tezinde $3-$boyutlu Lie gruplarında $AW(k)$ tipinden eğrileri ele almaktadır. Burada $AW(k)$, $(k = 1, 2, 3)$, için değer alabilir. Tezde, Lie gruplarındaki harmonik eğrilik fonksiyonunu kullanarak, bir eğrinin $AW(k)$ tipinden olma şartlarını elde etmektedir. Bu şartlar, $AW(k)$ tipinden eğrilerin tanımlanmasına ve karakterize edilmesine yardımcı olmaktadır. Daha sonra, $AW(k)$ tipinden eğrilerin Helis eğrisi ve Düzlem eğrileriyle olan ilişkileri incelenmektedir. Bu ilişkiler, $AW(k)$ tipinden eğrilerin diğer eğrilerle nasıl ilişkili olduğunu ortaya koymaktadır. Son olarak, tez $AW(3), AW(2)$ ve zayıf $AW(2)$ tipinden eğriler arasındaki ilişkileri $3-$boyutlu Lie gruplarında Bertrand eğrileriyle bağlantı kurarak göstermektedir. Bu bağlantılar, farklı $AW(k)$ tipinden eğrilerin birbirleriyle ilişkisini ve benzerliklerini vurgulamaktadır. $3-$boyutlu Lie gruplarında $AW(k)$ tipinden eğrilerin özelliklerini ve ilişkilerini incelemektedir. Bu çalışma, Lie grupları ve Bertrand eğrileri alanında ileri düzeyde bir araştırma olarak değerlendirilebilir (Çakal, 2018).

Eminenur Kartal (2019), yüksek lisans tezinde genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftlerini incelemektedir. Bu çalışmada, $3-$boyutlu Öklid uzayında beş farklı tipte Bertrand eğri çiftleri üzerinde odaklanılmıştır. Tezde, genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftlerinin farklı tipleri olan $(1,0), (1,1), (2,1)$ ve $(3,0)$ tipleri incelenmiştir. Her bir tipteki Bertrand eğri çiftleri tanımlanmış ve bu eğri çiftleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca, Frenet çatıları arasındaki bağıntı, eğriler arasındaki uzaklık, Frenet vektörleri arasındaki açı ve eğrilik hesaplamaları da yapılmıştır. Bu hesaplamalar, farklı tipteki Bertrand eğri çiftlerinin geometrik özelliklerini ve ilişkilerini belirlemektedir. Özellikle, $(2,0)$ tipi Bertrand eğri çiftinin literatürde en iyi bilinen $3-$boyutlu Öklid uzayındaki Bertrand eğri çiftine eşit olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum, literatürdeki bilgileri doğrulamakta ve farklı tipteki Bertrand eğri çiftleri arasındaki ilişkileri vurgulanmaktadır. Genelleştirilmiş Bertrand eğri çiftlerinin farklı tiplerini incelerken, bu eğri çiftleri arasındaki geometrik ilişkileri ve özellikleri açıklamaktadır (Kartal, 2019).

Semih Işık (2020), yüksek lisans tezinde $4-$boyutlu $2-$indeksli yarı-öklidyen uzayda genelleştirilmiş Bertrand eğrilerini ele almaktadır. Tezde, $4-$boyutlu $2-$indeksli yarı-öklidyen uzayda $(1,3)-$Cartan null eğrileri incelenmiştir. Ayrıca $(1,3)-$pseudo null eğrileri üzerinde de çalışılmıştır. $(1,3)-$normal düzlemin spacelike veya timelike olma durumlarına bağlı olarak elde edilen eğrilerin $(1,3)-$Bertrand eğrileri olduğu ve $(1,3)-$Bertrand eşlenik eğrilerinin casual karakterini ifade eden teoremler elde edilmiştir. Bu teoremler, belirli koşulları sağlayan eğrilerin genelleştirilmiş Bertrand eğrileri olduğunu göstermektedir. Ayrıca, bu eğrilerin $(1,3)-$Bertrand eşlenik eğrilerinin casual karakterine sahip olduğu vurgulanmıştır. Çalışmada ayrıca ilgili örnekler verilmiştir, bu örnekler üzerinden elde edilen sonuçlar teorik çerçeveyi desteklemektedir. Semih Işık'ın yüksek lisans tezi, $4-$boyutlu yarı-öklidyen uzayda genelleştirilmiş Bertrand eğrilerini araştıran bir çalışmadır ve $(1,3)-$Cartan null eğrileri ile $(1,3)-$pseudo null eğrileri üzerinde odaklanmaktadır (Işık, 2020).

Sara Yılmaz Evren (2020), yüksek lisans tezinde, açık $B-$spline eğrileri ve açık NURBS eğrileri üzerinde Bertrand eğrilerini incelemektedir. Tezde, açık B-spline eğrilerinin $t=t_d$ ve $t=t_{(m-d)}$ noktalarında ikinci, üçüncü türevleri ve Frenet vektör alanları ile eğrilikleri verilmektedir. Ayrıca, açık B-spline eğri çiftlerinin Bertrand eğri çifti oluşturması durumunda, ikinci spline eğrisinin kontrol noktalarının birinci spline eğrisinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri sunulmaktadır. Çalışmada, açık NURBS eğrilerinin $t=t_d$ ve $t=t_{(m-d)}$ noktalarında birinci, ikinci ve üçüncü türevleri ile bu noktalarda Frenet vektör alanları ve eğrilikleri ifade edilmektedir. Ayrıca, verilen iki eğrinin NURBS eğrisi olması durumunda, bu iki eğrinin Bertrand eğri çifti oluşturabilme koşulları açıklanmaktadır. Tezdeki çalışmalara örnekler verilerek, Frenet vektör alanları, eğrilikler ve Bertrand çifti oluşturma koşulları sayısal örnekler üzerinde ifade edilmektedir. Bu örnekler, teorik sonuçları somut verilerle desteklemekte ve Bertrand Nurbs eğrileri konusunda anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır (Evren, 2020).

Burhan Bilgin (2020), yüksek lisans tezinde, Minkowski $3-$uzayında zamansı $V-$Bertrand eğri çiftlerini ve ışıksı uzaysı $V-$Bertrand eğri çiftlerini tanımlamakta, karakterize etmekte ve özelliklerini incelemektedir. Tezde, Minkowski $3-$uzayında zamansı $V-$Bertrand eğri çiftleri tanımlanmış ve bu eğri çiftlerinin özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Aynı şekilde, Minkowski $3-$uzayında ışıksı uzaysı $V-$Bertrand eğri çiftleri de tanımlanmış, karakterize edilmiş ve özellikleri üzerinde durulmuştur. Çalışmada,

V −Bertrand eğri çiftlerinin özellikleri üzerine bir tartışma da yapılmaktadır. Bu tartışma, Minkowski 3 −uzayında V −Bertrand eğri çiftlerinin önemini ve diğer eğri çiftleriyle olan ilişkilerini anlamak için değerli bir katkı sağlamaktadır. Burhan Bilgin'in yüksek lisans tezi, Minkowski 3 −uzayında zamansı V −Bertrand eğri çiftleri ve ışıksı uzaysı V −Bertrand eğri çiftleri üzerine odaklanmaktadır. Bu çalışma, ilgili konuda derinlemesine bir analiz sunmakta ve bu eğri çiftlerinin karakterizasyonları ve özellikleri hakkında kapsamlı bir anlayış sağlamaktadır (Bilgin, 2020).

Aslı Aybüke Akdemir (2021), yüksek lisans tezinde, eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatıyı tanımlamakta ve bu çatının matris formunu, çatı elemanlarının vektörel çarpımlarını elde etmektedir. Tezde, yeni tanımlanan eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatının eğrilik ve torsiyonu da tanımlanarak, Serret-Frenet çatı ile eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı arasındaki ilişki incelenmektedir. Bu ilişki üzerinden örnekler verilerek konunun anlaşılması sağlanmaktadır. Eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre küresel eğrilerin geometrik yer denklemi elde edilmiş ve teğet, asli normal ve binormal vektörlerinin katsayıları bulunmuştur. Ayrıca, küresel eğrilerin yarıçapları ile ilgili teoremlere de yer verilmiştir. Çalışmada, eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre Bertrand ve Mannheim eğrileri incelenmiş ve bu yeni çatıya göre bu eğrilerin karakterizasyonları yapılmıştır. Örnekler üzerinden de açıklamalar yapılarak konunun anlaşılması sağlanmıştır. Son olarak, eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre helis ve slant helis eğrileri incelenmiştir. Lancret teoremi ve bir eğrinin helis ve slant helis eğrisi olması için gerekli ve yeterli şartlar teorem olarak ifade edilmiş ve örnekler verilmiştir. Aslı Aybüke Akdemir'in yüksek lisans tezi, eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı üzerine kapsamlı bir çalışma sunmakta ve bu çatının farklı eğrilerle olan ilişkisini, karakterizasyonlarını ve özelliklerini detaylı bir şekilde incelemektedir (Akdemir, 2021).

Pisagor-hodograf (PH) eğrileri, 1990 yılında Farouki ve Sakkalis tarafından tanımlanmıştır (Farouki ve Sakkalis, 1990). Bu eğriler, uzunluğu net olarak hesaplanabilen eğriler olarak bilinir. Farouki'nin çalışmaları, PH-eğrilerinin özelliklerini ve tanımlayıcılarını belirlemeye yöneliktir. Ayrıca, bu eğrilerin helis eğrileri ile olan ilişkisini de araştırmış ve bütün helis eğrilerinin bir PH-eğrisi olduğunu, ancak tersinin her zaman doğru olmadığını ispatlamıştır (Farouki ve Sakkalis, 1992). İki ve üç boyutlu PH-eğrileri için karakterizasyon çalışmaları ise Farouki tarafından kompleks sayılar ve kuartreniyonlar kullanılarak yapılmıştır (Farouki ve Sakkalis, 1994).

Moon, 2000 yılında Pisagor-Hodograf (PH) eğrilerini Minkowski metriğine göre tanımlayarak Minkowski Pisagor-Hodograf (MPH) eğrilerini elde etmiştir. Minkowski metriği, özel görelilik teorisinde uzay ve zamanın dört boyutlu Minkowski uzayında kullanılan bir metriktir. MPH eğrileri, PH eğrilerinin Minkowski uzayında tanımlanan versiyonlarıdır ve bu uzaydaki geometrik özellikleri dikkate alarak tanımlanmışlardır. Steografik izdüşüm, Minkowski uzayındaki bir eğriyi düzlem üzerine yansıtma yöntemidir ve MPH eğrilerinin temsili için kullanılmıştır. Moon'un çalışmaları, PH eğrilerinin Minkowski uzayında geçerli olan versiyonlarını tanımlayarak ve bu eğrilerin temsilini steografik izdüşüm kullanarak sağlamıştır (Moon, 2000).

Çağla Ramis (2013), yüksek lisans tezinde PH-eğrileri ve uygulamaları üzerinde durmuştur. Tez hem iki boyutlu hem de üç boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında PH-eğrilerinin incelenmesine odaklanmıştır. Bu eğrilerin özellikleri, sonuçlar ve formüller elde etmek için araştırılmıştır. Ayrıca, tezde helis eğrileri ile PH-eğrileri arasındaki yakın ilişki üzerinde durulmuştur. Bu ilişkiyi göz önüne alarak, uzaysal bir PH-eğrisinden düzlemsel bir PH-eğrisi üretilmiştir. Bu, PH-eğrilerinin farklı uzaylarda nasıl farklı özelliklere sahip olabileceğini ve bir uzaydan diğerine nasıl dönüştürülebileceğini göstermektedir. Öklid uzayı için elde edilen karakterizasyonlar, Minkowski uzayına da taşınmış ve örneklerle desteklenmiştir. Bu sayede, PH-eğrilerinin Öklid uzayındaki özelliklerinin Minkowski uzayında nasıl geçerli olduğu ve nasıl kullanılabileceği anlaşılmıştır. Bu tez, PH-eğrilerinin farklı uzaylarda ve uygulamalarda nasıl kullanılabileceğini ve özelliklerinin nasıl incelenebileceğini ortaya koymaktadır. Araştırma, PH-eğrilerinin matematiksel analizi ve uygulama alanlarında ilerleme sağlamak isteyenlere önemli bir kaynak olabilir (Ramis, 2013).

Ceylan Yeşilmen (2016), yüksek lisans tezinde, Bezier eğrileri, Minkowski uzayı, PH ve MPH eğrileriyle ilgili temel tanımlar verilmiştir. Tez, $\mathbb{R}^3$ uzayında ve düzlemde Bezier eğrilerinin incelenmesine odaklanmıştır. Bezier eğrilerinin tanımı ve özellikleri açıklanmıştır. Ayrıca, tezde PH ve MPH eğrileriyle ilgili bazı özellikler ve teoremler incelenmiştir. Bu eğrilerin karakteristik özellikleri ve teoremleri üzerinde durulmuştur. PH ve MPH eğrilerinin Minkowski uzayında nasıl tanımlanabileceği ve özelliklerinin neler olduğu araştırılmıştır. Tezde ayrıca, Bezier eğrilerinin bazı örnekleri elde edilmiş ve çizimleri verilmiştir. Bu örnekler, Bezier eğrilerinin nasıl çizilebileceği ve nasıl kullanılabileceği konusunda görsel bir anlatım sunmaktadır. Ceylan Yeşilmen'in tezi, Bezier eğrilerinin Minkowski uzayında karakterizasyonu ve PH, MPH eğrileriyle ilişkisi üzerine detaylı bir çalışma sunmaktadır. Tez, bu konuda ileri düzeyde çalışmak isteyenler için önemli bir kaynak olabilir (Yeşilmen, 2016).

Mustafa Turan (2016), yüksek lisans tezinde, düzlemsel Pisagor-Hodograf (PH) eğrileri incelenmiştir. Ayrıca, $3-$boyutlu reel uzayında Pisagor-Hodograf eğrileri üzerinde araştırmalar yapmıştır. Tezinde, Euler-Rodrigues çatıları üzerinde yoğunlaşmıştır. $3-$boyutlu uzayda Pisagor-Hodograf eğrileriyle ilişkili olarak Euler-Rodrigues çatıları araştırmıştır. Bunun yanı sıra, Rotasyon çatılarını da incelemiştir. Özellikle üçüncü, beşinci ve yedinci dereceden Pisagor-Hodograf eğrileri üzerinde Euler-Rodrigues çatılarının tanımlarını vermiştir. Bu çatılar, eğrilerin özelliklerini ve davranışını tanımlamak için kullanılan matematiksel yapıları ifade etmektedir. Mustafa Turan'ın tezi, PH eğrileriyle Euler-Rodrigues çatıları arasındaki ilişkiyi araştırarak, bu alanda teorik bir çalışma sunmaktadır. $4-$boyutlu Öklid uzayında Pisagor-Hodograf eğrilerin tanımı verilmiş ve bu eğrilerin özellikleri incelenmiştir (Turan, 2016).

Bertrand eğrileri Öklid uzayında yoğun bir çalışma alanı teşkil etmiş ve bu eğriler farklı uzaylarda da çalışılmıştır. Yapılan çalışma, Küresel PH-eğrileri üzerine Öklid $3-$uzayı ve Minkowski $3-$uzayı temelinde bir araştırma içermektedir. Çalışmada, Öklid $3-$uzayında ve Minkowski $3-$uzayında Küresel PH-eğriler çalışılmıştır. Öklid $3-$uzayında Küresel PH-eğrisinin olmadığı ispatlandı ve Minkowski $3-$uzayında küresel PH-eğrilerin varlığı gösterilerek tanımı yapıldı. Ayrıca, Minkowski 3-uzayında Küresel PH-eğrilerine örnekler verildi. Birinci Dereceden Küresel PH-eğrileri, İkinci Dereceden Küresel PH-eğrileri ve Üçüncü Dereceden Küresel PH-eğrileri ortaya koyulmuş olup bu eğrilerle ilgili örneklere yer verilmiştir. Böylece Küresel PH-eğrilerin elde edilmesine yönelik bir metod ortaya koyulmuştur. Bu eğrilerden yola çıkarak Bertrand PH-eğrinin varlığı ispatlanmıştır. Yapılan çalışma, Bertrand eğrileri ve PH-eğrileri üzerine Öklid ve Minkowski uzaylarındaki çalışmaları bir araya getirerek yeni bir perspektif sunmaktadır.

İKİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tezin bu bölümünde, Öklid $3-$uzayında ve Minkowski $3-$uzayında temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir. Bu kavramlar ve teoremler tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerine kaynak olmuştur.

2.1. Öklid $3-$Uzayında Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. V bir vektör uzayı ve $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi de bu vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \tag{2.1}$$

(2.1) numaralı eşitlik $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalerlerinin hepsi sıfır olduğunda sağlanıyorsa $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesine **lineer bağımsızdır** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2. V bir vektör uzayı ve $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi de bu vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall u \in V$ vektörü ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ skalerleri için

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \tag{2.2}$$

oluyorsa $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi V uzayını **gerer** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.3. V bir vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi de bu vektör uzayının bir alt kümesi olsun. $\mathcal{B}$ kümesi;

1. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi lineer bağımsız,

2. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi V uzayını gerer,

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{B}$ kümesine V uzayının bir **bazı (taban)** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.4. $n-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$'de $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^n$ için $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **iç çarpım** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.5. V bir reel iç çarpım uzayı olmak üzere,

$$\|\ \| : V \to \mathbb{R},\ \ \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

dönüşümü V üstünde bir norm belirtir. Özel olarak $V = \mathbb{E}^n$ biçiminde alınırsa $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{E}^n$ için standart Öklid iç çarpımı kullanılarak

$$\|u\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2} \tag{2.3}$$

eşitliği verilir. $\|u\|$ değerine u vektörünün **normu** veya **uzunluğu** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.6. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$d : \mathbb{E}^n x \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \tag{2.4}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.7. $3-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$'de $\forall u=(u_1,u_2,u_3),\ v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{E}^3$ için Öklid vektörel çapımı

$$u\times v=(u_2v_3-v_2u_3,\ u_3v_1-v_3u_1,u_1v_2-v_1u_2) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

Teorem 2.1.1. $\mathbb{E}^n$ uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.8.

$$d:\mathbb{E}^n x\mathbb{E}^n\to\mathbb{R}$$

$$(x,y)\ \longrightarrow\ d(x,y)\ =\ \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ uzayında **Öklid metriği** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.9. $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere,

$$\alpha:\ I\ \longrightarrow\ \mathbb{E}^n$$

$$t\ \longrightarrow\ (\alpha_1(t),\alpha_2(t),\dots,\alpha_n(t))$$

şeklinde tanımlı fonksiyon diferansiyellenebilirse $\alpha(I)$' ya $\mathbb{E}^n$'de (I,α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir **eğri** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.10. $\mathbb{E}^n$'de m eğrisi (I,α) ve (J,β) koordinat fonksiyonları ile tanımlanmış olsun.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow \beta$$

$$s \longrightarrow h(s) = t$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir h fonksiyonuna **parametre değişim fonksiyonu** denir. (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.11. $\mathbb{E}^n$'de α eğrisi parametrik olarak,

$$\alpha : \quad I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t : \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

verilsin ve α eğrisi için;

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

olmak üzere $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{\mathbb{E}^n}(p)$ vektörüne α eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha'(t)$ noktasındaki **hız vektörü** veya **tanjant** vektörü denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.12. $\mathbb{E}^n$'de α eğrisi parametrik olarak,

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinde tanımlansın. α eğrisinin türevi

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\ ,\frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

ve normu

$$\| \alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{d\alpha_i}{dt})^2}$$

olmak üzere

$$\| \alpha'(t)\| : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \| \alpha'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{d\alpha_i}{dt})^2}$$

ile tanımlı fonksiyona **skaler hız fonksiyonu** ve $t\ = t_0$ noktasındaki

$$\| \alpha'(t_0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{d\alpha_i}{dt})^2} \qquad (2.6)$$

reel sayısına da **skaler hız** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.13. $\mathbb{E}^n$'de α eğrisi

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t : \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinde verilmiş olsun. $\forall t_1, t_2 \in I$ için

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \| \alpha'(t) \| dt \qquad (2.7)$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki **yay uzunluğu** denir. (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.14. $\mathbb{E}^n$'de α eğrisi,

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

$$s : \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

ile tanımlansın. Eğer,

$$\| \alpha'(s) \| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri, s parametresine de **yay parametresi** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.15. $\mathbb{E}^n$'de α eğrisi,

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t : \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

ile tanımlansın. Eğer,

$$\| \alpha'(t) \| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \neq 0 \tag{2.8}$$

ise eğriye **regüler eğri** denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.16. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I , α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha' , \alpha'' , \dots , \alpha^r \}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için,

$$\alpha^{(k)} \in \mathrm{Sp}\{\psi\}$$

oluyorsa ψ den elde edilen $\{T, N_1 \dots , N_{r-1}\}$ ortanormal sistemine, M eğrisinin **Serret-Frenet** $\boldsymbol{r}$ **−ayaklı alanı** ve $m \in M$ için $\{T(m), N_1(m), \dots , N_{r-1}(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki **Serret-Frenet** $\boldsymbol{r}$ **−ayaklısı** denir. Her bir N_i, $1 \leq i \leq r$ vektörlerine **Serret-Frenet vektörü** adı verilir (Kreyszig, 1959).

s −yay parametresi olmak üzere $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet 3 −ayaklısı

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

$$s \longrightarrow \alpha(s)$$

$$\mathrm{T(s)} = V_1(s) = \alpha'(s) \tag{2.9}$$

$$\mathrm{N(s)} = V_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}) \tag{2.10}$$

$$\mathrm{B(s)} = V_3(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \tag{2.11}$$

$\mathbb{E}^3$'de m eğrisi (I , α) koordinat komşuluğu ile verilsin. t keyfi bir parametre olmak üzere;

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

$$t : \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Frenet $3-$ ayaklısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere; Eğrinin teğet vektör alanı,

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t) \tag{2.12}$$

eğrinin binormal vektör alanı,

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \tag{2.13}$$

eğrinin asli normal vektör alanı,

$$N(t) = T(t) \wedge B(t) \tag{2.14}$$

olur (Hacısalihoğlu, 2000).

2.2. Minkowski $3-$Uzayında Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.2.1. $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $\forall u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}^3$ için Lorentz anlamında iç çarpım,

$$\langle u, v \rangle_L = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

ile tanımlanır. Bu durumda $(\mathbb{E}^3, \langle\ ,\ \rangle_L)$ ikilisine **$3-$boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı** denir ve $\mathbb{E}_1^3$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. $u \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere eğer;

(i) $\langle u, u \rangle_L > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörüne **spacelike vektör**,

(ii) $\langle u, u \rangle_L < 0$ ise **timelike vektör**,

(iii) $u \neq 0$ olmak üzere $\langle u, u \rangle_L = 0$ ise **lightlike (null) vektör** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. $u \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere,

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$$

reel sayısına u vektörünün **normu** denir. Normu 1 olan vektörlere **birim vektör** denir. Ayrıca:

(i) u spacelike vektör ise $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

(ii) u timelike vektör ise $\|u\| = \sqrt{-\langle u, u \rangle}$

olur (Lopez, 2008).

Tanım 2.2.4. $u, v \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\wedge : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \to \mathbb{R}_1^3$$

olacak şekilde

$$(u, v) \to u \wedge v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & -\boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_2 v_1 - u_1 v_2)$$

şeklinde tanımlanan $'' \wedge ''$ operatörüne **Lorentz anlamında vektörel çarpım** denir.

Öklid $3-$uzayındaki vektörel çarpıma benzer olacak şekilde Lorentz anlamında vektörel çarpımın aşağıdaki gibi özellikleri vardır:

(i) $\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w)$,

(ii) $u \wedge v = -v \wedge u$,

(iii) $(u \wedge v) \wedge w = -\langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u$,

(iv) $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$ ve $\langle u \wedge v, v \rangle = 0$,

(v) $\mathbb{E}_1^3$ deki her u, v, w vektörü için $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5. α, $\mathbb{E}_1^3$**'** de bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere

(i) $\alpha'(t)$ spacelike ise α eğrisine **spacelike**,

(ii) $\alpha'(t)$ timelike ise α eğrisine **timelike**,

(iii) $\alpha'(t)$ lightlike ise α eğrisine **lightlike eğri** denir (Lopez, 2008).

Tanım 2.2.6. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında tanımlanan

$$S_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}_1^3 | {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = 1)\}$$

$$H_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}_1^3 | {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = -1)\}$$

yüzeylerine sırasıyla **de Sitter $2-$uzay** ve **pseudo-hiperbolik uzay** denir (Lopez, 2008).

Teorem 2.2.1. α eğrisinin, $\kappa > 0$ eğriliğine ve τ torsiyonuna sahip $\mathbb{E}_1^3$' de birim hızlı bir timelike eğrisi için;

$T = \alpha'$ birim teğet,

$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ asli normal ve

$B = T \wedge N$ binormal vektör olmak üzere Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir (Lopez 2008).

Teorem 2.2.2. α, $\mathbb{E}_1^3$' de regüler bir timelike eğri olsun. Bu durumda α timelike eğrisinin eğriliği ve torsiyonu

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

şeklindedir (Lopez, 2008).

Teorem 2.2.3. α eğrisinin, $\kappa > 0$ ve τ torsiyonuna sahip $\mathbb{E}_1^3$' de birim hızlı bir spacelike eğrisi için;

$T = \alpha'$ birim teğet,

$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ spacelike asli normal ve

$B = N \wedge T$ binormal vektör olmak üzere Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir (Lopez, 2008).

Teorem 2.2.4. α eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$' de regüler bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α spacelike eğrisinin eğriliği ve torsiyonu

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

şeklindedir (Lopez, 2008).

BÖLÜM 3

ÖKLİD 3 −UZAYINDA KÜRESEL PH-EĞRİLER

3.1. Öklid 3 −Uzayında PH-Eğriler

Tanım 3.1.1. n −boyutlu Öklid uzayında, $\alpha\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ tanımlı olmak üzere $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_{2,}(t), \ldots \alpha_n(t)\big)$ polinom eğrisinin hodografı $\alpha'(t)$ olsun.

$$\|\alpha'(t)\| = \alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \cdots + \alpha_n'(t)^2 = \sigma(t)^2 \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu varsa $\alpha(t)$ eğrisine **Pisagor Hodograf eğri,** kısaca **PH-eğri** denir (Farouki ve Sakkalis, 1994).

Tanım 3.1.2. $n \in N_0$ ve $a_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0 \leq i \leq n$,

$$\alpha(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \, , a_n \neq 0 \tag{3.2}$$

biçimindeki t değişkenine bağlı fonksiyona, $\boldsymbol{n}$**. dereceden bir polinom** denir. $a_0 \neq 0$ ve $0 \leq i \leq n$ olmak üzere $a_i = 0$ ise bu polinoma **sabit polinom** adı verilir (Larson, 2012).

Tanım 3.1.3. n −boyutlu Öklid uzayında $\alpha(t)$ eğrisi,

$$\alpha\colon [a, b] \to E^n$$
$$\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_{2,}(t), \ldots \alpha_n(t)\big)$$

eğrisinin $1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i(t)$ değerleri birer polinom ise $\alpha(t) \in \mathbb{R}[t]$ eğrisine $\boldsymbol{n}$ **−boyutlu polinom eğrisi** denir (Larson, 2012).

Tanım 3.1.4. n −boyutlu Öklid uzayında $\alpha(t)$ eğrisi,

$$\alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_{2,}(t), \dots \alpha_n(t)\right)$$

için,

$$deg(\alpha(t)) = max\{deg(\alpha_1(t)), deg(\alpha_2(t)), \dots, deg(\alpha_n(t))\} \tag{3.3}$$

değerine $\boldsymbol{\alpha}$ **polinom eğrisinin derecesi** denir (Larson, 2012).

Teorem 3.1.1. $a(t), b(t), c(t)$ polinomları olmak üzere,

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$$

Pisagor koşulu $a(t), b(t), c(t)$ polinomları tarafından sağlanması için gerek ve yeterli şart:

$$\begin{aligned} a(t) &= \quad [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \\ b(t) &= \quad 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= \quad [u^2(t) + v^2(t)]w(t) \end{aligned}$$

formunda olacak şekilde $u(t), v(t), w(t)$ polinomları vardır (Ramis, 2013).

3.1.1. Öklid 3 −Uzayında Küresel PH-Eğriler

Bu alt bölümde Öklid 3 − uzayında küresel PH-eğrinin olmadığı Teorem 3.1.1.1 ile gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1.1. $\mathbb{E}^3$ uzayında küresel PH-eğri yoktur.

İspat: $\mathbb{E}^3$ uzayında γ eğrisi $\gamma: I \rightarrow S^2$ küresel PH-eğri olsun. γ PH-eğri olduğu için $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ polinom olmak üzere γ eğrisi,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

şeklinde yazılabilir. γ PH-eğri olduğu için

$$(\dot{\gamma}_1)^2(t) + (\dot{\gamma}_2)^2(t) + (\dot{\gamma}_3)^2(t) = \sigma^2 \tag{3.4}$$

(σ polinom) (3.4) eşitliğini sağlanmalıdır. Ayrıca γ küre üzerinde yatması için

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t) = 1 \tag{3.5}$$

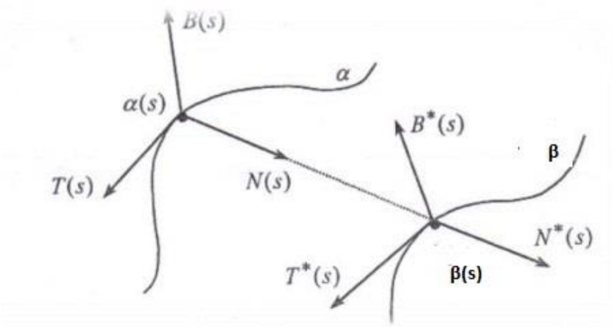
olmalıdır. Bu durumda,

$$deg\{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) + \gamma_3^2(t)\} = max\{deg\,(\gamma_1^2(t), \gamma_2^2(t), \gamma_3^2(t))\} = 0$$

olur. γ derecesi sıfır olduğundan bir nokta belirtir. Sonuç olarak Öklid uzayında küresel PH-eğri yoktur.

3.2. Öklid 3 −Uzayında Bertrand Eğriler

Tanım 3.2.1. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{E}^n$ ve $\alpha^*: \mathrm{I} \to \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir iki eğri olmak üzere bu eğrilerin Frenet çatıları sırası ile $\{\mathrm{T}, N_1, N_2 \dots, N_{n-1}\}$ ve $\{T^*, N_1{}^*, N_2{}^*, \dots, N_{n-1}{}^*\}$ olsun. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $N_1(s)$ asli normal vektörü ile α^* eğrisinin $N_1{}^*(\mathrm{s})$ asli normal vektörü lineer bağımlı ise (α, α^*) ikilisine bir **Bertrand eğri çifti**, α eğrisine de bir **Bertrand eğri** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).



Şekil 1. Bertrand Eğri Çifti

Tanım 3.2.2. Bir $\gamma: I \to S^2$ birim küresel eğrisi σ yay parametresiyle verilmiş olsun. $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\sigma}$ olmak üzere, γ nın σ daki birim teğet vektörü $T(\sigma) = \dot{\gamma}(\sigma)$ ile verilir. $S(\sigma) = \gamma(\sigma) \times T(\sigma)$ şeklinde tanımlanan $S(\sigma)$ vektörü ile birlikte γ boyunca ortonormal bir $\{\gamma(\sigma), T(\sigma), S(\sigma)\}$ çatısı elde edilir. Bu çatıya γ eğrisinin **Sabban Çatısı** denir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Teorem 3.2.1. $\gamma: I \to S^2$ birim küresel eğrisi için küresel Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\gamma}(\sigma) = \quad T(\sigma)$$

$$\dot{T}(\sigma) = \quad -\gamma(\sigma) + K_g(\sigma)S(\sigma)$$

$$\dot{S}(\sigma) = \quad -K_g(\sigma)T(\sigma)$$

Burada $K_g(\sigma)$, γ nın S^2 deki geodezik eğriliği olup $K_g(\sigma) = \det\left(\gamma(\sigma), T(\sigma), \dot{T}(\sigma)\right)$ ile verilir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

İspat: $\{\gamma(\sigma), T(\sigma), S(\sigma)\}$ ortonormal bir çatı olduğundan

$$\begin{array}{ll} \langle \gamma, \gamma \rangle = 1 & \langle \gamma, T \rangle = 0 \\ \langle T, T \rangle = 1 & \langle \gamma, S \rangle = 0 \\ \langle S, S \rangle = 1 & \langle S, T \rangle = 0 \end{array}$$

şeklindedir. Burada a_{ij} katsayıları için $\dot{\gamma}, \dot{T}, \dot{S}$ ortonormal çatıya göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\gamma} = a_{11}\gamma + a_{12}T + a_{13}S$$

$$\dot{T} = a_{21}\gamma + a_{22}T + a_{23}S$$

$$\dot{S} = a_{31}\gamma + a_{32}T + a_{33}S$$

$\dot{\gamma}$ sırasıyla γ, T, S vektör alanları ile çarpıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\dot{\gamma} = a_{11}\gamma + a_{12}T + a_{13}S$$

denklemi γ ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = \langle a_{11}\gamma + a_{12}T + a_{13}S, \gamma \rangle$$

$$\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = a_{11} \underbrace{\langle \gamma, \gamma \rangle}_{1} + a_{12} \underbrace{\langle T, \gamma \rangle}_{0} + a_{13} \underbrace{\langle S, \gamma \rangle}_{0}$$

$$\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = a_{11} \qquad (\dot{\gamma} = T)$$

$$\langle T, \gamma \rangle = a_{11}$$

$$0 = a_{11}$$

olur.

$$\dot{\gamma} = a_{11}\gamma + a_{12}T + a_{13}S$$

denklemi T ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{\gamma}, T \rangle = \langle a_{11}\gamma + a_{12}T + a_{13}S, T \rangle$$

$$\langle \dot{\gamma}, T \rangle = a_{11} \underbrace{\langle \gamma, T \rangle}_{0} + a_{12} \underbrace{\langle T, T \rangle}_{1} + a_{13} \underbrace{\langle S, T \rangle}_{0}$$

$$\langle \dot{\gamma}, T \rangle = a_{12} \qquad (\dot{\gamma} = T)$$

$$\langle T, T \rangle = a_{12}$$

$$1 = a_{12}$$

elde edilir.

$$\dot{\gamma} = a_{11}\gamma + a_{12}T + a_{13}S$$

denklemi S ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{\gamma}, S \rangle = \langle a_{11}\gamma + a_{12}T + a_{13}S, S \rangle$$

$$\langle \dot{\gamma}, S \rangle = a_{11} \underbrace{\langle \gamma, S \rangle}_{0} + a_{12} \underbrace{\langle T, S \rangle}_{0} + a_{13} \underbrace{\langle S, S \rangle}_{1}$$

$$\langle \dot{\gamma}, S \rangle = a_{13} \qquad (\dot{\gamma} = T)$$

$$\langle T, S \rangle = a_{13}$$

$$0 = a_{13}$$

elde edilir.

O halde $\dot{T}$ sırasıyla γ, T, S vektör alanları ile çarpıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\dot{T} = a_{21}\gamma + a_{22}T + a_{23}S$$

denklemi γ ile iç çarpım yapıldığında:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{T}, \gamma \rangle &= \langle a_{21}\gamma + a_{22}T + a_{23}S, \gamma \rangle \\
\langle \dot{T}, \gamma \rangle &= a_{21} \underbrace{\langle \gamma, \gamma \rangle}_{1} + a_{22} \underbrace{\langle T, \gamma \rangle}_{0} + a_{23} \underbrace{\langle S, \gamma \rangle}_{0} \\
\langle \dot{T}, \gamma \rangle &= a_{21}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\langle T, \gamma \rangle &= 0 \\
\langle \dot{T}, \gamma \rangle + \langle T, \dot{\gamma} \rangle &= 0 \qquad (\dot{\gamma} = T) \\
\langle \dot{T}, \gamma \rangle + \underbrace{\langle T, T \rangle}_{1} &= 0 \\
\langle \dot{T}, \gamma \rangle &= -1
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\dot{T} = a_{21}\gamma + a_{22}T + a_{23}S$$

denklemi T ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{T}, T \rangle = \langle a_{21}\gamma + a_{22}T + a_{23}S, T \rangle$$

$$\langle \dot{T}, T \rangle = a_{21} \underbrace{\langle \gamma, T \rangle}_{0} + a_{22} \underbrace{\langle T, T \rangle}_{1} + a_{23} \underbrace{\langle S, T \rangle}_{0}$$

$$\langle \dot{T}, T \rangle = a_{22}$$

bulunur.

$$\langle T, T \rangle = 1$$

$$\langle \dot{T}, T \rangle + \langle T, \dot{T} \rangle = 0$$

$$2\langle \dot{T}, T \rangle = 0$$

$$\langle \dot{T}, T \rangle = 0$$

$$a_{22} = 0$$

olur.

$$\dot{T} = a_{21}\gamma + a_{22}T + a_{23}S$$

denklemi S ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{T}, S \rangle = \langle a_{21}\gamma + a_{22}T + a_{23}S, S \rangle$$

$$\langle \dot{T}, S \rangle = a_{21} \underbrace{\langle \gamma, S \rangle}_{0} + a_{22} \underbrace{\langle T, S \rangle}_{0} + a_{23} \underbrace{\langle S, S \rangle}_{1}$$

$$\langle \dot{T}, S \rangle = a_{23}$$

$$\langle T, S \rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle \dot{T}, S \rangle}_{a_{23}} + \underbrace{\langle T, \dot{S} \rangle}_{a_{32}} = 0$$

olur. Bu şekilde kalır.

O halde $\dot{S}$ sırasıyla γ, T, S vektör alanları ile çarpıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\dot{S} = a_{31}\gamma + a_{32}T + a_{33}S$$

denklemi γ ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{S}, \gamma \rangle = \langle a_{31}\gamma + a_{32}T + a_{33}S, \gamma \rangle$$

$$\langle \dot{S}, \gamma \rangle = a_{31} \underbrace{\langle \gamma, \gamma \rangle}_{1} + a_{32} \underbrace{\langle T, \gamma \rangle}_{0} + a_{33} \underbrace{\langle S, \gamma \rangle}_{0}$$

$$\langle \dot{S}, \gamma \rangle = a_{31}$$

bulunur.

$$\langle \gamma, S \rangle = 0$$

$$\langle \dot{\gamma}, S \rangle + \langle \gamma, \dot{S} \rangle = 0 \qquad (\dot{\gamma} = T)$$

$$\underbrace{\langle T, S \rangle}_{0} + \langle \gamma, \dot{S} \rangle = 0$$

$$\langle \gamma, \dot{S} \rangle = 0$$

$$a_{31} = 0$$

olur.

$$\dot{S} = a_{31}\gamma + a_{32}T + a_{33}S$$

denklemi T ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{S}, T \rangle = \langle a_{31}\gamma + a_{32}T + a_{33}S, T \rangle$$

$$\langle \dot{S}, T \rangle = a_{31} \underbrace{\langle \gamma, T \rangle}_{0} + a_{32} \underbrace{\langle T, T \rangle}_{1} + a_{33} \underbrace{\langle S, T \rangle}_{0}$$

$$\langle \dot{S}, T \rangle = a_{32}$$

olur.

$$\dot{S} = a_{31}\gamma + a_{32}T + a_{33}S$$

denklemi S ile iç çarpım yapıldığında:

$$\langle \dot{S}, S \rangle = \langle a_{31}\gamma + a_{32}T + a_{33}S, S \rangle$$

$$\langle \dot{S}, S \rangle = a_{31}\underbrace{\langle \gamma, S \rangle}_{0} + a_{32}\underbrace{\langle T, S \rangle}_{0} + a_{33}\underbrace{\langle S, S \rangle}_{1}$$

$$\langle \dot{S}, S \rangle = a_{33}$$

bulunur.

$$\langle S, S \rangle = 1$$

$$\langle \dot{S}, S \rangle + \langle S, \dot{S} \rangle = 0$$

$$2\langle S, \dot{S} \rangle = 0$$

$$a_{33} = 0$$

elde edilir. Bulunan veriler yerine yazıldığında:

$$\dot{\gamma} = T$$

$$\dot{T} = -\gamma + a_{23}S$$

$$\dot{S} = a_{32}T$$

elde edilir. Çatının yazılabilmesi için bir tanıma ihtiyaç duyulur.

Tanım 3.2.3. $a_{32} = -\kappa_g$ olmak üzere

$\kappa_g = \kappa_g(s)$ fonksiyonuna γ eğrisinin **jeodezik eğriliği** denir.

Sonuç olarak:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= T\\ \dot{T} &= -\gamma + \kappa_g S\\ \dot{S} &= -\kappa_g T\end{aligned}$$

elde edilir.Böylece,

$$\begin{aligned}\langle \dot{T}, S\rangle &= a_{23} && = \kappa_g\\ \langle \dot{T}, S\rangle &= \langle \dot{T}, \gamma \wedge T\rangle && = \det(\dot{T}, \gamma, T)\\ \langle \dot{T}, S\rangle &= -\det(\gamma, \dot{T}, T) &&\\ \kappa_g &= \langle \dot{T}, S\rangle && = \det(\gamma, T, \dot{T})\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\kappa_g = \det(\gamma, T, \dot{T})$$

eşitliği sağlanır (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Teorem 3.2.2. Bir $\gamma(\sigma)$ birim hızlı küresel eğrisi verildiğinde,

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(v)dv + a\cot\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} S(v)dv + c \tag{3.6}$$

ile tanımlanan $\tilde{\gamma}(\sigma)$ uzay eğrisi bir Bertrand eğrisidir, ayrıca tüm Bertrand eğrileri bu metodla inşa edilebilir. Burada a ve θ sabit sayılar, c sabit vektördür (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

3.3. Öklid 3 −Uzayında Bertrand PH-Eğriler

Teorem 3.1.1.1. de görüldüğü gibi Öklid uzayında küresel PH-eğri olmadığı için Teorem 3.2.2. deki metotla elde edilebilen Bertrand PH-eğri yoktur. Bu çalışma Minkowski uzayına taşındığında küresel PH-eğrinin varlığı görüldü. Böylece Minkowski uzayında küresel PH-eğriler ve Bertrand PH-eğriler üzerine çalışıldı.

BÖLÜM 4

MİNKOWSKİ 3 $-$UZAYINDA KÜRESEL PH-EĞRİLER

4.1. Minkowski 3 $-$Uzayında PH-Eğriler

Tanım 4.1.1. $\mathbb{E}_1^n$' de

$$\alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_{2,}(t), \ldots \alpha_n(t)\right)$$

eğrisinin hodografı

$$\alpha'(t) = \alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \ldots + \alpha_{n-1}'(t)^2 - \alpha_n'(t)^2 = \sigma(t)^2 \qquad (4.1)$$

olacak şekilde bir $\sigma(t)$ polinomu mevcutsa $\alpha(t)$ eğrisine **Minkowski Pisagor Hodograf eğri** ya da kısaca **MPH-eğri** denir (Moon 1999).

Sonuç 4.1.1. $\mathbb{E}_1^n$' de bütün null eğriler MPH eğridir (Moon 1999).

İspat: $\mathbb{E}_1^n$' de $\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_{2,}(t), \ldots \gamma_n(t)\right)$ null eğri olsun. $\gamma(t)$ eğrisi null ise

$$\begin{aligned} g\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\right) &= \langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \rangle \\ &= \dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2 + \ldots + \dot{\gamma}_{n-1}(t)^2 - \dot{\gamma}_n(t)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bir eğrinin MPH olabilmesi için:

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2 + \dots + \dot{\gamma}_{n-1}(t)^2 - \dot{\gamma}_n(t)^2 = \sigma(t)^2 \qquad (4.2)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $\sigma(t)$ polinomu vardır. Null eğri olduğu için $\sigma(t)^2 = 0$ eşitliği ortaya çıkar. Buradan σ sıfır polinomu olur. Böylece bütün null eğriler MPH-eğri olur.

Sonuç 4.1.2. $\mathbb{E}_1^n$' de timelike MPH eğri yoktur (Moon, 1999).

İspat: $\mathbb{E}_1^n$' de $\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_{2,}(t), \dots \gamma_n(t)\right)$ timelike MPH-eğrisini ele alalım. Eğer timelike $\gamma(t)$ eğrisi MPH-eğrisi ise

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2 + \dots + \dot{\gamma}_{n-1}(t)^2 - \dot{\gamma}_n(t)^2 = \sigma(t)^2 \qquad (4.3)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $\sigma(t)$ polinomu vardır.

Diğer taraftan:

$$\begin{aligned} g\left(\dot{\hat{\gamma}}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t)\right) &= \langle \dot{\hat{\gamma}}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t) \rangle \\ &= \dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2 + \dots + \dot{\gamma}_{n-1}(t)^2 - \dot{\gamma}_n(t)^2 \\ &= \sigma(t)^2 \end{aligned}$$

olur. Bu durum timelike olması ile çelişir.

$\mathbb{E}_1^n$' de timelike MPH-eğri yoktur. O halde timelike Bertrand PH-eğri de yoktur.

4.2. Minkowski 3 −Uzayında Küresel PH-Eğriler

Tanım 4.2.1. $\mathbb{E}_1^3$' de γ eğrisi MPH-eğri olsun. γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$' de küre üzerinde yatıyorsa γ eğrisine **küresel PH-eğri** denir.

γ eğrisi küresel PH-eğri olduğundan bileşenleri de birer polinomdur. Küresel PH-eğriler derecelerine göre sınıflandırılarak aşağıdaki incelemeler yapılmıştır.

4.2.1. Birinci Dereceden Küresel PH-Eğriler

Teorem 4.2.1.1. $\mathbb{E}_1^3$' de S_1^2 küresi üzerinde yatan birinci dereceden küresel PH-eğriler null eğrilerdir.

İspat: γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'de bir küresel PH-eğri olsun. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ şeklinde bileşenleri ile ifade edildiğinde küre üzerinde yatması için,

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1 \tag{4.4}$$

(4.4) eşitliğini sağlaması gerekir. Ayrıca PH-eğri olduğundan dolayı

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2 \tag{4.5}$$

(4.5) denklemi sağlanmalıdır. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ birinci dereceden polinomlar olduklarından

$$\gamma_1(t) = a_1 t + a_0$$

$$\gamma_2(t) = b_1 t + b_0$$

$$\gamma_3(t) = c_1 t + c_0$$

$a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılabilir. (4.4) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerine yazıldığında,

$$(a_1 t + a_0)^2 + (b_1 t + b_0)^2 - (c_1 t + c_0)^2 = 1 \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) denkleminde gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$a_1^2 t^2 + 2a_1 a_0 t + a_0^2 + b_1^2 t^2 + 2b_1 b_0 t + b_0^2 - c_1^2 t^2 - 2c_1 c_0 t - c_0^2 = 1$$

eşitliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = 0 \tag{4.7}$$

$$a_1 a_0 + b_1 b_0 - c_1 c_0 = 0 \tag{4.8}$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = 1 \tag{4.9}$$

(4.5) denklemi için $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ ifadeleri hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1 = a_1, \quad \dot{\gamma}_2 = b_1, \quad \dot{\gamma}_3 = c_1$$

elde edilir. (4.5) denkleminden

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2$$

olur.

(4.7) eşitliğinden

$$\underbrace{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}_{0} \quad = \quad \sigma^2$$

$$0 \quad = \quad \sigma^2$$

olur. Sonuç olarak birinci dereceden S_1^2 küresi üzerinde yatan küresel PH-eğriler null eğrilerdir.

Örnek 4.2.1.1. $\mathbb{E}_1^3$' de bir γ eğrisi birinci dereceden S_1^2 küresi üzerinde yatan küresel PH-eğri ve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ olmak üzere

$$\gamma_1(t) = 3t + 4$$

$$\gamma_2\,(t) = 4t + 7$$

$$\gamma_3\,(t) = 5t + 8$$

ifadeleriyle tanımlansın. Küresel eğri olma şartı $\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$ için $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ yerlerine yazıldığında

$$(3t + 4)^2 + (4t + 7)^2 - (5t + 8)^2 = 1$$

ve

$$9t^2 + 24t + 16 + 16t^2 + 56t + 49 - 25t^2 - 80t - 64 = 1$$

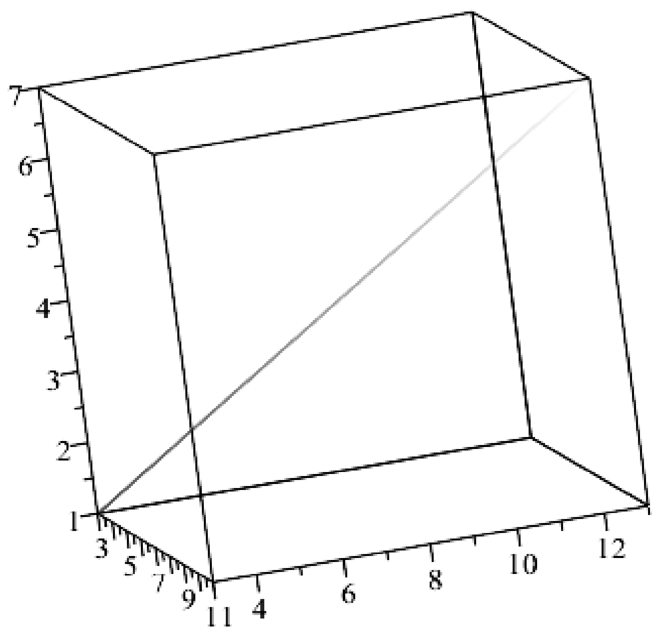
elde edilir. PH-eğri olması için $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği sağlanmalıdır. Bunun hesaplanabilmesi için önce $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında,

$$\dot{\gamma}_1 = 3, \quad \dot{\gamma}_2 = 4, \quad \dot{\gamma}_3 = 5$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 - 5^2 &= \sigma^2 \\ 0 &= \sigma^2 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece γ eğrisinin null eğri olduğu görülür. γ eğrisi aynı zamanda bir doğru belirtir.



Şekil 2. γ Birinci Dereceden Null Küresel PH-eğrisi

Teorem 4.2.1.2. $\mathbb{E}_1^3$' de H_1^2 küresi üzerinde yatan birinci dereceden küresel PH-eğriler null eğrilerdir.

İspat: γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$' de H_1^2 küresi üzerinde yatan bir küresel PH-eğri olsun. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ şeklinde bileşenleri ile ifade edildiğinde küre üzerinde yatması için,

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = -1 \tag{4.10}$$

(4.10) eşitliğini sağlaması gerekir. Ayrıca PH-eğri olduğundan dolayı

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2 \tag{4.11}$$

(4.11) denklemi sağlanmalıdır. $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ birinci dereceden polinomlar olduklarından

$$\gamma_1(t) = a_1 t + a_0$$

$$\gamma_2(t) = b_1 t + b_0$$

$$\gamma_3(t) = c_1 t + c_0$$

$a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılır. (4.10) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerine yazıldığında

$$(a_1 t + a_0)^2 + (b_1 t + b_0)^2 - (c_1 t + c_0)^2 = -1 \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) denkleminde gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$a_1^2t^2 + 2a_1a_0t + a_0^2 + b_1^2t^2 + 2b_1b_0t + b_0^2 - c_1^2t^2 - 2c_1c_0t - c_0^2 = -1$$

eşitliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = 0 \tag{4.13}$$

$$a_1a_0 + b_1b_0 - c_1c_0 = 0 \tag{4.14}$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = -1 \tag{4.15}$$

(4.11) denklemi için $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ ifadeleri hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1 = a_1, \quad \dot{\gamma}_2 = b_1, \quad \dot{\gamma}_3 = c_1$$

elde edilir. (4.11) denkleminden

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2$$

olur. (4.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \underbrace{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}_{0} &= \sigma^2 \\ \sigma &= 0 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak birinci dereceden H_1^2 küresi üzerinde yatan küresel PH-eğriler null eğrilerdir.

4.2.2. İkinci Dereceden Küresel PH-Eğriler

Teorem 4.2.2.1. γ_1 ikinci dereceden bir polinom olmak üzere; $\mathbb{E}_1^3$' de S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden $\gamma = (\gamma_1, 1, \gamma_1)$ eğrisi null küresel PH-eğridir.

İspat: γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$' de S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğri olsun. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ şeklinde bileşenleri ile ifade edildiğinde S_1^2 küre üzerinde yatması için,

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1 \tag{4.16}$$

(4.16) eşitliğini sağlaması gerekir. Ayrıca PH-eğri olduğundan dolayı

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2 \tag{4.17}$$

(4.17) denklemi sağlanmalıdır. $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ ikinci dereceden polinomlar olduklarından

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \quad a_2t^2 + a_1t + a_0 \\ \gamma_2(t) &= \quad 1 \\ \gamma_3(t) &= \quad a_2t^2 + a_1t + a_0 \end{aligned}$$

$a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılır. (4.16) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ yerine yazıldığında

$$(a_2t^2 + a_1t + a_0)^2 + 1^2 - (a_2t^2 + a_1t + a_0)^2 = 1 \tag{4.18}$$

elde edilir. γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel eğridir. (4.17) denklemi için $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ ifadeleri hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1(t) = \quad 2a_2t + a_1$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = \quad 0$$

$$\dot{\gamma}_3(t) = \quad 2a_2t + a_1$$

elde edilir.

(4.17) denkleminden

$$(2a_2t + a_1)^2 + \ 0^2 - (2a_2t + a_1)^2 = \quad \sigma^2$$

$$0 = \quad \sigma^2$$

olur. γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğridir ve nulldur. γ eğrisi aynı zamanda bir doğru belirtir.

Örnek 4.2.2.1. $\mathbb{E}_1^3$' de bir γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ olmak üzere

$$\gamma_1(t) = \quad 3t^2 + 2t + 1$$

$$\gamma_2(t) = \quad 1$$

$$\gamma_3(t) = \quad 3t^2 + 2t + 1$$

ifadeleriyle tanımlansın. Küresel eğri olma şartı $\gamma_1^2(t) + \ \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$ için $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerlerine yazıldığında

$$(3t^2 + 2t + 1)^2 + (1)^2 - (3t^2 + 2t + 1)^2 = 1$$

ve

$$9t^4 + 4t^2 + 1 + 12t^3 + 6t^2 + 4t + \ 1 - 9t^4 + 4t^2 + 1 + 12t^3 + 6t^2 + 4t = 1$$

elde edilir.

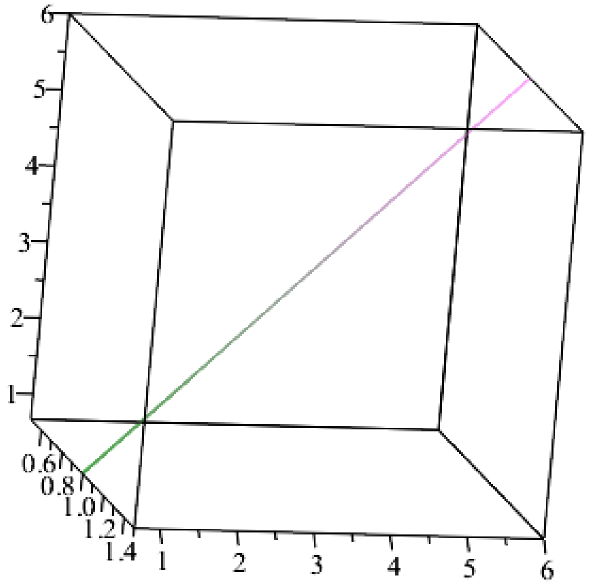
PH-eğri olması için $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği sağlanmalıdır. Bunun hesaplanabilmesi için önce $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= 6t + 2 \\ \dot{\gamma}_2 &= 0 \\ \dot{\gamma}_3 &= 6t + 2 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} (6t+2)^2 + (0)^2 - (6t+2)^2 &= \sigma^2 \\ 36t^2 + 24t + 4 + 0 - 36t^2 - 24t - 4 &= \sigma^2 \\ 0 &= \sigma^2 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani ikinci dereceden küresel PH-eğrisi olan γ eğrisi $\sigma = 0$ olduğundan null eğri olur. γ eğrisi aynı zamanda bir doğru belirtir.



Şekil 3. γ İkinci Dereceden Null Küresel PH-eğrisi

Teorem 4.2.2.2. $\mathbb{E}_1^3$' de S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisi

$$\gamma_1(t) = \quad a_1 t + \frac{a_1 b_1}{2c_2}$$

$$\gamma_2(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{-a_1^4 + a_1^2 b_1^2 - 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

$$\gamma_3(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{a_1^4 + a_1^2 b_1^2 - 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

olsun. Bu parametreye göre yazılan bütün eğriler S_1^2 küresi üzerinde yatan spacelike küresel PH-eğrilerdir.

İspat: γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$' de S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğri olsun.

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ şeklinde bileşenleri ile ifade edildiğinde S_1^2 küre üzerinde yatması için,

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1 \tag{4.19}$$

(4.19) eşitliğini sağlaması gerekir. Ayrıca PH-eğri olduğundan dolayı

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2 \tag{4.20}$$

(4.20) denklemi sağlanmalıdır. $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ ikinci dereceden polinomlar olduklarından

$$\gamma_1(t) = \quad a_1 t + \frac{a_1 b_1}{2c_2}$$

$$\gamma_2\,(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{-a_1^4 + a_1^2 b_1^2 - 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

$$\gamma_3\,(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{a_1^4 + a_1^2 b_1^2 - 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

$a_1, b_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılır. (4.19) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3\,(t)$ yerine yazıldığında

$$\left(a_1 t + \frac{a_1 b_1}{2c_2}\right)^2 + \left(c_2 t^2 + b_1 t + \frac{-a_1^4 + a_1^2 b_1^2 - 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}\right)^2 - \left(c_2 t^2 + b_1 t + \frac{a_1^4 + a_1^2 b_1^2 - 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}\right)^2 = 1$$

elde edilir. γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel eğridir. (4.20) denklemi için $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ ifadeleri hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1 = \quad a_1$$

$$\dot{\gamma}_2 = \quad 2c_2 t + b_1$$

$$\dot{\gamma}_3 = \quad 2c_2 t + b_1$$

elde edilir. (4.20) denkleminden

$$a_1^2 + (2c_2 t + b_1)^2 - (2c_2 t + b_1)^2 = \quad \sigma^2$$

$$a_1^2 = \quad \sigma^2$$

elde edilir. Buradan anlaşılır ki $\sigma^2 > 0$ olduğu için eğri spacelike ve σ sabit polinom olduğundan eğri PH-eğridir.

Sonuç olarak; Yukarıdaki parametreyle verilen bütün γ eğrileri S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden spacelike küresel PH-eğrilerdir.

Örnek 4.2.2.2. $\mathbb{E}_1^3$' de γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir γ eğrisi $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ olmak üzere

$$\gamma_1(t) = \quad t + 2$$

$$\gamma_2(t) = \quad t^2 + 4t + \frac{11}{4}$$

$$\gamma_3(t) = \quad t^2 + 4t + \frac{13}{4}$$

ifadeleriyle tanımlansın. γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan küresel eğri olma şartı $\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$ için $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerlerine yazıldığında

$$(t+2)^2 + \left(t^2 + 4t + \frac{11}{4}\right)^2 - \left(t^2 + 4t + \frac{13}{4}\right)^2 = 1$$

ve

$$t^2 + 4t + 4 + t^4 + 16t^2 + \frac{121}{16} + 8t^3 + \frac{11}{2}t^2 + 22t - t^4 - 16t^2 - \frac{169}{16} - 8t^3 - \frac{13}{2}t^2 - 26t = 1$$

elde edilir. PH-eğri olması için $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği sağlanmalıdır. Bunun hesaplanabilmesi için önce $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında,

$$\dot{\gamma}_1 = \quad 1$$

$$\dot{\gamma}_2 = \quad 2t + 4$$

$$\dot{\gamma}_3 = \quad 2t + 4$$

olur. O halde

$$(1)^2 + (2t+4)^2 - (2t+4)^2 = \quad \sigma^2$$

$$1 + 4t^2 + 16t + 16 - 4t^2 - 16t - 16 = \quad \sigma^2$$

$$1 = \quad \sigma^2$$

$$\mp 1 = \quad \sigma$$

sonucuna ulaşılır. Yani γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden küresel PH-eğridir.

γ eğrisinin spacelike, timelike, null mu olduğu incelendiğinde;

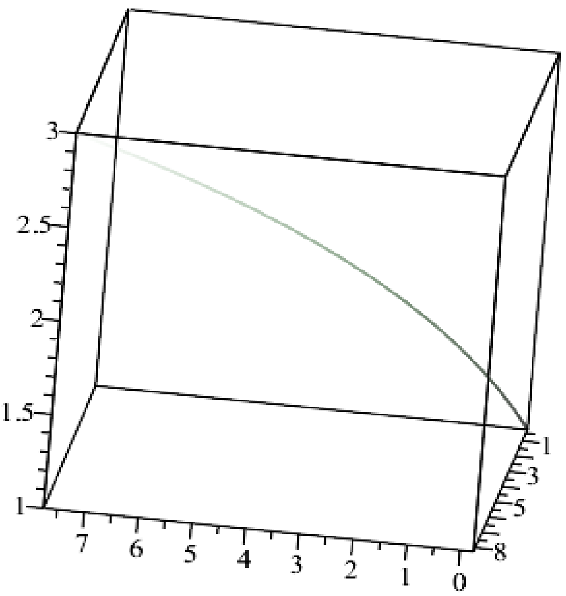
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

eğrisinin

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \left(t+2, t^2+4t+\frac{11}{4}, t^2+4t+\frac{13}{4}\right) \\
\dot{\gamma}(t) &= (1, 2t+4, 2t+4) \\
\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle &= 1^2 + (2t+4)^2 - (2t+4)^2 \\
\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle &= 1 \\
\|\dot{\gamma}(t)\| &= 1 > 0
\end{aligned}$$

olduğu için γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir spacelike eğri olur.

Bu eşitliğin σ^2 ye eşit olduğu aşikardır. σ^2 negatif değer alamayacağı için eğri timelike eğri olamaz.



Şekil 4. γ İkinci Dereceden Spacelike Küresel PH-eğrisi

Teorem 4.2.2.3. $\mathbb{E}_1^3$' de H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisi

$$\gamma_1(t) = \quad a_1 t + \frac{a_1 b_1}{2c_2}$$

$$\gamma_2\,(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{-a_1^4 + a_1^2 b_1^2 + 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

$$\gamma_3\,(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{a_1^4 + a_1^2 b_1^2 + 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

olsun. Bu parametreye göre yazılan bütün eğriler H_1^2 küresi üzerinde yatan spacelike küresel PH-eğrilerdir.

İspat: γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$' de H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğri olsun.

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ şeklinde bileşenleri ile ifade edildiğinde H_1^2 küre üzerinde yatması için,

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = -1 \tag{4.21}$$

(4.21) eşitliğini sağlaması gerekir. Ayrıca PH-eğri olduğundan dolayı

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2 \tag{4.22}$$

(4.22) denklemi sağlanmalıdır. $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ ikinci dereceden polinomlar

$$\gamma_1(t) = \quad a_1 t + \frac{a_1 b_1}{2c_2}$$

$$\gamma_2\,(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{-a_1^4 + a_1^2 b_1^2 + 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

$$\gamma_3\,(t) = \quad c_2 t^2 + b_1 t + \frac{a_1^4 + a_1^2 b_1^2 + 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}$$

$a_1, b_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılır. (4.21) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ yerine yazıldığında

$$\left(a_1 t + \frac{a_1 b_1}{2c_2}\right)^2 + \left(c_2 t^2 + b_1 t + \frac{-a_1^4 + a_1^2 b_1^2 + 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}\right)^2 - \left(c_2 t^2 + b_1 t + \frac{a_1^4 + a_1^2 b_1^2 + 4c_2^2}{4a_1^2 c_2}\right)^2 = -1$$

elde edilir. γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel eğridir.

(4.22) denklemi için $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ ifadeleri hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1 = \quad a_1$$

$$\dot{\gamma}_2 = \quad 2c_2 t + b_1$$

$$\dot{\gamma}_3 = \quad 2c_2 t + b_1$$

elde edilir. (4.22) denkleminden

$$a_1^2 + (2c_2 t + b_1)^2 - (2c_2 t + b_1)^2 = \quad \sigma^2$$

$$a_1^2 = \quad \sigma^2$$

O halde anlaşılır ki $\sigma^2 > 0$ olduğu için eğri spacelike ve σ sabit polinom olduğundan eğri PH-eğridir.

Sonuç olarak; Bu parametreyle verilen bütün γ eğrileri H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden spacelike küresel PH-eğrilerdir.

Örnek 4.2.2.3. $\mathbb{E}_1^3$' de γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir γ eğrisi $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \quad t + 2 \\ \gamma_2(t) &= \quad t^2 + 4t + \frac{19}{4} \\ \gamma_3(t) &= \quad t^2 + 4t + \frac{21}{4} \end{aligned}$$

ifadeleriyle tanımlansın. γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatan küresel eğri olma şartı $\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = -1$ için $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerlerine yazıldığında

$$(t+2)^2 + \left(t^2 + 4t + \frac{19}{4}\right)^2 - \left(t^2 + 4t + \frac{21}{4}\right)^2 = -1$$

ve

$$t^2 + 4t + 4 + t^4 + 8t^3 + \frac{51}{2}t^2 + 38t + \frac{361}{16} + -t^4 - 8t^3 - \frac{53}{2}t^2 - 42t - \frac{441}{16} = -1$$

elde edilir. PH-eğri olması için $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği sağlanmalıdır. Bunun hesaplanabilmesi için önce $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \quad 1 \\ \dot{\gamma}_2 &= \quad 2t + 4 \\ \dot{\gamma}_3 &= \quad 2t + 4 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$(1)^2 + (2t+4)^2 - (2t+4)^2 = \sigma^2$$

$$1 + 4t^2 + 16t + 16 - 4t^2 - 16t - 16 = \sigma^2$$

$$1 = \sigma^2$$

$$\mp 1 = \sigma$$

sonucuna ulaşılır. Yani γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden küresel PH-eğridir.

γ eğrisinin spacelike, timelike, null mu olduğunu inceleyelim. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisinin

$$\gamma(t) = (t+2, t^2 + 4t + \frac{19}{4}, t^2 + 4t + \frac{21}{4})$$

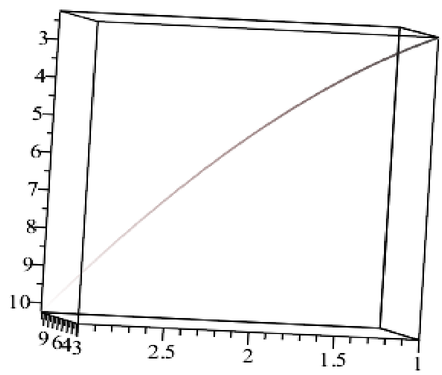
$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t+4, 2t+4)$$

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 1^2 + (2t+4)^2 - (2t+4)^2$$

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 1$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 > 0$$

olduğu için γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir spacelike eğri olur. Bu eşitliğin σ^2 ye eşit olduğu aşikardır. σ^2 negatif değer alamayacağı için eğri timelike eğri olamaz.



Şekil 5. γ İkinci Dereceden Spacelike Küresel PH-eğrisi

Yukarıda verilen parametrik çözümler dışında farklı olarak Örnek 4.2.2.4 verilebilir.

Örnek 4.2.2.4. $\mathbb{E}_1^3$' de bir γ eğrisi $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ olmak üzere

$$\gamma_1(t) = \quad t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t + \sqrt{2}$$

$$\gamma_2(t) = \quad t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t$$

$$\gamma_3(t) = \quad \sqrt{2}t^2 + t + 1$$

ifadeleriyle tanımlansın. Küresel eğri olma şartı $\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$ için $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ yerlerine yazıldığında

$$\left(t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t + \sqrt{2}\right)^2 + \left(t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)^2 - \left(\sqrt{2}t^2 + t + 1\right)^2 = 1$$

$$(t^4 + \tfrac{1}{2}t^2 + 2 + \sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t^2 + t) + (t^4 + \tfrac{1}{2}t^2 + \sqrt{2}t^3) - (2t^4 + t^2 + 1 + 2\sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t^2 + t) = 1$$

elde edilir. PH-eğri olması için $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitliğin hesaplanabilmesi için önce $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$

$$\dot{\gamma}_1 = \quad 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{\gamma}_2 = \quad 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{\gamma}_3 = \quad 2\sqrt{2}t + 1$$

olur. O halde $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği yazıldığında;

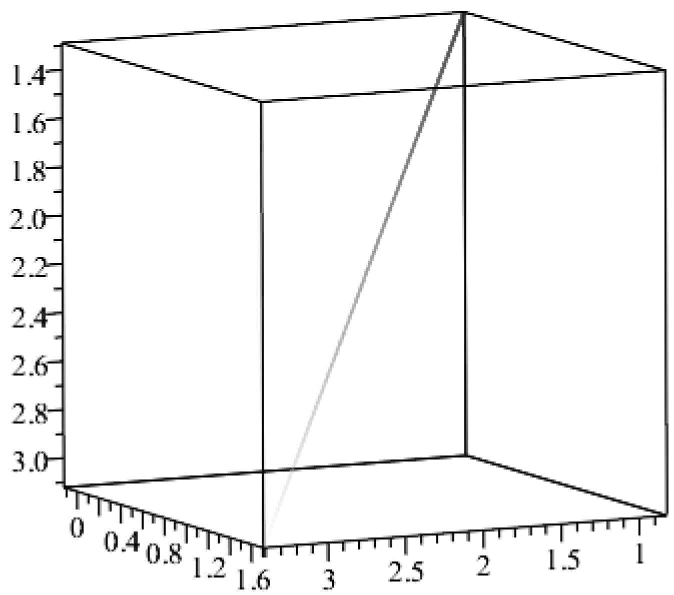
$$\left(4t^2+2\sqrt{2}t+\frac{1}{2}\right)+\left(4t^2+2\sqrt{2}t+\frac{1}{2}\right)-\left(8t^2+4\sqrt{2}t+1\right)=\quad \sigma^2$$

$$0=\quad \sigma^2$$

sonucuna ulaşılır. Yani ikinci dereceden küresel PH-eğrisi olan γ eğrisi $\sigma=0$ olduğundan null eğri olur. Sonuç olarak:

$$\gamma=(t^2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}t+\sqrt{2}\,,t^2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}t+\sqrt{2}\,,\sqrt{2}t^2+t+1)$$

eğrisi küresel PH-eğrisidir ve nulldur. γ eğrisi bir doğru belirtir.



Şekil 6. γ İkinci Dereceden Null Küresel PH-eğrisi

Genel Çözüm 4.2.2.1. γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğri olsun. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisinin bileşenleri

$$\gamma_1(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$\gamma_2(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0$$

$$\gamma_3(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$$

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılır. γ eğrisi S_1^2 küresi üzerinde yatması için

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1 \qquad (4.23)$$

(4.23) eşitliğini sağlaması gerekir. (4.16) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerine yazıldığında

$$(a_2t^2 + a_1t + a_0)^2 + (b_2t^2 + b_1t + b_0)^2 - (c_2t^2 + c_1t + c_0)^2 = 1 \qquad (4.24)$$

olmalıdır. (4.24) denkleminde gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$a_1^2t^2 + 2a_1a_0t + a_0^2 + b_1^2t^2 + 2b_1b_0t + b_0^2 - c_1^2t^2 - 2c_1c_0t - c_0^2 = 1$$

eşitliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 = 0 \qquad (4.25)$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 = 0 \qquad (4.26)$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2 - 2c_0c_2 = 0 \tag{4.27}$$

$$a_0a_1 + b_0b_1 - c_0c_1 = 0 \tag{4.28}$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = 1 \tag{4.29}$$

γ eğrisinin PH-eğri olması için $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği sağlanmalıdır. Bunun hesaplanabilmesi için önce $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1 = 2a_2t + a_1$$

$$\dot{\gamma}_2 = 2b_2t + b_1$$

$$\dot{\gamma}_3 = 2c_2t + c_1$$

elde edilir. $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ denkleminde yazıldığında

$$(2a_2t + a_1)^2 + (2b_2t + b_1)^2 - (2c_2t + c_1)^2 = \sigma^2$$

olur. (4.25) ve (4.26) eşitliklerinden yararlanıldığında

$$4\underbrace{(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2)}_{0}t^2 + 4\underbrace{(a_2a_1 + b_2b_1 - c_2c_1)}_{0}t + a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2$$

olur. İşlemler sonucunda oluşan bütün eşitlikler:

$$a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 = 0 \tag{4.30}$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 = 0 \tag{4.31}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2 - 2c_0c_2 = 0 \tag{4.32}$$

$$a_0a_1 + b_0b_1 - c_0c_1 = 0 \tag{4.33}$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = 1 \tag{4.34}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2 \tag{4.35}$$

olur. Denklemlerin çözümüyle yazılacak $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisi;

$$\gamma_1(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$\gamma_2(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0$$

$$\gamma_3(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$$

S_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğri olur.

Genel Çözüm 4.2.2.2. γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğri olsun. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisinin bileşenleri

$$\gamma_1(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$\gamma_2(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0$$

$$\gamma_3(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$$

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılır. γ eğrisi H_1^2 küresi üzerinde yatması için

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = -1 \tag{4.36}$$

(4.36) eşitliğini sağlaması gerekir. (4.36) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerine yazıldığında:

$$(a_2t^2 + a_1t + a_0)^2 + (b_2t^2 + b_1t + b_0)^2 - (c_2t^2 + c_1t + c_0)^2 = -1 \qquad (4.37)$$

olmalıdır. (4.37) denkleminde gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$a_1^2t^2 + 2a_1a_0t + a_0^2 + b_1^2t^2 + 2b_1b_0t + b_0^2 - c_1^2t^2 - 2c_1c_0t - c_0^2 = -1$$

eşitliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 = 0 \qquad (4.38)$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 = 0 \qquad (4.39)$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2 - 2c_0c_2 = 0 \qquad (4.40)$$

$$a_0a_1 + b_0b_1 - c_0c_1 = 0 \qquad (4.41)$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = -1 \qquad (4.42)$$

γ eğrisinin PH-eğri olması için $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ eşitliği sağlanmalıdır. Bunun hesaplanabilmesi için önce $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında,

$$\dot{\gamma}_1 = 2a_2t + a_1$$

$$\dot{\gamma}_2 = 2b_2t + b_1$$

$$\dot{\gamma}_3 = 2c_2t + c_1$$

elde edilir. $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ denkleminde yazıldığında

$$(2a_2t + a_1)^2 + (2b_2t + b_1)^2 - (2c_2t + c_1)^2 = \sigma^2$$

olur. (4.38) ve (4.39) eşitliklerinden yararlanıldığında

$$4\underbrace{(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2)}_{0}t^2 + 4\underbrace{(a_2a_1 + b_2b_1 - c_2c_1)}_{0}t + a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2$$

olur. Bu işlemler sonucunda oluşan bütün eşitlikler:

$$a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 = 0 \tag{4.43}$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 = 0 \tag{4.44}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2 - 2c_0c_2 = 0 \tag{4.45}$$

$$a_0a_1 + b_0b_1 - c_0c_1 = 0 \tag{4.46}$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = -1 \tag{4.47}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \sigma^2 \tag{4.48}$$

olur. Bu denklemlerin çözümüyle yazılacak $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisi;

$$\gamma_1(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$\gamma_2(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0$$

$$\gamma_3(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$$

H_1^2 küresi üzerinde yatan ikinci dereceden bir küresel PH-eğri olur.

4.2.3. Üçüncü Dereceden Küresel PH-Eğriler

Bu alt bölümde $\mathbb{E}_1^3$ de üçüncü dereceden spacelike ve null küresel PH-eğrinin varlığı araştırılmıştır. γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ de S_1^2 küresi üzerinde yatan üçüncü dereceden küresel PH-eğri olsun. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ şeklinde bileşenleri ile ifade edildiğinde S_1^2 küresi üzerinde yatması için,

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1 \tag{4.49}$$

(4.49) eşitliğini sağlaması gerekir. Ayrıca PH-eğri olduğundan dolayı

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2 \tag{4.50}$$

(4.50) denklemi sağlanmalıdır. $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ üçüncü dereceden polinomlar olduklarından

$$\gamma_1(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$\gamma_2(t) = b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$$

$$\gamma_3(t) = c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$$

$a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ için şeklinde yazılır. (4.49) denkleminde $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ yerine yazıldığında

$$(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0)^2 + (b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0)^2 - (c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0)^2 = 1 \tag{4.51}$$

elde edilir. (4.51) denkleminde gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$a_1^2t^2 + 2a_1a_0t + a_0^2 + b_1^2t^2 + 2b_1b_0t + b_0^2 - c_1^2t^2 - 2c_1c_0t - c_0^2 = 1$$

eşitliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_3^2 + b_3^2 - c_3^2 = 0 \tag{4.52}$$

$$a_3a_2 + b_3b_2 - c_3c_2 = 0 \tag{4.53}$$

$$a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 + 2a_3a_1 + 2b_3b_1 - 2c_3c_1 = 0 \tag{4.54}$$

$$a_3a_0 + a_2a_1 + b_3b_0 + b_2b_1 - c_3c_0 - c_2c_1 = 0 \tag{4.55}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 + 2a_2a_0 + 2b_2b_0 - 2c_2c_0 = 0 \tag{4.56}$$

$$a_1a_0 + b_1b_0 - c_1c_0 = 0 \tag{4.57}$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = 1 \tag{4.58}$$

(4.50) denklemi için $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ ifadeleri hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1 = 3a_3t^2 + \ 2a_2t + a_1$$

$$\dot{\gamma}_2 = 3b_3t^2 + 2b_2t + b_1$$

$$\dot{\gamma}_3 = 3c_3t^2 + 2c_2t + c_1$$

elde edilir. (4.50) denkleminden

$$(3a_3t^2 + \ 2a_2t + a_1)^2 + \ (3b_3t^2 + 2b_2t + b_1)^2 - (3c_3t^2 + 2c_2t + c_1)^2 = \sigma^2$$

(4.52), (4.53), (4.54) eşitliklerinden yararlanıldığında

$$9\underbrace{(a_3^2+b_3^2-c_3^2)}_{0}t^4+12\underbrace{(a_3a_2+b_3b_2-c_3c_2)}_{0}t^3+\left[\underbrace{4(a_2^2+b_2^2-c_2^2)+6(a_3a_1+b_3b_1-c_3c_1)}_{(a_2^2+b_2^2-c_2^2)+\underbrace{3(a_2^2+b_2^2-c_2^2)+6(a_3a_1+b_3b_1-c_3c_1)}_{0}}\right]t^2$$

$$+4\,(a_2a_1+b_2b_1-c_2c_1)t\;+\;a_1^2+b_1^2-c_1^2=\sigma^2$$

Gerekli işlemler yapıldığında:

$$(a_2^2+b_2^2-c_2^2)t^2+4\,(a_2a_1+b_2b_1-c_2c_1)t\;+(a_1^2+b_1^2-c_1^2)=\sigma^2$$

olur. İşlemler sonucunda aşağıdaki eşitlikler oluşur.

$$a_3^2+b_3^2-c_3^2=0$$

$$a_3a_2+b_3b_2-c_3c_2=0$$

$$a_2^2+b_2^2-c_2^2+2a_3a_1+2b_3b_1-2c_3c_1=0$$

$$a_3a_0+a_2a_1+b_3b_0+b_2b_1-c_3c_0-c_2c_1=0$$

$$a_1^2+b_1^2-c_1^2+2a_2a_0+2b_2b_0-2c_2c_0=0$$

$$a_1a_0+b_1b_0-c_1c_0=0$$

$$a_0^2+b_0^2-c_0^2=1$$

$$(a_2^2+b_2^2-c_2^2)t^2+4\,(a_2a_1+b_2b_1-c_2c_1)t\;\;a_1^2+b_1^2-c_1^2=\sigma^2$$

Bu denklemler için bazı özel durumlar aşağıda incelenmiştir.

Özel durum 4.2.3.1. $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{E}_1^3$ üçüncü dereceden polinom eğrisi $\gamma(t)=(at^3,bt^3,ct^3)$ şeklinde tanımlansın. γ eğrisinin küresel eğri olması için

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$$

denklemi sağlanmalıdır. Bu denklemde γ eğrisinin bileşenleri yerlerine yazıldığında

$$(at^3)^2 + (bt^3)^2 - (ct^3)^2 = 1 \tag{4.59}$$

elde edilir. (4.59) numaralı eşitliğin $\forall t \in \mathbb{R}$ için sağlanamayacağı açıktır. Bu şekilde olan eğriler küresel eğri olamaz. Dolayısıyla bu tip eğrilerden küresel PH-eğri elde edilemez.

Özel durum 4.2.3.2. $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ üçüncü dereceden polinom eğrisi

$$\gamma(t) = (a_1 t^3 + a_0, b_1 t^3 + b_0, c_1 t^3 + c_0)$$

şeklinde tanımlansın. γ eğrisinin küresel eğri olması için

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$$

denklemi sağlanmalıdır. Bu denklemde γ eğrisinin bileşenleri yerlerine yazıldığında

$$(a_1 t^3 + a_0)^2 + (b_1 t^3 + b_0)^2 - (c_1 t^3 + c_0)^2 = 1$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$a_1^2 t^6 + 2a_1 a_0 t^3 + a_0^2 + b_1^2 t^6 + 2b_1 b_0 t^3 + b_0^2 - c_1^2 t^6 + 2c_1 c_0 t^3 + c_0^2 = 1$$

Eşitliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = 0$$

$$2a_1a_0 + 2b_1b_0 - 2c_1c_0 = 0$$

$$a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 = 1$$

O halde PH-eğri olma şartı incelendiğinde

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$$

olmalıdır. $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında

$$\dot{\gamma}_1 = 3a_1t^2$$

$$\dot{\gamma}_2 = 3b_1t^2$$

$$\dot{\gamma}_3 = 3c_1t^2$$

olur. $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ PH-eğri olma şartında yerleştirildiğinde;

$$(3a_1t^2)^2 + (3b_1t^2)^2 - (3c_1t^2)^2 = \sigma^2$$

$$9a_1^2t^4 + 9b_1^2t^4 - 9c_1^2t^4 = \sigma^2$$

olur.

Küresel olma şartındaki denklemlere dayanarak işlem en sade haline getirildiğinde.

$$9\left(\underbrace{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}_{0}\right)t^4 = \quad \sigma^2$$

$$\sigma = \quad 0$$

olur. O halde

$$\gamma(t) = (a_1 t^3 + a_0, b_1 t^3 + b_0, c_1 t^3 + c_0)$$

şeklinde olan küresel eğriler küresel null PH-eğrilerdir.

Örnek 4.2.3.1. $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ üçüncü dereceden polinom eğrisi

$$\gamma(t) = (6t^3 + 8, 8t^3 + 9, 10t^3 + 12)$$

şeklinde tanımlansın. γ eğrisinin küresel eğri olması için

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$$

denklemi sağlanmalıdır. Bu denklemde γ eğrisinin bileşenleri yerlerine yazıldığında

$$(6t^3 + 8)^2 + (8t^3 + 9)^2 - (10t^3 + 12)^2 = 1$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$36t^6 + 96t^3 + 64 + 64t^6 + 144t^3 + 81 - 100t^6 - 240t^3 - 144 = 1$$

Eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $\gamma(t) = (6t^3 + 8, 8t^3 + 9, 10t^3 + 12)$ eğrisinin küresel eğri olduğunu gösterir. PH-eğri olma şartı incelendiğinde,

$$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$$

olmalıdır. $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında.

$$\dot{\gamma}_1 = 18t^2$$

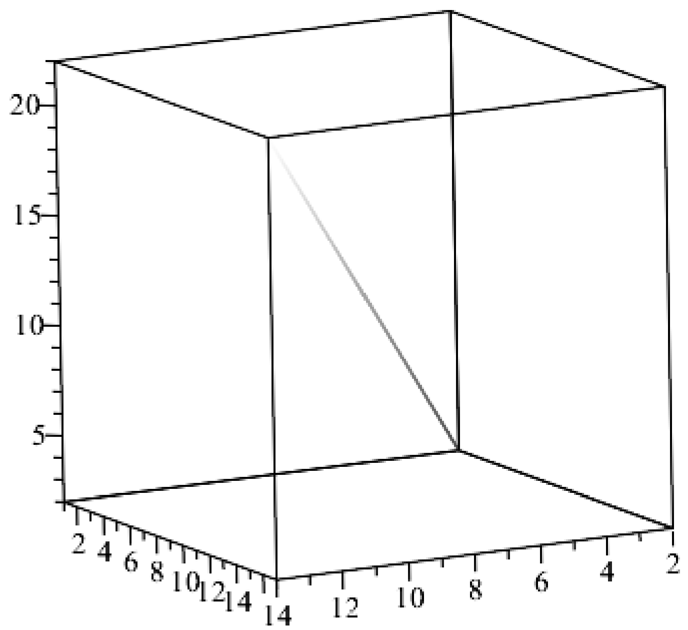
$$\dot{\gamma}_2 = 24t^2$$

$$\dot{\gamma}_3 = 30t^2$$

olur. $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ PH-eğri olma şartında yerleştirildiğinde;

$$\begin{aligned} (18t^2)^2 + (24t^2)^2 - (30t^2)^2 &= \sigma^2 \\ 324t^4 + 576t^4 - 900t^4 &= \sigma^2 \\ 0 &= \sigma^2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik küresel $\gamma(t) = (6t^3 + 8, 8t^3 + 9, 10t^3 + 12)$ eğrisinin null PH-eğri olduğunu gösterir. Yani γ eğrisi küresel null PH-eğridir.



Şekil 7. γ Üçüncü Dereceden Null Küresel PH-eğrisi

Özel durum 4.2.3.3. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ üçüncü dereceden polinom eğrisi

$$\gamma(t) = (a_1 t^3 + a_0 t, b_1 t + b_0, c_1 t^3 + c_0 t)$$

şeklinde tanımlansın. γ eğrisinin küresel eğri olması için

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$$

denklemini sağlanmalıdır. Bu denklemde γ eğrisinin bileşenleri yerlerine yazıldığında

$$(a_1 t^3 + a_0 t)^2 + (b_1 t + b_0)^2 - (c_1 t^3 + c_0 t)^2 = 1$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$a_1^2 t^6 + 2a_1 a_0 t^4 + a_0^2 t^2 + b_1^2 t^2 + 2b_1 b_0 t + b_0^2 - c_1^2 t^6 - 2c_1 c_0 t^4 - c_0^2 t^2 = 1$$

Eşitliğinden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_1^2 - c_1^2 = 0$$

$$2a_1 a_0 + 2b_1 b_0 - 2c_1 c_0 = 0$$

$$a_0^2 + b_1^2 - c_0^2 = 0$$

$$2b_1 b_0 = 0$$

$$b_0^2 = 1$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında:

$$a_1 = a_1, \quad a_0 = a_0, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 1, \quad c_1 = a_1, \quad c_0 = a_0$$

Parametresiyle yazılan bütün eğriler küresel null PH-eğrilerdir.

Örnek 4.2.3.2. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ üçüncü dereceden polinom eğrisi

$$\gamma(t) = (2t^3 + 3t, 1, 2t^3 + 3t)$$

olsun. γ eğrisini inceleyelim. Küresel eğri olması durumunu inceleyelim.

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) - \gamma_3^2(t) = 1$$

Şartında $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ yerleştirelim.

$$(2t^3 + 3t)^2 + 1^2 - (2t^3 + 3t)^2 = 1$$

Eşitliğini sağladığı için eğri küresel eğridir. PH-eğri olma şartını inceleyelim. $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ olmalıdır. $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ hesaplandığında,

$$\dot{\gamma}_1 = 6t^2 + 3$$

$$\dot{\gamma}_2 = 0$$

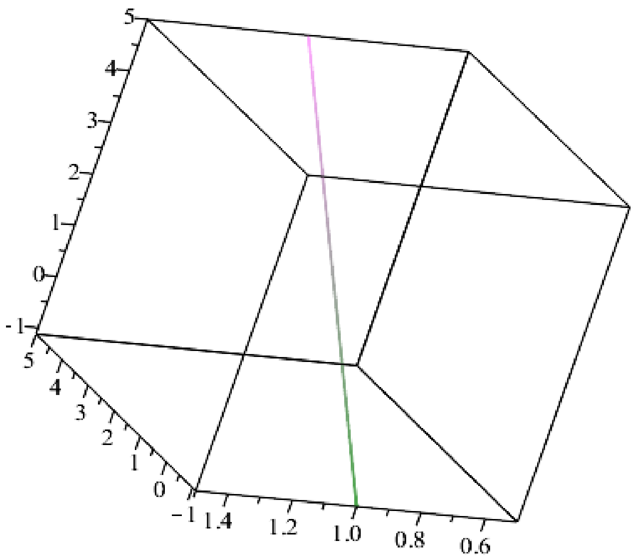
$$\dot{\gamma}_3 = 6t^2 + 3$$

$\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 = \sigma^2$ denkleminde yerleştirildiğinde:

$$(6t^2 + 3)^2 + 0^2 - (6t^2 + 3)^2 = \sigma^2$$

$$0 = \sigma^2$$

olduğundan eğri küresel null PH-eğri olur.



Şekil 8. γ Üçüncü Dereceden Null Küresel PH-eğrisi

γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'de S_1^2 küresi üzerinde yatan $n.$ dereceden küresel eğri ve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ olsun. γ eğrisinin bileşenleri olan; $\gamma_1(t), \gamma_2\,(t), \gamma_3\,(t)$ n. dereceden polinom ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $(i = 1{,}2{,}3$ ve $j = 0{,}1{,}2, \dots, n)$ için

$$\gamma_1(t) = a_{1n}t^n + a_{1(n-1)}t^{n-1} + \cdots + a_{11}t + a_{10}$$

$$\gamma_2(t) = a_{2n}t^n + a_{2(n-1)}t^{n-1} + \cdots + a_{21}t + a_{20}$$

$$\gamma_3(t) = a_{3n}t^n + a_{3(n-1)}t^{n-1} + \cdots + a_{31}t + a_{30}$$

şeklinde yazılır ve $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$ olacak şekilde $\gamma(t)$ eğrisi,

$$\gamma(t) = \vec{a}_n t^n + \vec{a}_{n-1}\, t^{n-1} + \cdots + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0$$

olur. Böylelikle kısaca

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i t^i \qquad\qquad \vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$$

olur. γ eğrisinin derecelerine göre küresel ve PH-eğri olması durumları incelendiğinde;

a) $n = 1$ için, γ eğrisinin bileşenleri

$$\gamma_1(t) = a_{11}t + a_{10}$$

$$\gamma_2(t) = a_{21}\mathrm{t} + a_{20}$$

$$\gamma_3(t) = a_{31}\mathrm{t} + a_{30}$$

olur. Ayrıca γ eğrisinin vektörel ifadesi $\gamma(t) = \vec{a}_1\mathrm{t} + \vec{a}_0$ olur. γ eğrisinin küresel olması dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}\langle \gamma, \gamma \rangle &= \langle \vec{a}_1 \mathrm{t} + \vec{a}_0, \vec{a}_1 \mathrm{t} + \vec{a}_0 \rangle \\ &= \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle}_{0} t^2 + 2 \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_0 \rangle}_{0} t + \underbrace{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle}_{1} = 1\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\vec{a}_1$ vektörü null, $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_0$ ve $\vec{a}_0 \in S_1^2$ elde edilir.

γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \sigma^2$ olması gerektiğinden

$$\dot{\gamma}_1(t) = a_{11}$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = a_{21}$$

$$\dot{\gamma}_3(t) = a_{31}$$

olur. Ayrıca $\dot{\gamma}$' nın vektörel ifadesi $\dot{\gamma}(t) = \vec{a}_1$ olur. γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında

$$\begin{aligned}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle &= \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = \sigma^2 \\ &= \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle}_{0} = \sigma^2\end{aligned}$$

olur. Böylece γ eğrisi birinci dereceden küresel PH-eğri olur.

b) $n = 2$ için, γ eğrisinin bileşenleri

$$\gamma_1(t) = a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}$$

$$\gamma_2(t) = a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}$$

$$\gamma_3(t) = a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30}$$

olur. Ayrıca γ eğrisinin vektörel ifadesi $\gamma(t) = \vec{a}_2 t^2 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0$ olur. γ eğrisinin küresel olması dikkate alındığında $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ olması gerektiğinden

$$
\begin{aligned}
\langle \gamma, \gamma \rangle &= \langle \vec{a}_2 t^2 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0, \vec{a}_2 t^2 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0 \rangle &= 1 \\
&= \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle t^4 + 2\langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle t^3 + (2\langle \vec{a}_2, \vec{a}_0 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle)\, t^2 + 2\langle \vec{a}_1, \vec{a}_0 \rangle t + \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle &= 1
\end{aligned}
$$

Bu eşitlikten

$$
\begin{aligned}
&\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle = 0, \qquad \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle = 0, \qquad 2\langle \vec{a}_2, \vec{a}_0 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = 0, \\
&\langle \vec{a}_1, \vec{a}_0 \rangle = 0, \qquad \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle = 1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\vec{a}_2$ vektörü null, $\vec{a}_2 \perp \vec{a}_1$ ve $\vec{a}_0 \in S_1^2$ elde edilir.

γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \sigma^2$ olması gerektiğinden

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1(t) &= 2a_{12}t + a_{11} \\
\dot{\gamma}_2(t) &= 2a_{22}t + a_{21} \\
\dot{\gamma}_3(t) &= 2a_{32}t + a_{31}
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca $\dot{\gamma}$ eğrisinin vektörel ifadesi $\dot{\gamma}(t) = 2\vec{a}_2 t + \vec{a}_1$ olur. γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \sigma^2$ olması gerektiğinden

$$
\begin{aligned}
\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle &= \langle 2\vec{a}_2 t + \vec{a}_1, 2\vec{a}_2 t + \vec{a}_1 \rangle &= \sigma^2 \\
&= 4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle t^2 + 4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle t + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Bu eşitlik;

$$\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle = 0, \qquad \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle = 0$$

olduğundan

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = \sigma^2$$

olur. $\vec{a}_1$ vektörüne bağlı olur. σ sabit polinomdur. γ eğrisi ikinci dereceden küresel PH-eğri olur.

c) $n = 3$ için, γ eğrisinin bileşenleri

$$\gamma_1(t) = a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}$$

$$\gamma_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}$$

$$\gamma_3(t) = a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30}$$

olmak üzere γ eğrisinin vektörel ifadesi $\gamma(t) = \vec{a}_3t^3 + \vec{a}_2\, t^2 + \vec{a}_1t + \vec{a}_0$ olur. γ eğrisinin küresel olması dikkate alındığında $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ olması gerektiğinden

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \vec{a}_3t^3 + \vec{a}_2\, t^2 + \vec{a}_1t + \vec{a}_0, \vec{a}_3t^3 + \vec{a}_2\, t^2 + \vec{a}_1t + \vec{a}_0 \rangle = 1$$

$$= \langle \vec{a}_3, \vec{a}_3 \rangle t^6 + 2\langle \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle t^5 + (2\langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \rangle + \langle a_2, a_2 \rangle)t^4 +$$
$$2(\langle \vec{a}_3, \vec{a}_0 \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle)t^3 + (2\langle \vec{a}_2, \vec{a}_0 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle)\, t^2 + 2\langle \vec{a}_1, \vec{a}_0 \rangle t + \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle = 1$$

Eşitliğinden;

$\langle \vec{a}_3, \vec{a}_3 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle = 0, \quad 2\langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \rangle + \langle a_2, a_2 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_3, \vec{a}_0 \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle = 0,$
$2\langle \vec{a}_2, \vec{a}_0 \rangle + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_1, \vec{a}_0 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle = 1$

elde edilir. Buradan $\vec{a}_3$ vektörü null, $\vec{a}_3 \perp \vec{a}_2$, $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_0$ve $\vec{a}_0 \in S_1^2$ elde edilir.

γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında $\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = \sigma^2$ olması gerektiğinden

$$\dot{\gamma}_1(t) = 3a_{13}t^2 + 2a_{12}\mathrm{t} + a_{11}$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = 3a_{23}t^2 + 2a_{22}\mathrm{t} + a_{21}$$

$$\dot{\gamma}_3(t) = 3a_{33}t^2 + 2a_{32}\mathrm{t} + a_{31}$$

olmak üzere $\dot{\gamma}$ eğrisinin vektörel ifadesi $\dot{\gamma}(t) = 3\vec{a}_3t^2 + 2\vec{a}_2t + \vec{a}_1$ olur. γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında $\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = \sigma^2$ olması gerektiğinden

$$\begin{aligned}\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle &= \langle 3\vec{a}_3t^2 + 2\vec{a}_2t + \vec{a}_1, 3\vec{a}_3t^2 + 2\vec{a}_2t + \vec{a}_1\rangle &= \sigma^2 \\ &= 9\langle\vec{a}_3,\vec{a}_3\rangle t^4 + 12\langle\vec{a}_3,\vec{a}_2\rangle t^3 + 6\langle\vec{a}_3,\vec{a}_1\rangle t^2 + 4\langle\vec{a}_2,\vec{a}_1\rangle)t + \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle &= \sigma^2\end{aligned}$$

eşitliği

$$\langle\vec{a}_3,\vec{a}_3\rangle = 0, \langle\vec{a}_3,\vec{a}_2\rangle = 0,$$

olduğundan

$$9\langle\vec{a}_3,\vec{a}_3\rangle t^4 + 12\langle\vec{a}_3,\vec{a}_2\rangle t^3 + 6\langle\vec{a}_3,\vec{a}_1\rangle t^2 + 4\langle\vec{a}_2,\vec{a}_1\rangle)t + \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle = \sigma^2$$

İfadesi

$$6\langle\vec{a}_3,\vec{a}_1\rangle t^2 + 4\langle\vec{a}_2,\vec{a}_1\rangle)t + \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle = \sigma^2$$

olur.

d) $n = 4$ için, γ eğrisinin bileşenleri

$$\gamma_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}$$

$$\gamma_2(t) = a_{24}t^4 + a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}$$

$$\gamma_3(t) = a_{34}t^4 + a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30}$$

olmak üzere γ eğrisinin vektörel ifadesi $\gamma(t) = \vec{a}_4t^4 + \vec{a}_3t^3 + \vec{a}_2\,t^2 + \vec{a}_1t + \vec{a}_0$ olur. γ eğrisinin küresel olması dikkate alındığında $\langle\gamma,\gamma\rangle = 1$ olması gerektiğinden

$$\begin{aligned}\langle\gamma,\gamma\rangle &= \langle\vec{a}_4t^4 + \vec{a}_3t^3 + \vec{a}_2\,t^2 + \vec{a}_1t + \vec{a}_0, \vec{a}_4t^4 + \vec{a}_3t^3 + \vec{a}_2\,t^2 + \vec{a}_1t + \vec{a}_0\rangle = 1\\ &= \langle\vec{a}_4,\vec{a}_4\rangle t^8 + 2\langle\vec{a}_4,\vec{a}_3\rangle t^7 + [2\langle\vec{a}_4,\vec{a}_2\rangle + \langle\vec{a}_3,\vec{a}_3\rangle]t^6 + 2[\langle\vec{a}_4,\vec{a}_1\rangle + \langle\vec{a}_3,\vec{a}_2\rangle]t^5\\ &\quad + [2\langle\vec{a}_4,\vec{a}_0\rangle + 2\langle\vec{a}_3,\vec{a}_1\rangle + \langle a_2,a_2\rangle]t^4 + 2[\langle\vec{a}_3,\vec{a}_0\rangle + \langle\vec{a}_2,\vec{a}_1\rangle]t^3\\ &\quad + [2\langle\vec{a}_2,\vec{a}_0\rangle + \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle]t^2 + 2\langle\vec{a}_1,\vec{a}_0\rangle t + \langle\vec{a}_0,\vec{a}_0\rangle = 1\end{aligned}$$

eşitliğinden;

$\langle\vec{a}_4,\vec{a}_4\rangle = 0$, $\langle\vec{a}_4,\vec{a}_3\rangle = 0$, $2\langle\vec{a}_4,\vec{a}_2\rangle + \langle\vec{a}_3,\vec{a}_3\rangle = 0$, $\langle\vec{a}_4,\vec{a}_1\rangle + \langle\vec{a}_3,\vec{a}_2\rangle = 0$,
$2\langle\vec{a}_4,\vec{a}_0\rangle + 2\langle\vec{a}_3,\vec{a}_1\rangle + \langle a_2,a_2\rangle = 0$, $\langle\vec{a}_3,\vec{a}_0\rangle + \langle\vec{a}_2,\vec{a}_1\rangle = 0$, $2\langle\vec{a}_2,\vec{a}_0\rangle + \langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle = 0$,
$\langle\vec{a}_1,\vec{a}_0\rangle = 0$, $\langle\vec{a}_0,\vec{a}_0\rangle = 1$

elde edilir. Buradan $\vec{a}_4$ vektörü null, $\vec{a}_4 \perp \vec{a}_3$, $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_0$ve $\vec{a}_0 \in S_1^2$ elde edilir.

γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında $\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = \sigma^2$ olması gerektiğinden

$$\dot{\gamma}_1(t) = 4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}\mathrm{t} + a_{11}$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = 4a_{24}t^3 + 3a_{23}t^2 + 2a_{22}\mathrm{t} + a_{21}$$

$$\dot{\gamma}_3(t) = 4a_{34}t^3 + 3a_{33}t^2 + 2a_{32}\mathrm{t} + a_{31}$$

olmak üzere $\dot{\gamma}$ eğrisinin vektörel ifadesi $\dot{\gamma}(t) = 4\vec{a}_4 t^3 + 3\vec{a}_3 t^2 + 2\vec{a}_2 t + \vec{a}_1$ olur. γ eğrisinin PH-eğri olması dikkate alındığında $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \sigma^2$ olması gerektiğinden

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \langle 4\vec{a}_4 t^3 + 3\vec{a}_3 t^2 + 2\vec{a}_2 t + \vec{a}_1, 4\vec{a}_4 t^3 + 3\vec{a}_3 t^2 + 2\vec{a}_2 t + \vec{a}_1 \rangle = \sigma^2$$

$$16\langle \vec{a}_4, \vec{a}_4 \rangle t^6 + 24\langle \vec{a}_4, \vec{a}_3 \rangle t^5 + [9\langle \vec{a}_3, \vec{a}_3 \rangle + 16\langle \vec{a}_4, \vec{a}_2 \rangle] t^4 + [8\langle \vec{a}_4, \vec{a}_1 \rangle + 12\langle \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle] t^3 + [4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle + 6\langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \rangle] t^2 + 4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle) t + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = \sigma^2$$

eşitliği;

$$\langle \vec{a}_4, \vec{a}_4 \rangle = 0, \qquad \langle \vec{a}_4, \vec{a}_3 \rangle = 0, \qquad 2\langle \vec{a}_4, \vec{a}_2 \rangle + \langle \vec{a}_3, \vec{a}_3 \rangle = 0$$

olduğundan

$$16\langle \vec{a}_4, \vec{a}_4 \rangle t^6 + 24\langle \vec{a}_4, \vec{a}_3 \rangle t^5 + [9\langle \vec{a}_3, \vec{a}_3 \rangle + 16\langle \vec{a}_4, \vec{a}_2 \rangle] t^4 + [8\langle \vec{a}_4, \vec{a}_1 \rangle + 12\langle \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle] t^3 + [4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle + 6\langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \rangle] t^2 + 4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle) t + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = \sigma^2$$

ifadesi

$$\langle \vec{a}_3, \vec{a}_3 \rangle t^4 + 4\langle \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle t^3 + [4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle + 6\langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \rangle] t^2 + 4\langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle t + \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = \sigma^2$$

olur.

Yukarıda birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden γ eğrileri için verdiğimiz küresel eğri şartları genelleştirildiğinde aşağıdaki Teorem 4.2.3.1 elde edilir.

Teorem 4.2.3.1. γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'de S_1^2 küresi üzerinde yatan n. dereceden küresel eğri ve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ olsun. γ eğrisinin bileşenleri olan; $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ n. dereceden polinom ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$, ($i = 1,2,3$ ve $j = 0,1,2, \dots, n$) için

$$\gamma_1(t) = a_{1n}t^n + a_{1(n-1)}t^{n-1} + \cdots + a_{11}t + a_{10}$$

$$\gamma_2(t) = a_{2n}t^n + a_{2(n-1)}t^{n-1} + \cdots + a_{21}t + a_{20}$$

$$\gamma_3(t) = a_{3n}t^n + a_{3(n-1)}t^{n-1} + \cdots + a_{31}t + a_{30}$$

şeklinde yazılır ve $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$ olacak şekilde $\gamma(t)$ eğrisi,

$$\gamma(t) = \vec{a}_n t^n + \vec{a}_{n-1}\, t^{n-1} + \cdots + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0$$

olur. Böylelikle kısaca γ eğrisini

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i t^i \qquad \vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$$

şekilde gösterilir. γ eğrisinin küresel olma durumu incelendiğinde:

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i t^i, \sum_{j=0}^{n} \vec{a}_j t^j \rangle = 1$$

şartını sağlaması gerekir. Buna göre;

$$\langle \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i t^i, \sum_{j=0}^{n} \vec{a}_j t^j \rangle = \sum_{k=0}^{2n} b_k t^k = 1, \qquad k = i + j \text{ ve } i, j \in \{0,1,2, \dots, n\}$$

$$b_k = \begin{cases} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle = 1\,, & i,j = 0 \\ \sum_{i+j=1}^{k} \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0\,, & i+j \neq 0 \end{cases}$$

koşulları sağlanarak yazılan γ eğrisi küresel eğri olur.

İspat:

1. n=1 için $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ eğrisinin bileşenleri

$$\gamma_1(t) = a_{11}t + a_{10}$$

$$\gamma_2(t) = a_{21}\mathrm{t} + a_{20}$$

$$\gamma_3(t) = a_{31}\mathrm{t} + a_{30}$$

olur. Böylece

$$\gamma(t) = \vec{a}_1\mathrm{t} + \vec{a}_0$$

elde edilir. Küresel olma şartına bakıldığında

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \vec{a}_1\mathrm{t} + \vec{a}_0, \vec{a}_1\mathrm{t} + \vec{a}_0 \rangle = 1$$

olmalıdır.

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle}_{0} t^2 + 2\underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_0 \rangle}_{0} t + \underbrace{\langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle}_{1} = 1$$

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i t^i \qquad \vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$$

$n = 1$ için

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{1} \vec{a}_i t^i = \vec{a}_1 \mathrm{t} + \vec{a}_0$$

olur.

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \sum_{i=0}^{1} \vec{a}_i t^i , \sum_{j=0}^{1} \vec{a}_j t^j \rangle = 1$$

şartını sağlaması gerekir.

$$\langle \sum_{i=0}^{1} \vec{a}_i t^i , \sum_{j=0}^{1} \vec{a}_j t^j \rangle = \sum_{k=0}^{2} b_k t^k = 1, \qquad k = i + j \text{ ve } i, j \in \{0,1,2, \dots , n\}$$

$$b_k = \begin{cases} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle = 1 , & i, j = 0 \\ \sum_{i+j=1}^{k} \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0 , & i + j \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{2} b_k t^k = b_2 t^2 + b_1 t^1 + b_0 t^0$$

$$b_2 = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = 0 , \quad i + j \neq 0$$

$$b_1 = 2\langle \vec{a}_1, \vec{a}_0 \rangle = 0 , \quad i + j \neq 0$$

$$b_0 = \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle = 1, \qquad i, j = 0$$

olduğundan dolayı $n = 1$ için karakterizasyonun sağlandığı görülür.

2. γ eğrisi m. dereceden küresel eğri olmak üzere; $n = m$ için doğru küresel eğri olduğunu kabul edelim.

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{m} \vec{a}_i t^i \qquad\qquad \vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$$

şekilde gösterilir. Küresel eğri olması için;

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \sum_{i=0}^{m} \vec{a}_i t^i , \sum_{j=0}^{m} \vec{a}_j t^j \rangle = 1$$

şartını sağladığı için

$$\langle \sum_{i=0}^{m} \vec{a}_i t^i , \sum_{j=0}^{m} \vec{a}_j t^j \rangle = \sum_{k=0}^{2m} b_k t^k = 1, \qquad m = i + j\,, \;\; i, j = \{0,1,2, \dots , m\}$$

$$b_k = \begin{cases} \langle \vec{a}_0, \vec{a}_0 \rangle = 1\,, & i, j = 0 \\ \displaystyle\sum_{i+j=1}^{2m} \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0\,, & i + j \neq 0 \end{cases}$$

olur.

3. $n = m + 1$ için γ eğrisinin $(m + 1)$. dereceden küresel eğri olduğunu gösterelim.

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{m+1} \vec{a}_i t^i$$

olur. Küresel eğri olması için;

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle \sum_{i=0}^{m+1} \vec{a}_i t^i , \sum_{i=0}^{m+1} \vec{a}_i t^i \rangle = \sum_{k=0}^{2m+2} \vec{b}_k t^k$$

ifadesinin 1' e eşit olduğunu göstermemiz gerekir. Gerekli işlemler yapıldığında:

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \sum_{k=0}^{2m+2} \vec{b}_k t^k = \underbrace{\underbrace{\vec{b}_{2m+2} t^{2m+2}}_{0}}_{\sum_{i+j=1}^{2m} \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0 , \quad i+j \neq 0} + \underbrace{\underbrace{\vec{b}_{2m+1} t^{2m+1}}_{0}}_{\sum_{i+j=1}^{2m} \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0 , \quad i+j \neq 0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2m} \vec{b}_k t^k}_{1} = 1$$

eşitliği olduğundan bu şartları sağlayan γ eğrisi $(m+1)$. dereceden küresel eğri olur.

4.3. Minkowski 3 −Uzayında Bertrand Eğriler

Tanım 4.3.1. Bir $\gamma: I \to S_1^2$ birim hızlı spacelike küresel eğrisi σ yay parametresiyle verilmiş olsun. $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\sigma}$ olmak üzere, γ nın σ daki birim teğet vektörü $T(\sigma) = \dot{\gamma}(\sigma)$ ile verilir. $S(\sigma) = \gamma(\sigma) \times T(\sigma)$ şeklinde tanımlanan $S(\sigma)$ vektörü ile birlikte γ boyunca ortonormal bir $\{\gamma(\sigma), T(\sigma), S(\sigma)\}$ çatısı elde edilir. Bu çatıya γ eğrisinin Sabban Çatısı denir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Teorem 4.3.1. γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'de birim hızlı bir eğri olsun. γ nın hiperbolik Serret Frenet formülleri:

γ spacelike eğrisi H_1^2'de tanımlıysa (s spacelike vektör ise)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\sigma) &= T(\sigma) \\ \dot{T}(\sigma) &= \gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)S(\sigma) \\ \dot{S}(\sigma) &= -\kappa_g(\sigma)T(\sigma) \end{aligned} \tag{4.61}$$

γ spacelike eğrisi S_1^2' de tanımlıysa (s timelike vektör ise)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\sigma) &= T(\sigma) \\ \dot{T}(\sigma) &= -\gamma(\sigma) - \kappa_g(\sigma)S(\sigma) \\ \dot{S}(\sigma) &= -\kappa_g(\sigma)T(\sigma) \end{aligned} \tag{4.62}$$

γ timelike eğrisi S_1^2' de tanımlıysa

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\sigma) &= T(\sigma) \\ \dot{T}(\sigma) &= \gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)S(\sigma) \\ \dot{S}(\sigma) &= -\kappa_g(\sigma)T(\sigma) \end{aligned} \tag{4.63}$$

şeklindedir. Burada $\kappa_g = \det(\gamma, T, \dot{T})$ jeodezik eğriliktir (Izumiya, 2004).

Teorem 4.3.3. γ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ de birim hızlı küresel bir eğri olsun. Bu durumda, a ve θ sabit sayılar, c sabit vektör $\varepsilon = \mp 1$ olmak üzere

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = \left[a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(u)du + \varepsilon coth\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} S(u)du\right] + c \tag{4.64}$$

ile verilen $\tilde{\gamma}(\sigma)$ eğrisi bir Bertrand eğrisidir. γ spacelike eğri ise $\varepsilon = 1$, timelike eğri ise $\varepsilon = -1$ alınır. Ayrıca asli normal vektörü lightlike (null) olmayan tüm Bertrand eğrileri bu yöntemle üretilebilir (Güner, 2011).

4.4. Minkowski $3-$ Uzayında Bertrand PH-Eğriler

Teorem 4.4.1. $\gamma: I \to S_1^2$ birim hızlı küresel PH-eğri olsun.

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(u)du + \varepsilon coth\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} S(u)du\right] + c \tag{4.65}$$

ile tanımlanan $\tilde{\gamma}(\sigma)$ uzay eğrisi Bertrand PH-eğri olur. Burada a ve θ sabit sayılar, c sabit vektördür.

İspat: Küresel eğrilerden Bertrand eğri aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir.

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(u)du + \varepsilon coth\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} S(u)du\right] + c$$

$\tilde{\gamma}(\sigma)$'nın türevini aldığımızda aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a\gamma(\sigma) + a\varepsilon coth\theta S(\sigma)$$

$\tilde{\gamma}(\sigma)$' nın normu hesaplandığında:

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = \quad \|a\gamma(\sigma) + a\varepsilon coth\theta s(\sigma)\|$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = \quad \sqrt{(a^2[\langle\gamma(\sigma) + \varepsilon coth\theta S(\sigma), \gamma(\sigma) + \varepsilon coth\theta S(\sigma)\rangle])}$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = \quad |a|\sqrt{\langle\gamma,\gamma\rangle + 2\varepsilon coth\theta\langle\gamma, S\rangle + \varepsilon coth^2\theta\langle S, S\rangle}$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = \quad |a|\sqrt{(1 + \varepsilon coth^2\theta)}$$

ifadesi sabit polinom olduğu için $\tilde{\gamma}(\sigma)$ eğrisi PH-eğri olduğu aşikardır. Böylece $\tilde{\gamma}$ Bertrand PH-eğri olur.

Teorem 4.4.2. $\gamma: I \rightarrow S_1^2$ keyfi hızlı küresel PH-eğri olsun.

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} v(u)\gamma(u)du + \varepsilon coth\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} v(u)S(u)du\right] + c \qquad (4.66)$$

ile tanımlanan $\tilde{\gamma}(\sigma)$ uzay eğrisi Bertrand PH-eğri olur. Burada a ve θ sabit sayılar, c sabit vektördür.

İspat: $\|\dot{\gamma}\| = v$ olsun. $v = p$ (p bir polinom) olsun.

$$\dot{\gamma}(\sigma) = \quad vT(\sigma)$$

$$\dot{T}(\sigma) = \quad v\gamma(\sigma) + v\kappa_g(\sigma)S(\sigma))$$

$$\dot{S}(\sigma) = \quad -v\kappa_g(\sigma)T(\sigma)$$

$$\kappa_g(\sigma) = vdet(\gamma(\sigma), T(\sigma), \dot{T}(\sigma)) \qquad (4.67)$$

Sabban Çatısına göre yukarıdaki çatıyı yazabiliriz.

Küresel eğrilerden Bertrand eğri aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir.

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} v(u)\gamma(u)du + \varepsilon coth\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} v(u)S(u)du\right] + c \qquad (4.68)$$

$\tilde{\gamma}(\sigma)$ türevi alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = av(\sigma)\gamma(\sigma) + a\varepsilon coth\theta v(\sigma)S(\sigma)$$

$\tilde{\gamma}(\sigma)$' normu hesaplandığında:

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = \|av(\sigma)\gamma(\sigma) + a\varepsilon coth\theta v(\sigma)S(\sigma)\|$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = \sqrt{(a^2[\langle v(\sigma)\gamma(\sigma) + \varepsilon coth\theta v(\sigma)S(\sigma), v(\sigma)\gamma(\sigma) + \varepsilon coth\theta v(\sigma)S(\sigma)\rangle])}$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = |a|\sqrt{v^2\langle\gamma,\gamma\rangle + 2\varepsilon coth\theta v^2\langle\gamma, S\rangle + \varepsilon coth^2\theta v^2\langle S, S\rangle}$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = |a|\sqrt{v^2(1 + \varepsilon coth^2\theta)}$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\| = |a|v\sqrt{(1 + \varepsilon coth^2\theta)}$$

elde edilir. $\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|$ ifadesi polinom olduğu için $\tilde{\gamma}$ Bertrand PH-eğri olur.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, birinci bölümde Bertrand ve PH-eğrilerle ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde Öklid ve Minkowski uzaylarında temel kavramlar açıklanmış olup, yaptığımız çalışmaya yardımcı olabilecek teoremler ispatlarla verilmiştir. Bu kavramlar ve teoremler yardımıyla üçüncü bölümde Öklid $3-$uzayında PH-eğriler açıklanmış ve küresel PH-eğrilerin olmadığı ortaya koyulmuştur. Teorem 3.2.2 metoduyla elde edilebilen Bertrand PH-eğrinin olmadığı sonucuna varılmıştır. Dördüncü bölümde; Minkowski $3-$uzayında PH-eğriler açıklanmış ve küresel PH-eğrilerin varlığı gösterilmiştir. Bu bölümün alt başlıklarında Birinci Dereceden Küresel PH-eğriler, İkinci Dereceden Küresel PH-eğriler ve Üçüncü Dereceden Küresel PH-eğriler tanımlanmış ve spacelike, timelike ve null olma durumları incelenmiştir. Üçüncü Dereceden Küresel PH-eğrilerin özel durumlarına yer verilmiş ve örneklendirilmiştir.

Bu bilgiler doğrultusunda ve ispatlarla vardığımız sonuçlar şu şekilde sıralanabilir:

1. Öklid $3-$uzayında küresel PH-eğri yoktur.

2. Öklid $3-$uzayında küresel PH-eğri olmadığından Teorem 3.2.2 metoduyla elde edilebilen Bertrand PH-eğri de yoktur.

3. Minkowski $3-$uzayında küresel PH-eğri vardır.

4. Minkowski $3-$uzayında S_1^2 küresi üzerinde yatan birinci dereceden bütün küresel PH-eğriler null eğrilerdir.

5. Minkowski $3-$uzayında H_1^2 üzerinde yatan birinci dereceden bütün küresel PH-eğriler null eğrilerdir.

6. Minkowski $3-$uzayında ikinci dereceden S_1^2 ve H_1^2 küreleri üzerinde yatan spacelike ve null küresel PH-eğri vardır.

7. Minkowski $3-$uzayında timelike küresel PH-eğri yoktur.

8. $n.$ dereceden γ eğrisi için küresel eğri olma şartı genelleştirilerek Teorem 4.2.3.1 verilmiştir.

9. Minkowski $3-$uzayında küresel eğrilerden Bertrand eğri elde etme yöntemiyle elde edilen bütün Bertrand eğriler aynı zamanda PH-eğridir. Yani Teorem 4.3.3. yöntemiyle elde edilen bütün eğriler Bertrand PH-eğridir.

Bu sonuçlardan yola çıkarak Minkowski uzayında daha büyük derecelerde küresel PH-eğriler incelenebilir. Bu incelemeler daha yüksek boyutlu uzaylara taşınabilir. Minkowski uzayında genelleştirilebilir.

KAYNAKÇA

Akdemir, A.A. (2021). Eğrilik ile Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Eğriler. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Kayseri.

Babaarslan, M. (2009). Null Bertrand Eğriler Üzerine. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Isparta.

Babaarslan, M. (2013). Sabit Eğimli Yüzeyler ve Uygulamaları. Yayınlanmış Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

Bertrand, J. (1850). Memoire sur la theorie des courbes a double Courbure, *Journal de Mathematiques Pures er Appliquees*, 15, 332-350.

Bilgin, B. (2020). Minkowski 3-Uzayında V-Bertrand Eğri Çiftleri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Çanakkale.

Camcı, Ç., Uçum, A. and İlarslan, K. (2020). A New Approach To Bertrand Curves İn Euclidean 3-Space.

Çakal, S. (2018). Üç Boyutlu Lie Gruplarda AW(k) Tipi Bertrand Eğrileri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Erzincan.

Farouki, R. T. and Sakkalis, T. (1990). Pythagorean-hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, 34(5), 736-752.

Farouki, R. T. and Sakkalis, T. (1994). Pythagorean-hodograph Space Curves. *Advances in Computational Mathematics*, 2, 41-66.

Güner, G. (2011). Küresel Eğriler ve Bertrand Eğrileri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Trabzon.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). *Diferansiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Hsuing, C.C. (1981). *A First Course in Differential Geometry*. International Press, New York.

Irmak, Y. (2018). Dört Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğrileri ve Geometrik Uygulamaları. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

Işık, S. (2020). 4-Boyutlu Yarı-Öklidyen Uzayda Genelleştirilmiş Bertrand Eğrileri Üzerine. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale.

Izumiya S., N. Takeuchi (2002). 'Generic Properties of Helices and Bertrand Curves', Journal of Geometry, 74, 97-109.

Izumiya S., Pei D. H., Sano T. And Torii E. (2004). Evolutes of Hyperbolic Plane Curves, Acta Mathematica Sinica, English Series, 20(3), 543-550.

Izumiya S., N. Takeuchi (2017). Generalized Sabban Curves İn The Euclidean N-Sphere And Spherical Duality.

Kartal, E. (2019). (1,0), (1,1), (2,1) ve (3,0) Tipli Bertrand Eğri Çiftleri Üzerine, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Kreyszig, E. (1959). *Differential Geometry*. University of Toronto Press, Canada.

Kubota, K. K. (1972). Pythagorean Triples in Unique Factorization Domains. *American Mathematical Monthly*, 79(5), 503-505.

Lopez, R. (2008). Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space. arXiv:0810.3351v1 [math.DG].

Larson, R. (2012). *Elementry Linear Algebra*, The Pennsylvania State University, Boston.

Moon, H. P. (1999). Minkowski Pythagorean Hodographs, *Computer Aided Geometric Design*. South Korea, 16(8), 739-753.

Matsuda H., Yorozu S. (2003). *Notes on Bertrand Curves,* Yokohama Math. J. 50, 41-58.

O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, New York.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York.

Özçınar, M. (2017). Bertrand Eğrilerin Karakteristik Özellikleri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Sakarya.

Ramis, Ç. (2013). PH-eğrileri ve Uygulamaları. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

Şimşek, G. (2017). $\mathbb{R}_1^3$ Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Bertrand Eğrilerinin Belirlenmesi ve Silindirik Helislerin Genel Özellikleri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Samsun.

Tarhan, M. (2007). 3-boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğrileri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Elazığ.

Turan, M. (2016). PH Eğrileri ve Euler-Rodrigues Çatıları. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Elazığ.

Yerlikaya, F. (2013). 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bertrand Eğrilerinin Küresel Göstergelerinin Yeni Gösterimleri. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun.

Yeşilmen, C. (2016). Minkowski Uzayında Bezier Eğrilerinin Karakterizasyonu. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Elazığ.

Yılmaz Evren, S. (2020). Bertrand Nurbs Eğriler Üzerine. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Muş.